

ПРИМЕР ЗА ГРЕШКИ ОТ УЧИЛИЩНАТА МАТЕМАТИКА, КОИТО ВЛИЯТ НА ПРЕДСТАВЯНЕТО НА УЧЕНИЦИТЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Надежда Аплакова

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Знанията и уменията, необходими на един ученик за успешно представяне на математически състезания, обикновено са много повече и много над нивото на училищната математика. Но училищната математика, и по-специално усъвършенстването на основните свойства, теореми, леми и помощни задачи от училище, както и кога и как да се прилагат, може да повлияе значително на представянето на математически състезания. В настоящата статия е разгледан един конкретен пример на задача, дадена на тест за определяне на национален отбор за регионално състезание, и грешките от училищната математика, които тестваните ученици допускат, без да се търсят причини или дават обяснения за тези грешки.

Ключови думи: математически състезания; училищна математика; обучение по математика

1. Увод

Постановката, разглеждана в настоящата статия, е следната: държава, която няма опит и традиции с математически състезания, избира отбор за участие в математическо състезание, в което участват няколко държави от региона, почти всички от които нямат опит и традиции с математически състезания. Състезанието се състои от четири задачи, условно категоризирани като „Алгебра“, „Геометрия“, „Комбинаторика“ и „Теория на числата а нивото на трудност на задачите е съпоставимо с това от Група В на сборника на Коста Коларов (Kolarov, 2009). Авторът на статията участва в подготовката на теста за определяне на отбора, проверката на писмените работи, определянето на разширен отбор и неговата подготовка и определянето на финалния отбор.

Тестът за определяне на разширения отбор се състои от 8 задачи – по две от всяка категория, условно разделени на „лесна“ и „трудна“. В настоящата статия е включена „лесната“ задача по алгебра и са разгледани грешките от училищната математика, които учениците са допуснали на нея.

2. Контекст

Тестваните ученици са от над 30 училища, избрани по няколко най-добри¹ от училище. Те са представители на два от четирите образователни профила в държавата, условно наречени Профил 1 и Профил 2 от списъка по-долу:

- Профил 1: Природо-математически – подобно на математическите гимназии в България, приемът на ученици в този профил започва от 5. клас, като учениците изучават интензивно математика и природни науки, преподавани на английски език (който не е роден език на учениците), а в 11. и 12. клас най-добрите биват избирани и полагат изпити Advanced Placement на College Board по предметите, по които са се представили на необходимото ниво. Тъй като този профил е нов, към момента на провеждане на теста за определяне на отбора най-големите ученици от този профил са в 11. клас.
Учениците биват разпределени в Профил 2, Профил 3 и Профил 4 след завършване на 8. клас.
- Профил 2: „Напреднал“ – учениците отново изучават интензивно математика и природни науки, но не се подготвят за външни изпити. В някои училища тези предмети се преподават на английски език, а в други – на родния език на учениците.
- Профил 3: Общобразователен – математиката не е профилиращ предмет и ученици от този профил не са тествани.
- Профил 4: Професионален/Приложен – математиката не е профилиращ предмет и ученици от този профил не са тествани.

3. Целева група

Таблицата по-долу представя разпределението на учениците от целевата група според техния клас, профил и пол. Както е споменато по-горе, най-големите ученици от Профил 1 към момента на провеждане на теста са в 11. клас. Ученици от 11. клас от Профил 1 не са взели участие, без на автора да е известно защо това е така. От Профил 2 участие са взели само ученици от 11. и 12. клас, като на автора не е известно защо ученици от 9. и 10. клас от Профил 2 не са участвали. Разпреде-

ление по училища и/или градове/географски райони не е разглеждано, тъй като от всяко училище има твърде малък брой ученици.

