

ПСЕВДОЦЕНТЪР И ОРТОЦЕНТЪР – ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА

¹⁾Веселин Ненков, ²⁾Станислав Стефанов, Хаим Хаимов

¹⁾Технически колеж – Ловеч

²⁾Технически университет – София

Резюме. В статията са описани някои свойства на две забележителни точки в изпъкналия четириъгълник, които са естествени обобщения на центъра на описаната окръжност и ортоцентъра на вписания четириъгълник.

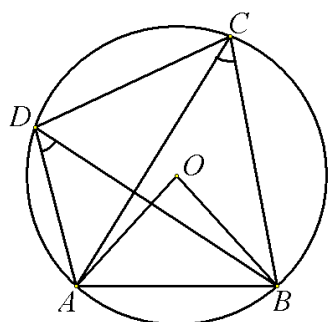
Keywords: quadrilateral, circumcircle, circumcenter, orthocenter, Euler circle

В редица публикации са описани и изследвани различни забележителни точки в произволен изпъкнал четириъгълник (вж. литературата). Някои от забележителните точки в четириъгълника са аналози на забележителните точки в триъгълника, други са строго специфични за четириъгълника, трети са обобщения на забележителни точки на специални видове четириъгълници (вписан, описан, хармоничен и т.н.). Забележителните точки са интересни, на първо място, с многобройните си и разнообразни свойства и на второ – с връзките помежду си. Някои тройки от тях са разположени на забележителни прави, а някои четворки и дори повече – на забележителни окръжности. Те се изобразяват една в друга при различни преобразувания в четириъгълника. Разстоянията между някои от тях и върховете на четириъгълника се определят по прости формули. Интересни характеристики имат педалните четириъгълници на някои точки.

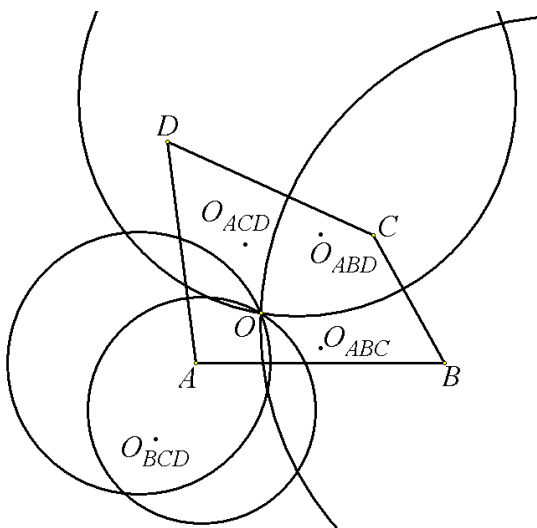
Тук ще разгледаме две тясно свързани забележителни точки в изпъкналия четириъгълник, които са обобщения на центъра на описаната окръжност и ортоцентъра на вписания четириъгълник (Grozdev & Nenkov, 2011). Както е разяснено в (Хаимов, 2010), повечето от свойствата им са идентични със свойствата на последните.

Нека $ABCD$ е произволен изпъкнал четириъгълник, а r_{BCD} , r_{CDA} , r_{DAB} и r_{ABC} са радиусите на описаните окръжности съответно на триъгълниците BCD , CDA , DAB и ABC . Ако $ABCD$ е вписан в окръжност с център O , то

$$r_{BCD} = r_{CDA} = r_{DAB} = r_{ABC} \text{ и } \frac{AO}{BO} = \frac{r_{CDA}}{r_{BCD}}, \frac{BO}{CO} = \frac{r_{DAB}}{r_{CDA}}, \frac{CO}{DO} = \frac{r_{ABC}}{r_{DAB}}, \frac{DO}{AO} = \frac{r_{BCD}}{r_{ABC}}$$



Фигура 1



Фигура 2

(фиг. 1). Тези свойства на центъра на описаната около $ABCD$ окръжност ни дават основание да търсим точка O (ако съществува) със същите свойства, но в равнината на произволен изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Горните отношения показват, че ако O съществува, тя е пресечна точка на четири Аполониеви окръжности (фиг. 2). Следователно, ако точката O съществува, тя е единствена.

