

ПРИЛАГАНЕ НА АЛГОРИТЪМА НА ГЕЙЛ-ШАПЛИ ПРИ ФОРМИРАНЕ НА ПРИЕМА В СРЕДНИТЕ И ВИСШИТЕ УЧЕБНИ ЗАВЕДЕНИЯ

Николай Качармазов

Резюме. Развитието на количествените методи през последните години и прилагането им в икономическата и социалната сфера бе мотивирано от проблема за преразпределителните процеси в различните области на обществените дейности. Постигането на оптималното (балансирано) състояние на това разпределение бе поставено като основна цел в емпиричните и теоретичните изследвания на икономистите от края на миналия и началото на настоящия век. Естествено, понятието разпределение (преразпределение) в никакъв случай не трябва да бъде разбирано като контрапункт на класическите принципи на свършената конкуренция, които не предполагат монопол или държавна намеса в стопанските процеси, но тези модерни прийоми бяха прилагани от социални и етични подбуди. В области като разпределянето на донорски органи между нуждаещите се реципиенти или разпределението на местата в учебните заведения не може да се бори с традиционните ценови системи и това поражда нуждата от институционална намеса, която да регулира тези процеси, защото подобни „тънки“ (с ограничен брой контрагенти от двете страни) пазари изискват регулаторни режими поне на определени нива.

Настоящата статия описва прилагането на подобни разпределителни алгоритми, техните предимства и слабости и съпоставката между тях. Разгледано е практическото прилагане на алгоритъма на Гейл-Шапли и т. нар. Унгарски алгоритъм (Кьониг-Егервари алгоритъм) с техните силни и слаби страни. Изложени са и основни моменти от кооперативната теория на игрите. Теоретично обосновани са двата практически използвани алгоритъма.

Keywords: Gale-Shapley algorithm, Hungarian algorithm, cooperative games, stable matching, mathematical model

През 1962 г. математиците Дейвид Гейл и Лойд Шапли в съвместната си статия „Постъпването в колеж и стабилността на брака“ представят решение на математическа задача от областта на кооперативните игри. Там двамата учени изработват алгоритъм, който винаги води до образуването на стабилни двойки. Този алгоритъм получава в научната литература названието „алгоритъм с отложено приемане“ или алгоритъм на Гейл-Шапли.

Алгоритъмът с отложено приемане е автономен процес, който се състои от етапите: изготвяне и представяне на предложение, кандидатстване, приемане или отхвърляне на кандидата. Всеки кандидат ранжира предпочитанията си по низходящ ред. Той подрежда желанията си по желан от него начин, като най-желаната от него позиция се поставя на първо място, а по-слабо интересуващите го позиции се поставят на по-ниски рангове в изготвения от него списък. На тази основа институцията, която селектира кандидатите, създава един въображаем пазар, за който не важат принципите, действащи на класическите пазари, т.е. механизмът на функциониране е различен. Алгоритъмът на Гейл-Шапли провокира игра със синхронизирани ходове на играчите, в която всеки участник заявява реда на желаните от него позиции, като се приема, че всеки от играчите има информация за методиката, по която въпросният алгоритъм съчетава отправените оферти със заявените интереси на играчите спрямо конкретните предложения. По този начин се формират числови редове, подчинени на определен тип разпределение. Често пъти подобни числови модели се проиграват чрез компютърни симулации. Някои от параметрите на модела могат да бъдат променяни предварително или в хода на самата симулация и получените резултати се подлагат на по-нататъшен анализ. Целта е да се построи максимално правдоподобен модел, описващ конкретната ситуация, който модел да генерира оптимално решение, което да удовлетвори всички участници в играта, т.е. всеки да е доволен от отправеното му предложение, а отправеният предложението да е съвместим с респондента, който го приема.

