

ПРОЕКТИВНИ АЛГЕБРИЧНИ КРИВИ, КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ И ТЕОРЕМАТА НА ПАСКАЛ

Живко Желев

Резюме. Теоремата на Паскал е основен резултат в класическата проективна геометрия на коничните сечения. Чрез методите на съвременната изчислителна геометрия – дял от алгебричната геометрия, занимаващ се с намирането на броя на различни геометрични обекти в дадено многообразие, удовлетворяващи различни условия – са разгледани както теоремата на Паскал, така и някои други факти от проективната геометрия.

Keywords: Enumerative geometry, intersection theory, Bezout theorem, Pascal theorem.

Равнинни алгебрични криви. Алгебрична равнинна крива в $\mathbb{R}^2$ наричаме всяка крива, която се задава с уравнение от вида $\sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j = 0$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$, като $a_{ij} \neq 0$ поне за една двойка (i, j) , такава че $i + j = n$. В този случай n се нарича *степен* на кривата.

Много от неприятностите, които възникват при изучаването на свойствата на различни криви в $\mathbb{R}^2$, изчезват, когато се премине към комплексната проективна равнина $\mathbb{CP}^2$. Да напомним, че *комплексна проективна равнина* наричаме множеството от лъчи в пространството $\mathbb{C}^3$, които минават през началото на координатната система. С други думи, точките в $\mathbb{CP}^2$ представляват наредени тройки числа (x, y, z) , $x, y, z \in \mathbb{C}$, като точките (x, y, z) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ считаме за еквивалентни, т. е. $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ и $\sim$ е релация на еквивалентност. Прието е точките в проективното пространство да се означават така: $(x : y : z)$. По този начин се вижда, че всъщност пространството $\mathbb{CP}^2$ е разширение на комплексната равнина $\mathbb{C}^2$.¹

Така на всяка реална алгебрична крива $\sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j = 0$ в $\mathbb{R}^2$ може да се съпостави крива $\sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j z^{n-i-j}$ в $\mathbb{CP}^2$. Условието $z = 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ образуват в $\mathbb{CP}^2$ множество, съвпадащо с $\mathbb{R}^2$. Ограничението на тази крива в $\mathbb{CP}^2$ върху това множество представлява точно равнинна алгебрична крива със същите коефициенти a_{ij} .

Равнинната алгебрична крива $F(x, y) = 0$ се нарича *неразложима*, ако многочленът F не може да се представи като произведение на многочлени F_1 и F_2 с положителна степен. В противен случай кривата се нарича *разложима*. Като множество от точки, тази разложима крива представлява обединение на кривите $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$. Най-простата разложима крива от степен n се задава с уравнението $\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_n = 0$, където $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ са линейни функции. Като множество от точки, кривата може да се представи като обединение на правите $\ell_1 = 0, \ell_2 = 0, \dots, \ell_n = 0$. Тази най-проста алгебрична крива в много от случаите помага да се изясни как би изглеждала ситуацията при произволна крива от степен n . Например кривите $\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_m = 0$ и $\ell'_1 \ell'_2 \cdots \ell'_n = 0$ имат mn общи точки. Както ще видим по-нататък, произволни криви от степени m и n също имат mn общи точки (заедно с техните кратности) или безброй много общи точки.

Изчислителна геометрия и конични сечения. Изчислителната геометрия, като дял от алгебричната геометрия, се превръща в съвременна математическа дисциплина, когато е формулирана като част от петнадесетия проблем на Д. Хилберт (1862 – 1943) в неговия знаменит доклад, изнесен през 1900 г. в Париж. Този проблем в частност е насочен към изграждането и прецизирането на т. нар. *Шубертово смятане*, което е представено за първи път от немския математик Х. Шуберт (1848 – 1911) в неговата книга от 1879 г. „*Kalkül der abzählenden Geometrie*“.

Най-общо казано, основният въпрос, който си поставя съвременната изчислителна геометрия, е следният: *Колко на брой геометрични структури от даден тип удовлетворяват някакъв набор от геометрични условия?* (Zhelev, 2006), (Katz, 2006). Това, което е важно да се отбележи тук, е, че единственото условие, което трябва да удовлетворяват тези геометрични структури, е те да бъдат *краен брой*. Като тривиален пример можем да формулираме следната задача: Колко точки в равнината лежат върху две дадени прави?