Лесно се вижда, че разгледаните отношения са еквивалентни със следните равенства:

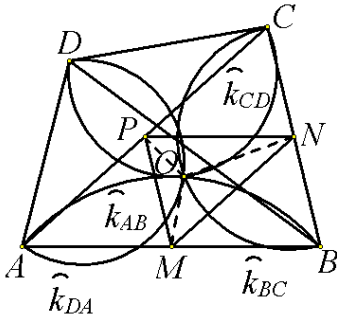
$$(1) \quad AO \cdot r_{BCD} = BO \cdot r_{CDA} = CO \cdot r_{DAB} = DO \cdot r_{ABC}.$$

Въз основа на (1) въвеждаме следното

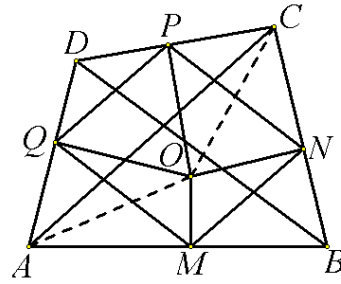
Определение 1. Точката O в равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$, за която са изпълнени равенствата (1), наричаме псевдоцентър.

От извършените разсъждения следва, че ако $ABCD$ е вписан в окръжност, четириъгълникът притежава псевдоцентър O , който съвпада с центъра на описаната му окръжност. Следователно съществуват четириъгълници, които притежават псевдоцентър. По-нататък ще покажем, че всеки изпъкнал четириъгълник притежава забележителната точка псевдоцентър. Преди това ще въведем следното

Определение 2. Сборът от ъглите, под които се вижда страната AB на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ от върховете му C и D , наричаме ъглова мярка на страната AB . Ъгловата мярка на страната AB ще означаваме с φ_{AB} . Следователно $\varphi_{AB} = \angle ADB + \angle ACB$ (фиг. 1).



Фигура 3



Фигура 4

За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ въвеждаме и следните означения: с $\widehat{k}_{AB}$, $\widehat{k}_{BC}$, $\widehat{k}_{CD}$ и $\widehat{k}_{DA}$ означаваме съответно дъгите от окръжности, лежащи в $ABCD$, от които страните AB , BC , CD и AB се виждат съответно под ъгъл φ_{AB} , φ_{BC} , φ_{CD} и φ_{DA} (фиг. 3).

Съществуването на псевдоцентър ще докажем само в случая, когато ъгловите мерки на всички страни на $ABCD$ са по-малки от 180° . В останалите случаи разсъжденията са аналогични.

Теорема 1. Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, страните на който имат ъгловите мерки, по-малки от 180° , дъгите $\widehat{k}_{AB}$, $\widehat{k}_{BC}$, $\widehat{k}_{CD}$ и $\widehat{k}_{DA}$ се пресичат в точка O , за която са изпълнени равенствата (1) (фиг. 3).

Доказателство. Нека O' е втората пресечна точка на дъгите $\widehat{k}_{AB}$ и $\widehat{k}_{BC}$ (фиг. 3). Ще докажем, че са изпълнени равенствата

$$(*) \quad AO' \cdot r_{BCD} = BO' \cdot r_{CDA} = CO' \cdot r_{DAB}.$$

Означаваме ортогоналните проекции на O' върху AB , BC и CA съответно с M , N и P . Тъй като AO' е диаметър на описаната около APM окръжност, от синусовата теорема следва $AO' = \frac{PM}{\sin \angle CAB}$. Аналогично $BO' = \frac{MN}{\sin \angle ABC}$. От синусовата теорема, приложена за триъгълниците BCD , CDA , MNP и ABC , получаваме съответно $r_{BCD} = \frac{BC}{2 \sin \angle BDC}$, $r_{CDA} = \frac{AC}{2 \sin \angle DCA}$, $\frac{PM}{MN} = \frac{\sin \angle MNP}{\sin \angle MPN}$, $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle CAB}$. От последните равенства следва

$$(2) \quad \frac{AO'}{BO'} \cdot \frac{r_{BCD}}{r_{CDA}} = \frac{\sin \angle MNP}{\sin \angle MPN} \cdot \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle BDC}.$$