Този алгоритъм може да бъде практически приложен при определяне на приема в училища, колежи и университети. Важно е да се отбележи, че подреждането на приоритетите на кандидатите (кандидат-гимназисти или кандидат-студенти) трябва да е подчинено на обективни критерии и възможности, а не на субективни такива. Обективността при избора и от двете страни изисква те да не се разглеждат като стратегически субекти (всеки да е с цел да надхитри или победи другия на базата на собствените си преимущества), а да се разглеждат като равноправни партньори, всеки от които има какво да предложи на другия и ползата да е съвместна и за двамата. Създадените по този алгоритъм стабилни съчетания предполагат устойчивост и жизненост на системите, които са формирани от единици, свързани по този начин – преодолява се вътрешната ентропия и балансът и осигурен.

Пример за нестабилно съчетание е т. нар. „Бостънски механизъм“. „Този алгоритъм най-напред се опитва да съчетае колкото се може повече кандидати с първия им избор, след това той съчетава останалите с втория им избор и т.н., ако за даден кандидат е много трудно да влезе в най-пред-

почитаното си училище, при този механизъм е по-добре като първи избор да се определи по-малко популярно училище. Това поставя кандидатите в неприятно стратегическо положение – да изиграят системата по оптимален начин, те трябва да знаят в кои училища приемът е реалистичен за тях. Онези, които просто съобщават истинските си предпочитания, имат необосновано ниски резултати¹⁾.“ (2006) През 2005 г. се въвежда алгоритъм с отложено приемане с предложение от кандидата. Тъй като той е съвместим със стимулите на кандидата, отпада необходимостта от стратегическо поведение.

В САЩ например за стабилното съчетаване на кандидатите се използват специализирани инструменти – т. нар. клирингови къщи, които имат за цел да оптимизират процесите на съчетаване.

В България процесите на реформиране в образователната сфера протекла с известно закъснение, което наложи по-друг подход в регулирането на процесите. Решение 454 от 02.07.2010 г. формулира децентрализацията (в случая в образователната сфера) като „процес на прехвърляне на правомощия и ресурси за тяхното упражняване от по-високо към по-ниски равнища на публичното управление“.²⁾

В конкретния случай е удачно да се приложат две форми на децентрализация:

- функционална – признават се правомощия, които са специфични и ограничени в определен сектор или дейност. Най-често това се свързва с предоставяне на определена услуга на дадено изпълнително звено, което има свой юридически статут и собственост, например изпълнителна агенция, дружество или фирма;

- териториална – при нея правото за вземане на решение се предоставя на единици, чиято юрисдикция и сфера на действие е определена по териториален принцип, зона и местоположение и чиито правомощия са предначертани от централната власт.³⁾

Теоретична обосновка на кооперативните игри и алгоритъма на Гейл-Шапли

Най-общата дефиниция за кооперативните игри е „кооперативните игри са игри, при които играчите могат да образуват коалиция и да се договарят при избора на стратегии. Те избират своите стратегии върху основата на съглашение, при което се отчитат интересите на страните, участващи в него. Играчите се договарят както за своите стратегии, така и за разпределението на печалбата“ (Стойков, 2005).

В нашата ситуация при формиралата се коалиция между играчите в групата те използват принципа на „смесена стратегия“, т.е. стратегия,

при която „чистите стратегии се изпълняват в някакъв вероятностен порядък с елемент на случайност. Без да правим обстойно обяснение на теорията на игрите, могат да се изведат математически следните зависимости:

Всяка крайна игра има цена, а цената е ограничена от долната и горната цена на играта, т.е. $\delta \leq M \leq \gamma$ където δ – долна цена на играта, γ – горна цена на играта, M – цена на играта.

Ако имаме двама играчи X и Y , то налице е игра от типа **zxh**, в която играч X има z стратегии, а играч Y има h стратегии. Съответно обозначаваме първия играч с $X_1, X_2, \dots, X_z$, а втория играч – с $Y_1, Y_2, \dots, Y_h$.