Алгебричните равнинни криви от 2 степен е прието да се наричат накратко *конични сечения*. Известно е, че коничните сечения могат да бъдат класифицирани в следните групи: параболи, елипси, хиперболи, двойка прави или двойни прави. Първите три от тях оформят специален клас, т. нар. *гладки конични сечения*. Всяко конично сечение може да се представи по единствен начин с хомогенно уравнение от вида (Шафаревич, 1972), (Gathmann, 2003):

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2 = 0,$$

като всеки коефициент a_i , $i = 0, 1, \dots, 5$ е определен от коничното сечение с точност до общ ненулев множител. По този начин можем да си мислим за проектив-

ното пространство $\mathbb{CP}^5 := \mathbb{C}^6 / \sim$ ($\sim$ е релацията на еквивалентност, дефинирана по-горе) с хомогенни координати a_i като за пространството на всички конични сечения.²

Нека сега $P \in \mathbb{CP}^2$ е произволна точка в равнината. Тогава коничното сечение (определено от координатите a_i) минава през точка P тогава и само тогава, когато горното уравнение е изпълнено и приемем, че $P = P(x_0 : x_1 : x_2)$. По отношение на координатите a_i на $\mathbb{CP}^5$ това е едно линейно условие. Тъй като това проективно пространство е петмерно, то трябва и да очакваме краен брой конични сечения, ако искаме те да са инцидентни с 5 дадени точки в равнината. Всъщност, както е известно, съществува точно едно такова конично сечение, тъй като решението на 5 линейни условия в $\mathbb{CP}^5$ представлява единствена точка в това пространство. Все пак трябва да отбележим и два потенциални проблема, които могат да се появят в зависимост от избора на петте точки (Gathmann, 2003):

1. Трябва да се уверим, че петте линейни уравнения в $\mathbb{CP}^5$ са наистина независими, за да може тяхното пресичане да даде точка, а не пространство с по-висока размерност.
2. Не всички точки в модулното пространство $\mathbb{CP}^5$ описват конични сечения. Както видяхме вече, някои от тях описват обединение на две прави или двойни прави. С други думи „истинското“ модулно пространство на тези конични сечения не е цялото $\mathbb{CP}^5$, а някакво отворено подмножество $U \subset \mathbb{CP}^5$. Допълнението $\mathbb{CP}^5 \setminus U$ обикновено се нарича *граница* на модулното пространство. Ние не можем априори да знаем дали дадена точка от модулното пространство, която се явява решение на петте линейни условия, лежи в U или не, т. е. гладко конично сечение през петте дадени точки може и да не съществува.

Криви, резултанти и теоремата на Безу. Нека C и D са равнинни проективни криви от степен c и d съответно. Тогава основен въпрос на изчислителната геометрия е следният: *Колко точки в $\mathbb{CP}^2$ лежат както на C , така и на D ?* С други думи, трябва да се намери броят на пресечните точки на двете криви. Както отбелязахме вече, за да има отговор на този въпрос, би трябвало да очакваме множеството $C \cap D$ да е крайно. По-точно, нека $p \in C \cap D$ и $C \cap D$ е крайно множество. Да означим с $\text{mult}_p(C \cdot D)$ *пресечната кратност* (Katz, 2006) на кривите C и D в т. p . Очевидно $\text{mult}_p(C \cdot D) > 0 \Leftrightarrow p \in C \cap D$. Тогава е в сила следният изключително важен резултат в алгебричната геометрия:

Теорема 1 (Безу) Ако множеството $C \cap D$ е крайно, то $\sum_{p \in C \cap D} \text{mult}_p(C \cdot D) = cd$.

Досега разглеждахме алгебрични равнинни криви и техните точки на пресичане, но това е геометрична интерпретация на алгебричния въпрос за намирането на общите корени (заедно с техните кратности) на конкретни полиномни уравнения, които представят тези криви.

Знаем, че два полинома имат общ корен точно когато не са взаимно прости (Курош, 1971) и с помощта на алгоритъма на Евклид можем да проверяваме дали два полинома имат общ корен. Възможен е и по-общ подход, свързан с намирането на т. нар. *резултанта* на тези полиноми.

Нека $f = a_0 x^m + \dots + a_m$, $g = b_0 x^n + \dots + b_n \in \mathbb{C}[x]$, $a_0, b_0 \neq 0$ и $m, n > 0$ с корени съответно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$. Тогава можем да дадем следната

Дефиниция 1. Елемента $R(f, g) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j)$ на полето $\mathbb{C}$ ще наричаме *резултанта* на полиномите f и g .

Очевидно f и g имат общ корен точно когато $R(f, g) = 0$. Ясно е още, че $R(g, f) = (-1)^{mn} R(f, g)$. В сила е и следното

Твърдение 1. $R(f, g) = a_0^n \prod_{i=1}^m g(\alpha_i)$.