От друга страна, от вписаните четириъгълници $AMO'P$ и $MBNO'$ следва $\sphericalangle PMN = \sphericalangle PMO' + \sphericalangle NMO' = \sphericalangle PAO' + \sphericalangle NBO'$. Следователно

$$(3) \quad \sphericalangle PMN = \sphericalangle CAO' + \sphericalangle CBO'.$$

Тъй като от всички точки на дъгата $\widehat{k}_{AB}$ страна-та AB се вижда под ъгъл $\varphi_{AB} = \sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB$, то $\sphericalangle CAO' + \sphericalangle CBO' = \sphericalangle AO'B - \sphericalangle ACB = \varphi_{AB} - \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Сега от (3) намираме, че $\sphericalangle PMN = \sphericalangle ADB$. Аналогично от $O' \in \widehat{k}_{BC}$ следва, че $\sphericalangle MNP = \sphericalangle BDC$. От последните две равенства намираме

$$\frac{\sin \sphericalangle MNP}{\sin \sphericalangle MPN} = \frac{\sin \sphericalangle BDC}{\sin(\sphericalangle MNP + \sphericalangle PMN)} = \frac{\sin \sphericalangle BDC}{\sin(\sphericalangle BDC + \sphericalangle ADB)} = \frac{\sin \sphericalangle BDC}{\sin \sphericalangle CDA}.$$

Оттук, след заместване в (2), получаваме $\frac{AO'}{BO'} \cdot \frac{r_{BCD}}{r_{CDA}} = 1$, т.е.

$AO' \cdot r_{BCD} = BO' \cdot r_{CDA}$. С това първото равенство в (*) е доказано. Аналогично се доказва и равенството $BO' \cdot r_{CDA} = CO' \cdot r_{DAB}$. С това равенствата (*) са доказани.

Нека сега втората пресечна точка на дъгите $\widehat{k}_{AB}$ и $\widehat{k}_{DA}$ е O'' . Аналогично на (*) се получават равенствата

$$(**) \quad BO'' \cdot r_{CDA} = AO'' \cdot r_{BCD} = DO'' \cdot r_{ABC}.$$

От (*) и (**) следват равенствата $\frac{AO'}{BO'} = \frac{AO''}{BO''} = \frac{r_{CDA}}{r_{BCD}}$. Това означава, че точките O' и O'' лежат на една и съща Аполониева окръжност α за отсечката AB . От друга страна, O' и O'' са точки от дъгата $\widehat{k}_{AB}$. Тъй като α и $\widehat{k}_{AB}$ имат само една обща точка, то $O' \equiv O'' \equiv O$, където $O = \widehat{k}_{AB} \cap \widehat{k}_{BC} \cap \widehat{k}_{DA}$.

Аналогично се доказва, че ако O''' е втората пресечна точка на $\widehat{k}_{BC}$ и $\widehat{k}_{CD}$, то $O''' \equiv O$. Оттук следва, че четирите дъги $\widehat{k}_{AB}$, $\widehat{k}_{BC}$, $\widehat{k}_{CD}$ и $\widehat{k}_{DA}$ минават през точката O . С това теорема 1 е доказана.

От доказателството на теорема 1 следва, че всеки изпъкнал четириъгълник притежава псевдоцентър. Освен от това теорема 1 се получава следното:

Свойство 1. Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, страните на който имат ъглови мерки, по-малки от 180° , то всяка страна на четириъгълника се вижда от псевдоцентъра му под ъгъл, равен на ъгловата ѝ мярка.

Забележка 1. С помощта на следствие 1 лесно се убеждаваме, че дефиницията на псевдоцентъра, изразена с определение 1, е еквивалентна с тази, представена в (Наймов, 2010).

Следват още няколко свойства на псевдоцентъра.