В случая изразът $S_X = \{F_1, F_2, \dots, F_z\}$ е смесената стратегия на играч X , която той прилага с вероятност (честота) F . При което $F_1 + F_2 + \dots + F_z = 1$.

Съответно за играч Y получаваме $S_Y = \{F_1, F_2, \dots, F_h\} \Rightarrow F_1 + F_2 + \dots + F_h = 1$

Формулировка на алгоритъма на Гейл-Шапли, адаптирана към решаването на конкретната задача

Дадени са две съвкупности SC (school) и ST (student) и всеки елемент от множество SC има определено предпочитание към елемент от множеството ST . Тоест в случая можем да говорим какъв брой елементи от съвкупността SC за определен елемент от съвкупността ST се явяват по-предпочитани, а кои се ползват с по-слаби предпочитания. Аналогично заключение можем да изведем и за предпочитанията на дадени единици от множество SC към единиците от множество ST . Смисълът на задачата се свежда до фрагментирането (съчетаването) на единиците от двете множества по двойки, но не само като механично съчетаване, а и като съчетаване със стабилен характер. Стабилността – обобщено понятие от теорията на игрите, което в конкретния случай означава, че отсъстват двойки (ST', SC') и (ST'', SC'') , притежаващи такива свойства: за ST' елемент SC'' се явява по-предпочитан пред SC' , а за SC'' ST'' е по-предпочитан пред ST' .

Алгоритъмът приема следното решение:

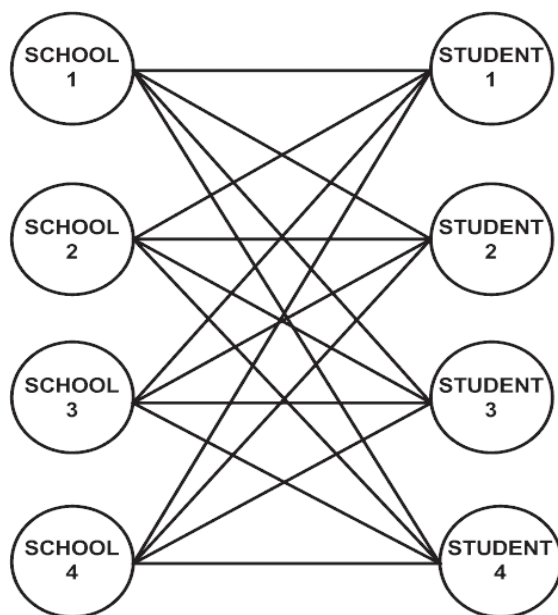
- учениците кандидатстват за най-предпочитаното училище;
- всяко училище избира измежду всеки кандидат най-добрия по определен критерий и му дава отговор „може би“, а на останалите дава категоричен отговор „не“;
- учениците, получили отказ, кандидатстват за поредното в предпочитанията си училище, учениците, получили отговор „може би“, не кандидатстват за поредното училище от списъка си;
- ако конкретно училище класира по-качествен кандидат от набраните до момента, то на последния, който е получил отговор „може би“, се

дава категоричен отговор „не“, а на новокласирания кандидат се отговаря „може би“;

– итерациите се повтарят, докато у всички ученици не се изчерпи списъкът с ранжирани учебни заведения, в този момент училищата дават отговор „категорично да“ на последните класирани по техните изисквания кандидати, които до момента получават отговор „може би“.

Приема се, че е налице мрежа от 4 училища и 4 ученици, всеки със своите предпочитания.