Таблица 1. Разпределение на учениците от групата по клас, профил и пол

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	29	26	10	24	89
Момчета	17	13	7	13	50
ОБЩО	46	39	17	37	139

4. Разглеждана задача и критерии за оценяване

Задачата, разглеждана в тази статия, във вида, в който е представена на учениците, е следната:

$$\textit{Factorize fully } (a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Задачата може да бъде решена най-лесно чрез използване на формулата за разлика на кубове или чрез използване на формулата за куб на сбор, като крайният отговор е $3(a + b)(b + c)(c + a)$. До същия отговор се достига и при разкриване на скобите и подходящо групиране на едночлените в получения многочлен.

Задачата носи 3 точки, разпределени по следния начин:

- 1 точка за използване на правилна формула за куб на сбор или за разлика на кубове
или
- 1 точка за правилно разкриване на скобите и опростяване на получения полином,
- 1 точка за един от множителите $(a + b)$, $(b + c)$ или $(c + a)$,
- 1 точка за краен отговор.

5. Изучаваното в училище

Учебниците, по които се преподава на учениците, са от серията Glencoe на McGraw-Hill Education, адаптирана за конкретната държава, като главите/разделите, които имат пряко отношение към разглежданата задача, са следните.

- Главата „Степени и корени“² запознава учениците с концепцията за степен, а именно, че $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Разглежданите примери не се ограничават до едночлени, а включват и записване на двучлен чрез използване на степен и като произведение на повтарящи се

множители-двучлени, както и пресмятане на стойността на изрази, включващи степени, за конкретни стойности на участващите променливи. Тази глава е изучавана от всички ученици от групата преди явяването им на теста за определяне на отбор – в прогимназиалния курс на обучение.

- Главата „Алгебрични изрази“³ запознава учениците с разпределителното свойство, приложено за изрази от вида $a(b \pm c)$, включително в случаи, когато a е отрицателно число или единствено знак „–“ пред скобите. Разглеждат се също сбор и разлика на два израза от горния вид. За пълнота е необходимо да се отбележи, че разглежданите изрази на този етап включват едночлени и двучлени, но не и тричлени, както и че разглежданите изрази са линейни относно всяка от участващите в тях променливи. Тази глава също е изучавана от всички ученици от групата – в прогимназиалния курс на обучение.
- Главата „Квадратни изрази и уравнения“⁴ разглежда умножението на двучлен с двучлен чрез използване на „вертикален метод“, „хоризонтален метод“ и чрез така наречения „FOIL метод“ (First – Outer – Inner – Last), както и умножението на многочлен с многочлен чрез прилагане на разпределителното свойство. Примерите включват умножение на тричлен с тричлен, както и умножение на три и четири многочлена. Тази глава е изучавана от учениците от 10., 11. и 12. клас от групата. Учениците от Профил 1 я изучават в 9. клас, но след датата на провеждане на теста и съответно участващите ученици от 9. клас не са я изучавали към момента на провеждане на теста⁵.
- Главата „Полиноми и полиномиални функции“⁶ освен обобщение и разширение на изброеното по-горе включва още формулите за сбор и разлика на кубове. Тази глава е изучавана от всички ученици от Профил 2 преди явяването им на теста. Учениците от Профил 1 я изучават в 10. клас след датата на провеждане на теста и затова те, както и учениците от 9. клас от Профил 1 не са я изучавали към момента на провеждане на теста.
- Главата „Редици и редове“⁷ включва урок за триъгълник на Паскал и Нютонов бином, чрез които учениците биха могли правилно да разкрият скоби от вида $(x + c)^3$. Тази глава е изучавана единствено от учениците от 12. клас от Профил 2 към датата на провеждането на теста.

С оглед на представеното по-горе би следвало всички ученици от 10.,

11. и 12. клас да могат да получат поне 1 точка, а учениците от 9. клас поне да могат да препишат правилно дадения израз като

$$(a + b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3.$$

Тъй като представеното по-горе се фокусира върху правилно разпознаване на израза и разкриване на скобите, е важно да се отбележи, че във всяка от гореизброените глави е включен и обратният тип задачи – разлагане. Тези задачи използват знанията и уменията, натрупани от учениците до този момент, а нивото им е осезаемо по-ниско от нивото на представената задача.