Свойство 2. За псевдоцентъра O на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\frac{AO}{CO} = \frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle DAB}$ и $\frac{BO}{DO} = \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle ABC}$.

Доказателството на първото равенство в това свойство се получава от равенството $AO \cdot r_{BCD} = CO \cdot r_{DAB}$ и синусовата теорема за триъгълниците DAB и BCD по следния начин $\frac{AO}{CO} = \frac{r_{DAB}}{r_{BCD}} = \frac{BD}{2 \sin \angle DAB} \cdot \frac{2 \sin \angle BCD}{BD} = \frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle DAB}$. Второто равенство се получава по същия начин.

Определение 3. Ако M , N , P и Q са ортогоналните проекции на точката O съответно върху правите AB , BC , CD и DA , четириъгълникът $MNPQ$ се нарича педален на точката O (фиг. 4).

Свойство 3. Педалният четириъгълник $MNPQ$ на псевдоцентъра O на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е успоредник (фиг. 4).

Доказателство. От синусовата теорема за триъгълниците AMQ и CPN следват съответно равенствата $QM = AO \cdot \sin \angle DAB$ и $PN = CO \cdot \sin \angle BCD$. От друга страна, според свойство 2 е изпълнено $AO \cdot \sin \angle DAB = CO \cdot \sin \angle BCD$. Следователно $QM = PN$. Аналогично се показва, че $MN = PQ$. Следователно $MNPQ$ е успоредник.

По аналогичен начин се доказва и следното

Свойство 4. Ортогоналните проекции на псевдоцентъра O на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ върху двойка срещуположни страни и двата диагонала са върхове на успоредник.

Други свойства на псевдоцентъра се съдържат в (Наимов, 2010).

Забележка 2. Лесно се доказва, че псевдоцентърът O на четириъгълника $ABCD$ лежи или в ъгъла между правите AB и CD , съдържащ четириъгълника, или в съответния ъгъл между правите BC и DA . Доказва се, че в равнината на $ABCD$ може да има най-много две точки, чиито педални четириъгълници са успоредници. Едната според свойство 3 е псевдоцентърът. Другата, както лесно се съобразява, лежи извън споменатите ъгли. Следователно, ако педалният четириъгълник на една точка от тези ъгли е успоредник, то тя съвпада с псевдоцентъра. Този факт ще ни послужи по-нататък.

Определение 4. Педалният четириъгълник $MNPQ$ на псевдоцентъра O за изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ще наричаме педално вписан успоредник на $ABCD$.

Дотук разгледахме част от свойствата на псевдоцентъра. Преди да преминем към втората забележителна точка на произволен изпъкнал

четириъгълник $ABCD$, да предположим, че $ABCD$ е вписан в окръжност. От направения в началото коментар следва, че псевдоцентърът му съвпада с центъра O на описаната окръжност. Педалният четириъгълник на този център е успоредник. Той има за върхове средите на страните на $ABCD$ (понеже O лежи върху симетралите на страните). Известно е, че перпендикулярите, спуснати от средите на страните на вписания четириъгълник $ABCD$ към срещуположните страни се пресичат в една точка H (Grozdev & Nenkov, 2011). Тя се нарича ортоцентър на четириъгълника, а самите перпендикуляри – негови височини. Както ще видим сега, с помощта на педално вписания успоредник на четириъгълника $ABCD$ могат да се дефинират обобщения на височините и ортоцентъра и в случая, когато той не е вписан в окръжност.

Определение 5. Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, перпендикулярите, спуснати от върховете на педално вписания му успоредник $MNPQ$ към срещуположните им страни, се наричат височини на четириъгълника.

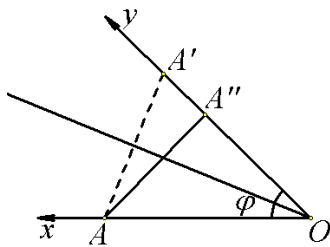
Теорема 2. Височините на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ се пресичат в една точка H .

Доказателството на тази теорема се съдържа в (Naimov, 2010).