Графично гореописаният алгоритъм може да се представи така:



Фигура 1. Вероятни стабилни съчетания
между двойките от съвкупности
„SC“ и „ST“

Компютърен модел на математическата задача, в която е използван „алгоритъм с отложено приемане“

Компютърният модел⁴⁾ на задачата, разработен в среда за математическо моделиране и програмиране, има вида: вж. фиг. 2

```

Lingo Model - MODEL

SETS:
STUDENT:ST;
SCHOOL:SC;
STXSC (STUDENT, SCHOOL) : STPREF, SCPREF, Y, RST, RSC;
ENDSETS
DATA:
STUDENT= STUDENT1 STUDENT2 STUDENT3 STUDENT4;
SCHOOL= SCHOOL1 SCHOOL2 SCHOOL3 SCHOOL4;

STPREF= 1 2 3 4 !STUDENT1;
        1 2 3 4 !STUDENT2;
        3 1 2 4 !STUDENT3;
        2 3 1 4; !STUDENT4;

SCPREF =
        3 2 1 3 !STUDENT1;
        4 3 2 4 !STUDENT2;
        1 4 3 2 !STUDENT3;
        2 1 4 1; !STUDENT4;
ENDDATA

@FOR (STUDENT (i) :
@SUM (SCHOOL (j) : Y (i, j)) = 1;
);

@FOR (SCHOOL (j) :
@SUM (STUDENT (i) : Y (i, j)) = 1;
);

@FOR (STXSC (i, j) :
@BIN (Y (i, j))
);

@FOR (STXSC (i, j) :
Y (i, j)
+@SUM (SCHOOL (k) : STPREF (i, k) #LT# STPREF (i, j) : Y (i, k))
+@SUM (STUDENT (k) : SCPREF (k, j) #LT# SCPREF (i, j) : Y (k, j))
>= 1
);

@FOR (STUDENT (i) :
ST (i) = @SUM (SCHOOL (k) : STPREF (i, k) * Y (i, k));
PWORST > ST (i);
);
@FOR (SCHOOL (j) :
SC (j) = @SUM (STUDENT (k) : SCPREF (k, j) * Y (k, j));
PWORST >= SC (j);
);
MIN = PWORST;

```

Фигура 2. Компютърен математически модел на задачата

В първата матрица в задачата предпочитанията на учениците са зададени по редове, а на училищата – по колони. Във втората матрица по колони са предпочитанията на училищата, а на учениците са по редове.

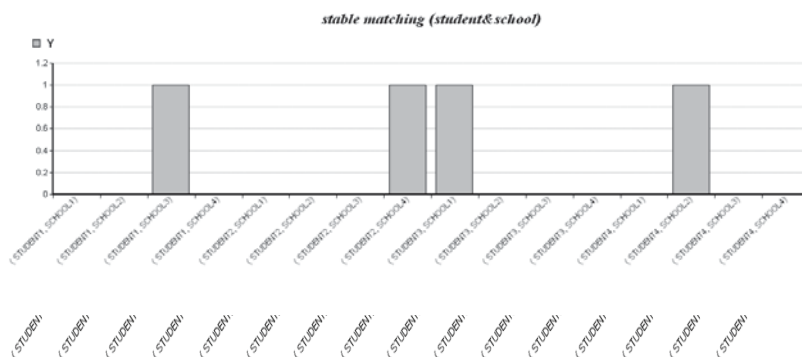
След решаването на зададения модел получаваме следните данни: вж. фиг. 3

Solution Report - MODEL			
Global optimal solution found.			
Objective value:		4.000000	
Objective bound:		4.000000	
Infeasibilities:		0.000000	
Extended solver steps:		0	
Total solver iterations:		0	
Elapsed runtime seconds:		0.07	
	Variable	Value	Reduced Cost
Y(	STUDENT1, SCHOOL1)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT1, SCHOOL2)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT1, SCHOOL3)	1.000000	0.000000
Y(	STUDENT1, SCHOOL4)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT2, SCHOOL1)	0.000000	1.000000
Y(	STUDENT2, SCHOOL2)	0.000000	2.000000
Y(	STUDENT2, SCHOOL3)	0.000000	3.000000
Y(	STUDENT2, SCHOOL4)	1.000000	4.000000
Y(	STUDENT3, SCHOOL1)	1.000000	0.000000
Y(	STUDENT3, SCHOOL2)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT3, SCHOOL3)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT3, SCHOOL4)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT4, SCHOOL1)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT4, SCHOOL2)	1.000000	0.000000
Y(	STUDENT4, SCHOOL3)	0.000000	0.000000
Y(	STUDENT4, SCHOOL4)	0.000000	0.000000