Следващите секции представят разглежданите грешки и разпределението на учениците (по брой и процент) от групата, допуснали тези грешки. Представено е също така разпределение на учениците, които правилно са разкрили скобите и са опростили израза.

6. Разглеждани грешки и общи тенденции

Грешките и тенденциите, разглеждани в настоящата статия, са следните.

- Грешка 1: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$.
- Грешка 2: $-(a^3 + b^3 + c^3) = -a^3 + b^3 + c^3$.
- Грешка 3: $a^3 + b^3 + c^3 - a^3 - b^3 - c^3 \neq 0$, в частния случай $a^3 - a^3 \neq 0$ или вариации.
- Разкриване на скобите и опростяване на израза.
- Други грешки (с примери и коментари).

7. Празен лист

Преди всяка от гореизброените грешки и общи тенденции да бъде разгледана, е нужно да се отбележи броят на учениците, предали празен лист на тази задача. Това е направено в таблицата по-долу.

Таблица 2. Ученици от групата, предали празен лист

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	2	1	0	0	3
Момчета	3	1	0	2	6
ОБЩО	5	2	0	2	9

Следващата таблица представя разпределението на учениците от групата, които **не** са предали празен лист на тази задача.

Таблица 3. Ученици от групата, които **не** са предали празен лист

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	27	25	10	24	86
Момчета	14	12	7	11	44
ОБЩО	41	37	17	35	130

8. Грешка 1: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$

При допускане на тази грешка учениците преписват дадения израз като $a^3 + b^3 + c^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$ или $(a + b + c)^3 - (a + b + c)^3$. Когато не е комбинирана с Грешка 2, полученият отговор обикновено е 0.

Таблицата по-долу представя броя и процента на учениците от групата, допуснали Грешка 1, като процентът е изчислен на база учениците от съответната категория.

Например: 13 от 27 момичета от 9. клас на Профил 1 са допуснали Грешка 1 и $13 \approx 48\% \cdot 27$.

Таблица 4. Ученици от групата, допуснали Грешка 1

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	13 (48%)	19 (76%)	6 (60%)	9 (38%)	47 (55%)
Момчета	6 (43%)	9 (75%)	4 (57%)	5 (45%)	24 (55%)
ОБЩО	19 (46%)	28 (76%)	10 (59%)	14 (40%)	71 (55%)

Следващата таблица представя броя и процента на учениците от групата, допуснали единствено Грешка 1 (и получили отговор 0).

Таблица 5. Ученици от групата, допуснали единствено Грешка 1

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	5 (19%)	8 (32%)	1 (10%)	7 (29%)	21 (24%)
Момчета	2 (14%)	4 (33%)	0 (0%)	4 (36%)	10 (23%)
ОБЩО	7 (17%)	12 (32%)	1 (6%)	11 (31%)	31 (24%)

9. Грешка 2: $-(a^3 + b^3 + c^3) = -a^3 + b^3 + c^3$

Допускането на тази грешка е резултат или на неправилни математически означения, или на неправилно прилагане на разпределителното свойство. Тъй като невинаги е ясно каква е причината за допускане на Грешка 2, двете причини не са разгледани поотделно. Таблицата по-долу представя броя и процента на учениците от групата, допуснали

Грешка 2, като процентите отново са изчислени на база учениците от съответната категория.

Таблица 6. Ученици от групата, допуснали Грешка 2

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	7 (26%)	2 (48%)	3 (30%)	1 (4%)	13 (15%)
Момчета	2 (14%)	4 (33%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (14%)
ОБЩО	9 (22%)	6 (16%)	3 (18%)	1 (3%)	19 (15%)

10. Грешка 3: $a^3 - a^3 = a^6$?