Доказателство: Като използваме равенството $g(x) = b_0 \prod_{j=1}^n (x - \beta_j)$, получаваме:

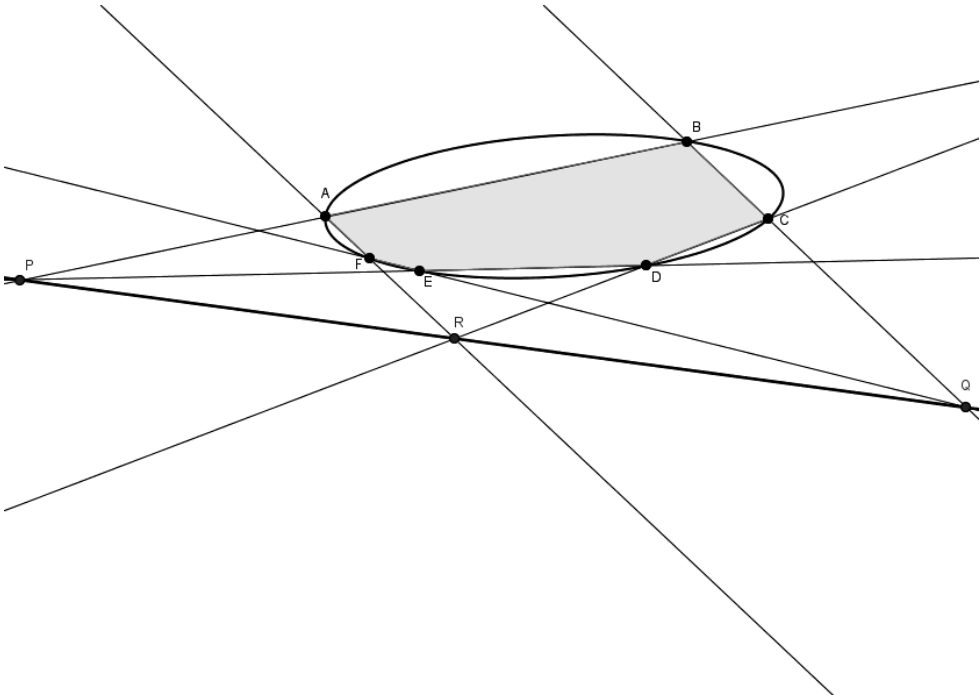
$$R(f, g) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) = a_0^n \prod_{i=1}^m \left(b_0 \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) \right) = a_0^n \prod_{i=1}^m g(\alpha_i).$$

Това твърдение показва, че $R(f, g)$ е симетричен полином с коефициенти от $\mathbb{C}$ на корените $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ на полинома f и следователно $R(f, g) \in \mathbb{C}$. Сега вече, на базата на горните резултати, можем да дадем нова формулировка на теоремата на Безу:

Теорема 1' (Безу) За всеки две проективни алгебрични криви от степен m и n , резултантата им представлява хомогенен полином от степен mn или е тъждествено равна на нула.

Теорема на Паскал – проективно-аналитичен подход. Един от красивите резултати в проективната геометрия е *теоремата на Паскал*:

Теорема 2. (Паскал) Нека $X \subset \mathbb{C}P^2$ е крива от втора степен и нека точките A, B, C, D, E и F върху кривата са върхове на вписан шестоъгълник. Тогава пресечните точки на срещуположните страни на шестоъгълника (на черт. по-долу точките $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CD \cap AF$) лежат на една права.



Фигура 1. Точките P, Q и R лежат на една права

Преди да докажем теоремата, ще направим някои забележки. Най-общо семейството от конични сечения, които минават през върховете на произволен четириъгълник $ABCD$, могат лесно да бъдат описани. Наистина, нека ℓ_{AB} е уравнението на правата AB . Тогава върховете на $ABCD$ анулират израза $\ell_{AB} \cdot \ell_{CD}$, а така също и $\ell_{BC} \cdot \ell_{AD}$. Следователно уравнението $\lambda \ell_{AB} \cdot \ell_{CD} + \mu \ell_{BC} \cdot \ell_{AD} = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ определя конично сечение, което минава през върховете на $ABCD$. По-важното е, че е в сила и обратното