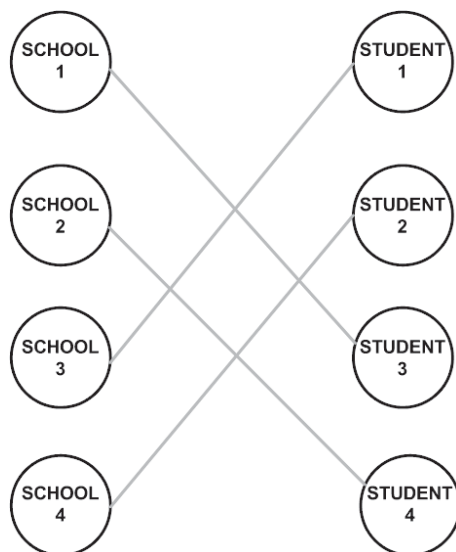
Фигура 3. Решение на модела

От решението е видно, че стабилно свързани са следните двойки ученик – училище: STUDENT1, SCHOOL3; STUDENT2, SCHOOL4; STUDENT3, SCHOOL1 и STUDENT4, SCHOOL2 и съответно техните стойности са 1. За нестабилно съчетаните двойки стойностите са 0.

Решението притежава и графично измерение: вж. фиг. 4 и фиг. 5



Фигура 4. Графично представяне на решението



Фигура 5. Стабилно съчетаване по двойки

Критерии за подбор

Критериите за подбор от страна на кандидат-гимназистите (кандидат-студентите) или от страна на училищата (университетите) могат да бъдат от различен характер в зависимост от целите, които си поставят отделните субекти.

От страна на кандидат-гимназиста критериите могат да бъдат:

1. Престижността на избраната професионална гимназия (СОУ) и перспективите за работа по специалността и стабилни доходи след дипломирането. Отговаря ли профилът на съответната професионална гимназия (СОУ) на отрасловата специализация на региона, в който живее кандидат-гимназистът.

2. Дали е налична приемственост между средното професионално образование и висшето. Продължаване на образованието по аналогична специалност във ВУЗ и надграждане върху получените вече знания.

3. Дали съответното училище се намира във или в близост до населеното място, където живее кандидат-гимназистът. Приема ли той за целесъобразно и рентабилно да учи в отдалечено селище, където се намира набелязаното от него училище.

От страна на кандидат-студента критериите могат да бъдат:

1. Престижът на избрания ВУЗ – дали той попада в челните места на националните и международните класации на университетите.

2. Дали учебните програми и предлаганите специалности са съобразени с нуждите на бизнес средата.

3. Размерът на таксите за обучение и оценката на обучаващите се дали са съобразени с качеството на предлаганото образование.

4. Материално-техническата база на учебните заведения и учебно-методическата (научната) подготовка на преподавателския състав.

От страна на университетите (средните училища) критерии могат да бъдат:

1. Средният успех от свидетелствата за основно образование (за кандидат-гимназистите) или резултати от приемните изпити в елитните гимназии или максималния бал на кандидатите (за кандидат-студентите).

2. Демонстрирани резултати от страна на кандидатите на национални или световни олимпиади по съответните научни направления (за кандидат-студентите).

3. Ценовата готовност на кандидатите да заплатят изискуемите такси за обучение (за кандидат-студентите).

Естествено, критериите могат да имат по-широк диапазон от тук посочените.

Алтернативно решаване на модела чрез т. нар. Унгарски алгоритъм

За целта използваме втората матрица на предпочитанията на училищата по колони спрямо тези на учениците по редове. Например в първата колона Училище 1 поставя на първо място в класацията си кандидат-гимназист (кандидат-студент) с номер 3. След това следват кандидатите с номера 4, 1 и 2 и т.н. (Вж. Таблица №1, където е зададена матрицата на предпочитанията).