Грешка 3 обхваща всички грешки, при които резултатът от $a^3 - a^3$ (или сходен израз) не е 0. Тези грешки почти винаги се получават след допускане на Грешка 1, а в някои случаи и след допускане на Грешка 1 и Грешка 2, като тогава грешката е от типа $b^3 + b^3 = b^6$. Тъй като тази грешка не се допуска на първа стъпка, учениците работят с различни изрази, които се опитват да опростят. Списъкът на получените отговори включва:

- $a^3 - a^3 = a^6$,
- $a - a \cdot a \cdot a = -a^2$,
- $a^3 + b^3 + c^3 - a^3 + b^3 + c^3 = b^6 + c^6$,
- $a^3 + b^3 + c^3 + a^3 + b^3 + c^3 = 3a^3 + 3b^3 + 3c^3$, последвано от $3(a^3 + b^3 + c^3) - (a^3 + b^3 + c^3) = 3$,
- $a^3 - a^3 = a^2 + 2a^6 - a^6 = 2a^6$,
- $a^2 - a^3 = a^{-1}$,
- $b^2 + b^3 = b^5$,
- $a^3 - a^3 = a^0 = 1$,
- $a^3 + b^3 + c^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = a + b + c$,
- $b^3 + c^3 + b^3 + c^3 = bc(b^2 + c^2) = bc((b^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2)^2) = bc(2b^6c^6)$,
- $a^3 + b^3 + c^3 - a^3 + b^3 + c^3 = 2b^6 + 2c^6$,
- $(a + b + c)^3 - (a + b + c)^3 = ((a + b + c)^3)^2 = (a + b + c)^6$,
- $a^3 + b^3 + c^3 - a^3 + b^3 + c^3 = a - b - c$,
- $a^3 - a^3 = (a - a)^6$ (което не е опростено след това).

Разпределението на грешките от тип Грешка 3 по брой и процент сред учениците от групата е представено в таблицата по-долу.

Таблица 7. Ученици от групата, допуснали Грешка 3

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	4 (15%)	3 (12%)	7 (70%)	2 (8%)	16 (19%)
Момчета	0 (0%)	1 (8%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (2%)
ОБЩО	4 (10%)	4 (11%)	7 (41%)	2 (6%)	17 (13%)

11. Разкриване на скобите и опростяване

Част от учениците правилно разпознават, че $(a + b + c)^3$ е равно на $(a + b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c)$, правилно разкриват скобите и съкращават a^3 , b^3 и c^3 . В някои случаи полученият израз не е опростен, а в други случаи е допусната грешка при опростяването, например липсващ едночлен или погрешно събиране на едночлени и резултат $2a^2b + 4ab^2$ вместо $3a^2b + 3ab^2$. Тъй като тези случаи са твърде малко, те не са разглеждани поотделно. Малък брой ученици се опитват да разложат получения израз, но неуспешно. Тук е редно да се напомни, че английският език (езикът на провеждане на теста) не е роден език на учениците, а за някои от учениците не е и езикът на преподаване на математика, т.е. не е ясно дали ученици, които са разкрили скобите и са опростили израза, са разбрали правилно условието на задачата „factorize fully“ (да се разложи), или са го възприели като „simplify“ (да се опрости).

Таблица 8. Ученици от групата, правилно разкрили скобите

	Профил 1		Профил 2		ОБЩО
	9. клас	10. клас	11. клас	12. клас	
Момичета	7 (26%)	3 (12%)	1 (10%)	13 (54%)	24 (28%)
Момчета	5 (36%)	1 (8%)	0 (0%)	3 (27%)	9 (20%)
ОБЩО	12 (29%)	4 (11%)	1 (6%)	16 (46%)	33 (25%)

Таблица 8 представя броя и процента на учениците от групата, които правилно са разкрили скобите (без значение дали полученият израз е опростен и без да се взимат под внимание грешки, най-вероятно допуснати от невнимание, при опростяването).