Твърдение 2. Нека точките A, B, C и D са такива, че никои три от тях не лежат на една права. Тогава коничното сечение през тези точки може да бъде записано във вида

$$\lambda \ell_{AB} \cdot \ell_{CD} + \mu \ell_{BC} \cdot \ell_{AD} = 0.$$

Доказателство: Без ограничение на общността можем да предполагаме, че правите AB и AD имат уравнения във фиксирана координатна система съответно $y = 0$ и $x = 0$. Нека $f = 0$ е уравнението на коничното сечение. Ограниченията на f и $\lambda \ell_{AB} \cdot \ell_{CD} + \mu \ell_{BC} \cdot \ell_{AD} = \lambda y \cdot \ell_{CD} + \mu x \ell_{BC}$ върху произволна координатна система представляват квадратични форми с общи корени (A и B или A и D). По този начин числата $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ могат да се изберат така, че полиномът

$$P(x, y) = f(x, y) - \lambda y \cdot \ell_{CD}(x, y) - \mu x \cdot \ell_{BC}(x, y)$$

да се анулира при $x = 0$ и $y = 0$. Това означава, че $xy \mid P(x, y)$, т. е. $P(x, y) = xy \cdot Q$ и Q е константа. Но в т. C полиномът P също се анулира и тъй като $xy \neq 0$, то $Q = 0$. Следователно $f = \lambda \ell_{AB} \cdot \ell_{CD} + \mu \ell_{BC} \cdot \ell_{AD}$.

Следствие 1. Нека $f = 0$ и $g = 0$ описват две конични сечения, минаващи през върховете на четириъгълника $ABCD$. Тогава уравнението на произволно конично сечение, минаващо през тези върхове, има вида $\lambda f + \mu g = 0$ за някакви $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Доказателство: Коничните сечения, които минават през върховете на $ABCD$, образуват проективна права, която се генерира от точките, удовлетворяващи уравненията $\ell_{AB} \cdot \ell_{CD} = 0$ и $\ell_{AD} \cdot \ell_{BC} = 0$. Но тези прави са генерирани и от точките, за които $f = 0$ и $g = 0$. С това доказателството е завършено.

Доказателство на Теорема 2: Да разгледаме шестоъгълника $ABCDEF$, чиито върхове лежат върху коничното сечение с уравнение $f = 0$. Четириъгълниците $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$ са вписани в коничното сечение и следователно f може да се представи в някоя от следните форми:

$$f = \lambda_1 \ell_{AB} \cdot \ell_{CD} + \mu_1 \ell_{AD} \cdot \ell_{BC}, \quad (1)$$

$$f = \lambda_2 \ell_{AF} \cdot \ell_{ED} + \mu_2 \ell_{AD} \cdot \ell_{EF}, \quad (2)$$

$$f = \lambda_3 \ell_{BE} \cdot \ell_{CF} + \mu_3 \ell_{BC} \cdot \ell_{EF}. \quad (3)$$

След приравняване на (1) и (2), получаваме $\lambda_1 \ell_{AB} \cdot \ell_{CD} - \lambda_2 \ell_{AF} \cdot \ell_{ED} = (\mu_1 \ell_{BC} - \mu_2 \ell_{EF}) \cdot \ell_{AD}$. Нека $P = AB \cap ED$. Тогава в т. P $\ell_{AB} \cdot \ell_{CD} = 0 = \ell_{AF} \cdot \ell_{ED}$, но $\ell_{AD} \neq 0$ и следователно $\mu_1 \ell_{BC} - \mu_2 \ell_{EF} = 0$ в т. P , т. е. $P \in \{\mu_1 \ell_{BC} - \mu_2 \ell_{EF} = 0\}$. Аналогично се доказва, че $R = CD \cap AF \in \{\mu_1 \ell_{BC} - \mu_2 \ell_{EF} = 0\}$. Очевидно $Q = BC \cap EF \in \{\mu_1 \ell_{BC} - \mu_2 \ell_{EF} = 0\}$. Теоремата е доказана.

Сега да се опита да се открие малко по-нататък. Като приравним (2) и (3), получаваме, че $AF \cap BE$, $ED \cap CF$, $AD \cap BC \in \{\mu_2 \ell_{AD} - \mu_3 \ell_{BC} = 0\}$. От друга страна, ако приравним (1) и (3), ще получим, че $AB \cap CF$, $CD \cap BE$, $AD \cap EF \in \{\mu_1 \ell_{AD} - \mu_3 \ell_{EF} = 0\}$. Тогава не е трудно да се види, че правите

$$\mu_1 \ell_{BC} - \mu_2 \ell_{EF} = 0, \mu_2 \ell_{AD} - \mu_3 \ell_{BC} = 0, \mu_1 \ell_{AD} - \mu_3 \ell_{EF} = 0$$

се пресичат в обща точка. Ще дадем следната:

Дефиниция 2. Правата, която съдържа пресечните точки на двойките срещуположни страни на шестоъгълника, вписан в коничното сечение, се нарича *права на Паскал*.