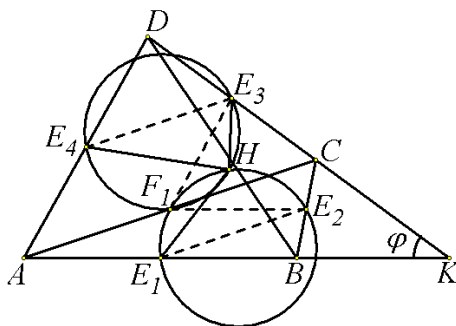
Определение 6. Пресечната точка H на височините на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ще наричаме ортоцентър на $ABCD$.

Ортоцентърът H на четириъгълника $ABCD$ е образ на псевдоцентъра му O при едно важно преобразуване.

Определение 7. Нека xOy е произволен ъгъл с мярка φ ($0 < \varphi < 180^\circ$). Композицията от симетрията g спрямо ъглополовящата на ъгъла xOy и хомотетията h с център върха му O и коефициент $\cos \varphi$ ще наричаме симетрична хомотетия спрямо ъгъла xOy и ще означаваме с gh .



Фигура 5



Фигура 6

Лема 1. Нека xOy е произволен ъгъл с мярка φ . Образът на произволна точка A от рамото $Ox^{\rightarrow}$ при симетричната хомотетия gh спрямо xOy е проекцията ѝ върху правата, на която лежи другото рамо на xOy (фиг. 5).

Доказателство. Образът на точката A при симетрията g спрямо ъглополовящата на ъгъл xOy е точката A' от рамото $Oy^{\rightarrow}$, за която $OA' = OA$ (фиг. 5). От своя страна, образ на точката A' от рамото $Oy^{\rightarrow}$ при хомотетията h с център O и коефициент $\cos \varphi$ е точката A'' от правата l , за която $\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{OA'} \cdot \cos \varphi$. От $OA' = OA$ и последното равенство следва, че $\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{OA} \cdot \cos \varphi$, т.е., точката A'' е проекция на точката A върху правата l .

Теорема 3. Ако продълженията на страните AB и DC на изпъкналият четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка K , образът на псевдоцентъра O за $ABCD$ при симетричната хомотетия gh спрямо $\sphericalangle AKD$ е ортоцентърът H на $ABCD$.

Доказателството на тази теорема се съдържа в (Haimov, 2010).

Сега да направим следната важна

Забележка 3. Доказва се, че ортоцентърът H на вписания четириъгълник $ABCD$ има следното свойство: „Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB имат обща точка, която е H “. Но е известно още, че Ойлеровите окръжности на тези триъгълници имат обща точка и когато $ABCD$ не е вписан, а е произволен четириъгълник (Nenkov, 2008). Това е една забележителна точка, открита още в началото на XX век. В (Haimov, 2010) е доказано, че ортоцентърът на изпъкнал четириъгълник (дефиниран с определение 6) съвпада с тази точка. Ето защо всички свойства на ортоцентъра, разглеждани както тук, така и в (Haimov, 2010), са нови свойства на въпросната точка. Фактът, че във всеки изпъкнал четириъгълник $ABCD$ Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB имат ортоцентъра H за обща точка, ще ни послужи при доказателството на следната

Теорема 4. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, продълженията на страните AB и DC се пресичат в точка K и $\sphericalangle AKD = \varphi$. Ако H е ортоцентърът на $ABCD$, а E_1 и E_3 са средите съответно на страните AB и DC , то $E_1HE_3 = 180^\circ - \varphi$.

Доказателство. Означаваме средите на диагонала AC и страните DC и AD съответно с F_1 , E_2 и E_4 (фиг. 6). Ойлеровите окръжности на BCD , CDA , DAB и ABC означаваме съответно с k_A , k_B , k_C и k_D . Ортоцентърът H на $ABCD$ е обща точка на Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB (според забележка 3). Ойлеровите окръжности на триъгълниците $\sphericalangle$ и ABC са определени от средите на