Таблица 1. Ранжирани предпочитания на училищата по колони

SCHOOL 1	SCHOOL 2	SCHOOL 3	SCHOOL 4	
3	2	1	3	STUDENT 1
4	3	2	4	STUDENT 2
1	4	3	2	STUDENT 3
2	1	4	1	STUDENT 4

Следващата стъпка е да определим минималния елемент във всеки ред и да го извадим от всички елементи на матрицата, които се намират в съответния ред. Вж. таблица №1.1

Таблица 1.1 Итерация №1

SCHOOL 1	SCHOOL 2	SCHOOL 3	SCHOOL 4	
2	1	0	2	STUDENT 1
3	2	1	3	STUDENT 2
0	3	2	1	STUDENT 3
1	0	3	0	STUDENT 4

Във втората итерация повтаряме същата процедура по колони, при условие че в колоната няма нула. Но тъй като във всяка колона имаме по едно нула, не е необходимо изваждане. Вж.таблица №1.2.

Таблица 1.2 Итерация №2

SCHOOL 1	SCHOOL 2	SCHOOL 3	SCHOOL 4	
2	1	0	2	STUDENT 1
3	2	1	3	STUDENT 2
0	3	2	1	STUDENT 3
1	0	3	0	STUDENT 4

След това зачертаваме всички редове и колони, където присъства елементът 0 два пъти. Вж. таблица №1.3.

Таблица 1.3 Итерация №3

SCHOOL 1	SCHOOL 2	SCHOOL 3	SCHOOL 4	
2	1	0	2	STUDENT 1
3	2	1	3	STUDENT 2
0	3	2	1	STUDENT 3
1	0	3	0	STUDENT 4

Но тъй като в нито един ред или колона няма по две нули, класическото изпълнение на алгоритъма⁵⁾ се прекратява. Правилото е, че е необходимо да бъдат зачертани всички редове и колони с по две нули в тях. Липсата на този факт в задачата ни принуждава да спрем изпълнението на алгоритъма до тук и да анализираме получените до момента резултати. Сравнявайки редовете и колоните в таблицата в клетките със стойност 0, с които те се засичат, получаваме следното решение (Вж. таблица 1.4):

Таблица 1.4 Засичане по редове и колони

SCHOOL 1	SCHOOL 2	SCHOOL 3	SCHOOL 4	
		0		STUDENT 1
				STUDENT 2
0				STUDENT 3
	0		0	STUDENT 4

STUDENT1, SCHOOL3; STUDENT3, SCHOOL1 ; STUDENT4; SCHOOL2

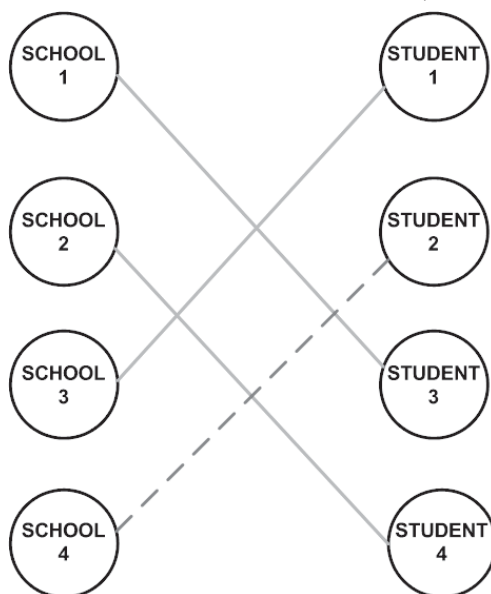
Сравнени резултатите, получени по Гейл-Шапли – STUDENT1, SCHOOL3; STUDENT2, SCHOOL4; STUDENT3, SCHOOL1 и STUDENT4, SCHOOL2 е ясно, че имаме следните съвпадения: Вж. таблица 1.5.