На базата на заключенията по-горе можем да формулираме и следната

Теорема 3. (Щайнер) Нека точките A, B, C, D, E и F лежат върху конично сечение. Тогава правите на Паскал за шестоъгълниците $ABCDEF$, $ADEBCF$ и $ADCFEB$ се пресичат в една точка.

Ако вземем предвид факта, че четириъгълниците, които разгледахме по-горе, бяха $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$, но могат да бъдат разгледани и четириъгълниците $ABEF$, $ABDF$ и $CDEF$, то можем да формулираме и

Теорема 4. (Киркман) Правите на Паскал за шестоъгълниците $ABFDCE$, $AEFBDC$ и $ABDFEC$ се пресичат в една точка.

Не е трудно да се види още, че за всеки шестоъгълник, вписан в конично сечение, има точно $60 = \frac{(6-1)!}{2}$ прави на Паскал, като всяка права на Паскал принадлежи на една Щайнерова тройка шестоъгълници и на три Киркманови тройки.

Теорема на Паскал – алгебрично-геометричен подход. Накрая ще дадем доказателство на теоремата на Паскал, като използваме теоремата на Безу и съвременния подход на изчислителната алгебрична геометрия.

Да си разгледаме разложимите кубични криви $X_1 = AB \cup CD \cup EF$ и $X_2 = BC \cup DE \cup AF$, представени като обединение на три прави и нека техните уравнения са съответно $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Според теоремата на Безу тези кубични криви се пресичат в девет точки: A, B, C, D, E, F, P, Q и R .

Избираме си точка $S \in X \subset \mathbb{CP}^2$, която е различна от по-горе изброените. Ясно е, че съществуват числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, такива че $\lambda f_1 + \mu f_2$ се анулира в точка S . Нека с X' означим кривата в $\mathbb{CP}^2$, която се описва с уравнението $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$. Следователно X' е също кубична крива и в частност $S \in X'$. Нещо повече, X' се пресича с X в седем точки A, B, C, D, E, F и S , въпреки че $\deg X' \cdot \deg X = 6$. От теоремата на Безу следва, че X' и X трябва да имат общ компонент. Поради самите степени на кривите обаче единствената възможност за това е кубичната крива X' също да е разложима и да съдържа в себе си коничното сечение X , т. е. $X' = X \cup L$, където L е някаква права.

Накрая да забележим, че $P, Q, R \in X_1$ и X_2 . Следователно $P, Q, R \in X \cup L$, но $P, Q, R \notin X$ и следователно трябва да лежат на права L .

Това кратко и елегантно доказателство на иначе силен и недоказващ се лесно резултат от проективната геометрия, показва силата и мащабите на методите, които притежава съвременната алгебрична геометрия.

БЕЛЕЖКИ

1. Целият процес на преминаване от комплексна равнина към комплексна проективна равнина се нарича *компактификация*.
2. В този случай се казва, че $\mathbb{CP}^5$ е *модулно пространство* (moduli space) за равнинните конични сечения

ЛИТЕРАТУРА

- Gathmann, A. (2003). *Agberaic geometry: Lecture notes*, Kaiserslautern: Lecture notes.
- Katz, S. (2006). *Enumerative Geometry and String Theory*, Providence, RI: The American Mathematical Society.
- Zhelev, Zh. (2006). *From Bezout's Theorem in Enumerative Geometry to the Geometry of Conics and Pascal's Theorem in Projective Geometry*, International Scientific Conference, v. III, p. 322 – 328: Stara Zagora.
- Курош, А. Г. (1971). *Курс высшей алгебры*, Москва: Из-во „Наука“.
- Шафаревич, И. Р. (1972). *Основы алгебраической геометрии*, Москва: Из-во „Наука“.

PROJECTIVE ALGEBRAIC CURVES, CONICS AND PASCAL THEOREM

Abstract. The Pascal theorem is a key result in the classic Projective geometry of conics. The paper considers the Pascal theorem and some other facts from Projective geometry by means of the methods of the contemporary Enumerative geometry – a part of the Algebraic geometry dealing with the number of various geometric objects under different conditions in a given variety.

Zhivko Zhelev

✉ PhD, Assistant Professor
Department of Informatics & Mathematics
Faculty of Economics
Trakia University
Stara Zagora, Bulgaria
e-mail: zhelev@uni-sz.bg