12. Други грешки

Примери за други грешки включват неправилно разкриване на скобите $(a + b + c)^3$ като например $a^2 + 3ab + b^2 + 3bc + c^2$, при които все пак има опит за прилагане на някаква формула (в конкретния случай това напомня на формулата за $(a + b)^2$).

Различен опит за решение предлагат четирима ученици, три момичета и едно момче, от 11. клас от три различни училища. При всеки ученик има известни разлики от останалите, но всички те имат еднаква идея и „преобразуват“ дадения израз до

$$\sqrt[3]{(a + b + c)^3} - \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3},$$

последвано от съкращаване на трета степен и корен трети (и при двата радикала).

13. Заключение

От гледна точка на разпределение на представянето по пол прави впечатление, че Грешка 1 (Грешка 1, като цяло, но също така и „единствено“ Грешка 1) и Грешка 2 са допуснати еднакво и при момчетата, и при момчетата. Също така учениците, които са разкрили правилно скобите, са сравнително равномерно разпределени между момчетата и момчетата, като техният процент е малко по-висок при момчетата. За разлика от тях Грешка 3 е допусната почти изцяло само от момичета (16 момичета и 1 момче).

От гледна точка на разпределение на представянето по клас, е изненадващо, че по-малък процент ученици от 9. клас са допуснали Грешка 1 в сравнение с процента ученици от 10. и дори от 11. клас, допуснали тази грешка. Очаквано този процент е най-нисък при учениците от 12. клас, но разликата между 9. и 12. клас е доста малка. При Грешка 2 процентът ученици от 9. клас е най-висок, следван от почти равни проценти в 10. и 11. клас и едва 3% (само един ученик) в 12. клас. Както и по-горе, Грешка 3 отново се откроява: почти половината от учениците в 11. клас са допуснали тази грешка, докато от останалите класове едва 6% до 11% са допуснали Грешка 3. Най-висок процент ученици от 12. клас са разкрили правилно скобите – 46% от учениците в 12. клас, следвани от 29% от тези в 9. клас и едва 11% и 6% (един ученик) от 10. и 11. клас съответно. Тук следва да бъдат отбелязани и четиримата ученици от 11. клас, представили решение чрез използване на корен трети. Те представляват 24% от всички тествани ученици от 11. клас.

От гледна точка на разпределение на представянето по профил е добре да се отбележи, че 7 от 9 ученици, предали празен лист, са от Про-

фил 1. Тъй като в теста не са участвали ученици от 11. клас от Профил 1 и от 9. и 10. клас от Профил 2, разпределението на грешките, допуснати според профила на ученика, е сходно с това на грешките по клас.

Целта на настоящата работа е да представи пример за грешките (или типовете грешки) от училищната математика, които оказват влияние на представянето на учениците на математически състезания. Това е направено в предходните секции и обобщено в заключението. Целта не е да се търсят причини или обяснения за допускането на тези грешки. Но когато се търсят причините за конкретните грешки или за представянето на учениците като цяло, следва да бъдат зададени много въпроси, които са естествено следствие на представените резултати и включват, но не се ограничават до следните.

- На какъв принцип или по какъв критерий са избрани училищата, които да участват в теста? Защо не са участвали други училища или повече (дори всички) училища?
- На какъв принцип са избрани учениците от всяко училище? Учителите (или длъжностните лица), отговорни за избора на ученици, знаели ли са за какво състезание става въпрос от гледна точка на формат, материал, ниво на трудност на задачите и дори продължителност на самото състезание?
- Процесът, следван при приемането на ученик в Профил 1 или Профил 2, ефективен ли е и правилно ли разпределя учениците? Може ли да бъде променен или подобрен? Може ли нещо да бъде променено или подобро в самите образователни профили?
- До каква степен владенето или недоброто владение на английски език оказва влияние? Може ли нещо да бъде променено в преподаването и изучаването на английски език, така че да се подобри представянето по математика (и по други предмети)?
- Използваните учебници предоставят ли задачи, изискващи по-дълбочено разбиране на материала, и възможности за осъществяване на връзки между отделните глави? До каква степен затвърждават и не позволяват забравяне на вече изучен материал?
- Как се осъществява наблюдение/инспектиране на учителите и как се гарантира качеството на тяхното преподаване от гледна точка на коректност и яснота, но също така методи на преподаване, чрез които да се осигурят дълготрайни знания и умения?
- Избраните ученици изявили ли са желание да участват, или са участвали, защото са били избрани? Доколко мотивирани са били учениците и доколко сериозно са погледнали на теста и изобщо на предстоящото състезание?