страните си съответно $F_1, E_3, E_4 \in DA$ и E_1, E_2, F_1 . От $H \in k_D$ следва, че $\sphericalangle E_4HF_1 = \sphericalangle E_4E_3F_1$. От друга страна $AF_1E_1E_4$ е успоредник и затова $\sphericalangle E_4E_3F_1 = \sphericalangle E_4AF_1$. Тогава $\sphericalangle E_4HF_1 = \sphericalangle E_4AF_1$. Аналогично от $H \in k_B$ се получава, че $\sphericalangle E_1HF_1 = \sphericalangle E_1AF_1$. Събираме почленно последните две равенства и получаваме

$$(5) \quad \sphericalangle E_4HF_1 + \sphericalangle F_1HE_1 = \sphericalangle E_4AF_1 + \sphericalangle F_1AE_1.$$

От друга страна, са изпълнени равенствата $\sphericalangle E_4HF_1 + \sphericalangle F_1HE_1 = \sphericalangle E_4HE_1$ и $\sphericalangle E_4AF_1 + \sphericalangle F_1AE_1 = \sphericalangle E_4AE_1$ (фиг. 6). Сега от равенството (5) следва

$$(6) \quad \sphericalangle E_4HE_1 = \sphericalangle E_4AE_1.$$

Аналогично се доказва равенството (фиг. 6)

$$(7) \quad \sphericalangle E_4HE_3 = \sphericalangle E_4DE_1.$$

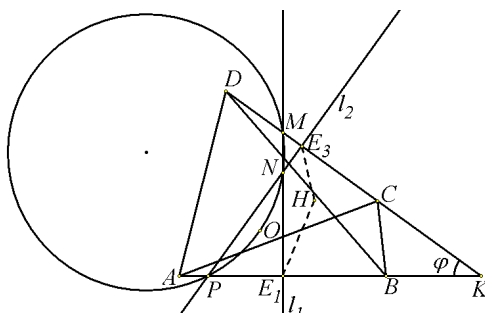
След почленно събиране на (6) и (7) се получава

$$(8) \quad \sphericalangle E_4HE_1 + \sphericalangle E_4HE_3 = \sphericalangle E_4AE_1 + \sphericalangle E_4DE_3.$$

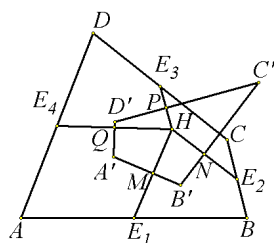
От друга страна, е изпълнено (фиг. 6)

$$(9) \quad \sphericalangle E_4HE_1 + \sphericalangle E_4HE_3 = \sphericalangle E_1HE_3.$$

От (8) и (9) следва равенството $\sphericalangle E_4AE_1 + \sphericalangle E_4DE_3 = \sphericalangle E_1HE_3$. Освен това от $\triangle AKD$ имаме $\sphericalangle E_4AE_1 + \sphericalangle E_4DE_3 = 180^\circ - \sphericalangle AKD = 180^\circ - \varphi$. Следователно $\sphericalangle E_1HE_3 = 180^\circ - \varphi$. С това теоремата е доказана.



Фигура 7



Фигура 8

С помощта на теорема 4 ще докажем още едно свойство на псевдоцентъра на четириъгълника.

Свойство 5. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, в който AB не е успоредна на CD , симетралата l_1 на страната AB пресича правата CD в точка M , асиметралата l_2 на страната CD пресича правата AB в точка P . Ако N е пресечната точка на симетралите l_1 и l_2 , то псевдоцентърът O

на $ABCD$ лежи на дъгата $\widehat{MNP}$ от описаната около $\triangle MNP$ окръжност (фиг. 7).