Таблица 1.5 Сравняване на резултатите

Алгоритъм на Гейл-Шапли	Унгарски (Кьониг-Егервари) алгоритъм
STUDENT1, SCHOOL3	STUDENT1, SCHOOL3
STUDENT3, SCHOOL1	STUDENT3, SCHOOL1
STUDENT4, SCHOOL2	STUDENT4, SCHOOL2

От анализа на данните разбираме, че двойката STUDENT2, SCHOOL4 не могат да бъдат стабилно съчетани, ако се приложи в задачата Унгарски (Кьониг-Егервари) алгоритъм, което съчетаване е възможно при алгоритъма с „отложено приемане“.

Графично решението чрез Унгарския алгоритъм приема вида, посочен във фиг. 6 (с пунктир е отбелязана нестабилно съчетана двойка).



Фигура 6. Стабилно съчетаване по двойки

Заключение

Алгоритъмът на Гейл-Шапли може да бъде прилаган на различни нива или от различни структури, били те частни, или обществени. Потребителите са улеснени в значителна степен от наличието на специализиран софтуер от различен характер (в настоящата статия е използван LINGO 14.0). Това подобрява ефективността на изследователския и приложно-практическият труд на ползващите алгоритъма. LINGO 14.0 или друга по-ранна версия предоставя предимство в това отношение, защото дава достъп до библиотеки със скриптове от най-различни области на икономиката, инженерните науки, логистиката, приложната математика и др., които могат да бъдат модифицирани и преработвани в зависимост от потребностите на ползвателя. По-напредналите в областта на програмирането могат сами да си създават свои скриптове, които да ползват за целите на работата си.

БЕЛЕЖКИ

1. Нобелова награда за постижения в областта на икономическите науки за 2012 г. // Икономическа мисъл, 2012, № 6, с. 110 – 111.
2. Паскалев, Ат. Децентрализацията в системата на средното професионално образование // Икономическа мисъл, 2013, №1, с. 134.
3. Паскалев, Ат. Децентрализацията в системата на средното професионално образование // Икономическа мисъл, 2013, №1, с. 135.
4. http://www.lindo.com/cgi-bin/model/cgi?STABLE_MARRIAGE4.txt; LINGO (към 02.08.2013).
5. <http://article.sapub.org/pdf/10.5923.j.algorithms.20120104.02.pdf> (към 02.08.2013).

ЛИТЕРАТУРА

Стойков, И. (2005) *Количествени методи в управлението*. Свищов

USING GALE - SHAPLEY ALGORITHM IN THE FORMATION ENROLLMENT IN SECONDARY AND HIGHER EDUCATION INSTITUTION

Abstract. Development of quantitative methods in recent years and their application in the economic and social sphere was motivated by the problem of redistribution processes in different areas of public affairs. Achieving optimal (balanced) state of this distribution was set as a primary objective in the empirical and theoretical research of economists at the end of last and beginning of this century. Naturally, the concept of distribution (redistribution) in no way should be understood as a counterpoint to the classical principles of perfect competition in which no monopoly or state intervention in economic processes but these advanced maneuvers were applied by social and ethical reasons. In areas such as the allocation of donor organs to needy beneficiaries and allocation of seats in educational institutions can not be handled by traditional cost systems and this raises the need for institutional intervention to regulate these processes, because such “thin” (with a limited number parties from both sides) markets soaking regulatory regimes at least at certain levels.

This article describes the application of such distribution algorithms, their strengths and weaknesses and the comparison between them. Addressed is the practical implementation of the algorithm of Gale-Shapley and the so-called Hungarian algorithm (Koenig-Egervari algorithm) with their strengths and weaknesses. Exposed are the main points of cooperative game theory. Theoretically justified are both practical algorithm used.



Mr. Nikolay Kacharmazov

Sofia, Bulgaria

E-mail: kacharmazov@abv.bg