БЕЛЕЖКИ

1. Важно е да се отбележи, че на автора не е известно по какви критерии всяко училище е избирало кои ученици да участват като най-добри, както и от кои училища да са те.
2. Главата „Степени и корени“ (Powers and Roots) е част от Glencoe Math Accelerated: A Pre-Algebra Program, 2017, <https://mheducation.com/prek-12/program/glencoe-math-accelerated-pre-algebra-program-2017/MKTSP-GIP18M0.html>.
3. Главата „Алгебрични изрази“ (Algebraic Expressions) също е част от Glencoe Math Accelerated: A Pre-Algebra Program, 2017.
4. Главата „Квадратни изрази и уравнения“ (Quadratic Expressions and Equations) е част от Glencoe Algebra 1, 2014, <https://mheducation.com/prek-12/program/glencoe-algebra-1-2014/MKTSP-GJP23M0.html>.
5. Когато става въпрос за глава от текущия клас на ученик, която не е изучавана в училище към датата на провеждане на теста, следва да се отбележи, че е възможно да има ученици, които самостоятелно са решавали напред материал от учебника, но това няма как да бъде проследено и проверено.
6. Главата „Полиноми и полиномиални функции“ (Polynomials and Polynomial Functions) е част от Glencoe Algebra 2, 2014, <https://mheducation.com/prek-12/program/glencoe-algebra-2-2014/MKTSP-GJQ21M0.html>.
7. Главата „Редици и редове“ (Sequences and Series) е част от Glencoe Precalculus, 2014, <https://mheducation.com/prek-12/program/glencoe-prec calculus-2014/MKTSP-GBJ12M0.html>.

ЛИТЕРАТУРА

КОЛАРОВ, К., ПЕТКОВ, П., АРНАУДОВ, П., АРНАУДОВА, Л., ПЕТКОВА, М. (2009). *Сборник задачи по алгебра 7.-12. клас*. Добрич: Интеграл, петнадесето стереотипно издание.

REFERENCES

KOLAROV, K., PETKOV, P., ARNAUDOV, P., ARNAUDOVA, L., PETKOVA, M. (2009). *Sbornik zadachi po algebra 7.-12. klas*. Dobrich Integral, fifteenth stereotypical edition.

MISTAKES FROM THE SCHOOL MATHEMATICS THAT IMPACT STUDENTS' PERFORMANCE IN MATHEMATICS COMPETITIONS: AN EXAMPLE

Abstract. The knowledge and skills a student needs in order to perform well on mathematics competitions are usually more and at a higher level compared to school mathematics. But school mathematics, and particularly perfecting the main properties, theorems, lemmas and postulates from the school curriculum, as well as when and how to apply them, can significantly impact the students' performance on mathematics competitions. This paper discusses a specific example of a problem given on a team selection test for selecting a national team for a regional competition, and the mistakes from the school mathematics which the tested students made, without looking for reasons or explanations of these mistakes.

Keywords: mathematics competitions; school mathematics; mathematics education

✉ **Nadezhda Aplakova**

Sofia University

Faculty of Mathematics and Informatics

5, James Bourchier Blvd

1164 Sofia, Bulgaria

E-mail: aplakova@uni-sofia.bg