Доказателство. Нека K е пресечната точка на продълженията на страните AB и CD , а E_1 и E_3 са съответните им среди и $\sphericalangle AKD = \varphi$ (фиг. 7). Ако gh е симетричната хомотетия спрямо $\sphericalangle AKD$, то $O \xrightarrow{gh} H$, където H е ортоцентърът на $ABCD$ и $M \xrightarrow{gh} E_1$, $P \xrightarrow{gh} E_3$ (по теорема 3 и лема 1). Следователно $\sphericalangle \dot{u}$ се изобразява при gh в $\sphericalangle E_1HE_3$, т.е. $\sphericalangle MOP = \sphericalangle E_1HE_3$. Но $\sphericalangle E_1HE_3 = 180^\circ - \varphi$ (по теорема 4) и затова $\sphericalangle MOP = 180^\circ - \varphi$. Същевременно от това, че E_1KE_3N е вписан четириъгълник, следва $\sphericalangle MNP = \sphericalangle E_1NE_3 = 180^\circ - \sphericalangle AKD = 180^\circ - \varphi$. Следователно $\sphericalangle MOP = \sphericalangle MNP$ и точката O лежи на дъгата $\widehat{MNP}$ от окръжността, описана около $\triangle MNP$.

Ще се спрем на още една връзка между разгледаните тук забележителни точки.

Определение 8. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а A' , B' , C' и D' са центровете на Ойлеровите окръжности съответно на триъгълниците DAB , BCD , ABC и CDA . Четириъгълника $A'B'C'D'$ ще наричаме спрегнат на $ABCD$ (фиг. 8).

Теорема 6. Ако $A'B'C'D'$ е спрегнатият четириъгълник на изпъкналия четириъгълник $ABCD$, то псевдоцентърът на $A'B'C'D'$ съвпада с ортоцентъра на $ABCD$.

Доказателство. Ортоцентърът H на четириъгълника $ABCD$ е обща точка на Ойлеровите окръжности на триъгълниците DAB , BCD , ABC и CDA (според забележка 3) (фиг. 8). Нека E_1 , E_2 , E_3 и E_4 са средите съответно на страните AB , BC , CD и DA . Освен това нека $A'B' \cap HE_1 = M$, $B'C' \cap HE_2 = N$, $C'D' \cap HE_3 = P$ и $D'A' \cap HE_4 = Q$. Отсечката $A'B'$ е централа на Ойлеровите окръжности k_C и k_D съответно на $\triangle DAB$ и $\triangle ABC$, а HE_1 е общата им хорда. Следователно $A'B' \perp HE_1$ и M е средата на HE_1 . Тогава M е образ на E_1 при хомотетията $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ и $A'B' \perp HM$.

Аналогично се доказва, че точките N , P и Q са образи съответно на E_2 , E_3 и E_4 при същата хомотетия $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ и $B'C' \perp HN$, $C'D' \perp HP$ и $D'A' \perp HQ$. Четириъгълникът $E_1E_2E_3E_4$ с върхове средите на страните на $ABCD$ е успоредник. Следователно $MNPQ$ също е успоредник. От друга страна, $MNPQ$ е педалният четириъгълник на точката H по отношение на

четириъгълника $A'B'C'D'$. Лесно се съобразява, че точката H лежи в ъгъла между правите $A'B'$ и $C'D'$, съдържащ $A'B'C'D'$, или в съответния ъгъл между правите $A'D'$ и $B'C'$. От забележка 2 следва, че H съвпада с псевдоцентъра на четириъгълника $A'B'C'D'$. Така се убедихме, че ортоцентърът H на $ABCD$ съвпада с псевдоцентъра на $A'B'C'D'$.

Накрая ще приведем без доказателство още едно свойство на ортоцентъра на изпъкнал четириъгълник, което има интересно приложение.

Свойство 6. Нека $ABCD$ изпъкнал четириъгълник, като $T = AC \cap BD$, $U = AD \cap BC$, $V = AB \cap DC$. Ортоцентърът H на $ABCD$ лежи на окръжността, определена от точките U , V и T .

От това свойство следва интересният факт, че точката на Фойербах в триъгълника (допирната точка на вписаната и Ойлеровата окръжност) лежи на окръжността, определена от петите на ъглополовящите, но доказателството е обемисто, затова не го излагаме.

Накрая предлагаме няколко задачи за упражнение.

Задача 1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а $A'B'C'D'$ е неговият спрегнат четириъгълник. Да се докаже, че ортоцентърът на $A'B'C'D'$ съвпада с медицентъра на $ABCD$.

Упътване: използвайте доказателството на теорема 6 и следствието след определение 5 от (Haimov, 2010).

Задача 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който O е псевдоцентърът му. Означаваме с P точката в полуравнината на правата AB , съдържаща $ABCD$ такава, че $\sphericalangle PAB = \sphericalangle ACD$ и $\sphericalangle PBA = \sphericalangle BDC$. Нека още правата BP пресича диагонала AC в точка M , а правата AP пресича диагонала BD в точка N . Да се докаже, че правата MN минава през псевдоцентъра O на $ABCD$.

Задача 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който O е псевдоцентърът му, а r_A и r_C са радиусите на описаните около триъгълниците AOB и COD окръжности. С M означаваме пресечната точка на симетралата на страната AB с правата CD , а с N – пресечната точка на симетралата на CD с правата AB . Да се докаже, че $\frac{OM}{ON} = \frac{r_A}{r_C}$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2011). Orthocenter of inscribed quadrilateral, *Mathematics Plus*, 4, 63-69. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2011). Ортоцентър на вписан четириъгълник, *Математика плюс*, 4, 63 – 69.]
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Around the orthocenter in the plain and the space*. Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед 2000.]
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2013). Several properties of the quadrilateral, determined by its circumscribed conics, *Mathematics Plus*, 1, 57 – 66. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2013). Няколко свойства на четириъгълника, определени от описаните му централни конични сечения, *Математика плюс*, 1, 57 – 66.]
- Grozdev, S., Nenkov, V. & Haimov, H. (2013). Eight lines through a notable point of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, 4, 63 – 65. [Гроздев, С., В. Ненков & Х. Хаимов. (2013). Осем линии през една забележителна точка за четириъгълник, *Математика плюс*, 4, 63 – 65.]
- Nenkov, V. (2008). Four Euler circles through a point, *Mathematics Plus*, 2, 60 – 61. [Ненков, В. (2008). Четири Ойлерови окръжности през една точка, *Математика плюс*, 2, 60 – 61.]
- Nenkov, V. (2010). A set of the centers of conics inscribed in a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 4, 24 – 30. [Ненков, В. (2010). Множество на центровете на вписаните в четириъгълник конични сечения, *Математика и информатика*, 4, 24 – 30.]
- Nenkov, V. (2011). A set of the centers of conics circumscribed for a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 4, 15 – 20. [Ненков, В. (2011). Множество на центровете на описаните за четириъгълник конични сечения, *Математика и информатика*, 4, 15 – 20.]
- Haimov, H. (1997). The epicenter – a notable point for the quadrilateral, *Mathematics*, 1. [Хаимов, Х. (1997). Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, *Математика*, 1.]
- Haimov, H. (1999). One more notable point in the quadrilateral, *Mathematics*, 6. [Хаимов, Х. (1999). Още една забележителна точка в четириъгълника, *Математика*, 6.]
- Haimov, H. (2001). The Brocardians – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6. [Хаимов, Х. (2001). Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6.]
- Haimov, H. (2005). Brocardian points of a quadrilateral, *Mathematics Plus*, 5. [Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълник, *Математика плюс*, 5.]

- Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, 2, 28 – 50. [Хаймов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс*, 2, 28 – 50.]
- Georgieva, M. & Grozdev, S. (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.). Sofia: Publ. House “Iztok-Zapad”. 327 pages [Георгиева М. Гроздев С. (2016). [Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект. (4-то изд.) София: Издателство „Изток – Запад“.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, 295 pages.
- Malcheski, R., Grozdev, S. & Anevskа, K. (2015). *Geometry of complex number*, Sofia: Arhimedes 2000.

PSEUDOCENTER AND ORTHOCENTER – NOTABLE POINTS IN THE QUADRILATERAL

Abstract. The paper describes some properties of two notable points in the convex quadrilateral, which naturally generalize the circum-center and the orthocenter of the inscribed quadrilateral.

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College – Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

Mr. Stanislav Stefanov, PhD student
Technical University – Sofia
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

Mr. Haim Haimov, Researcher
16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna, Bulgaria