

## ПРЕДСТАВЯНЕ НА ПОНЯТИЕТО КОНИЧНО СЕЧЕНИЕ С КОМПЮТЪР

**Марин Маринов, Петя Асенова**

*Нов български университет, департамент „Информатика“ – София*

**Резюме.** Статията разглежда проблема за въвеждане и изграждане на математическите понятия, като се използва компютър. Използва се системата за символно смятане Wolfram Mathematica 12 във всеки етап на сложния спираловиден процес за формиране на понятието конично сечение и свързаните с него понятия фокус, директриса и ексцентрицитет. Характерът на тези понятия предполага използване на подходящи анимации, 3D графики и символни изчисления. Представено е нашето виждане за процеса на формиране на математическите понятия. Понятията елипса, парабола и хипербола се определят като сечение на конична повърхнина с равнина, несъдържаща върха на коничната повърхнина. Коничното сечение се представя като геометрично място на точки от равнината, за които отношението на разстоянието до фокуса към разстоянието до директрисата е постоянна величина. Линиите хипербола и елипса се определят с помощта на техните фокуси. Коментира се еквивалентността на различни определения за конични сечения.

**Ключови думи:** математически понятия; конични сечения; елипса; парабола; хипербола; фокус; директриса; ексцентрицитет; компютърна визуализация

### 1. Увод

Целта на нашата статия е да представим един подход за изграждане на понятието конично сечение, насочен към повишаване активността на обучаемите. Използването на системите за символно смятане открива нови възможности за участие в откриването на ново знание (Marinov 2015). Примерите в статията са илюстрирани с Wolfram Mathematica 12, но може да се използват и други развити системи за символно смятане. В статията представяме три начина за определяне на всяка една от линиите: елипсата, параболата и хиперболата. Еквивалентността на трите определения се доказва по следната схема:



При изграждането на новите понятия се придържаме към емпиричен подход, близък до теорията А. Б. Усова (Usova, 2011), (Asenova and Marinov 2018), в който могат да се отделят следните 11 етапа.

1) *Възприятие*. Обучаемите извършват изследователска работа, в която откриват свойства на изучавания обект и връзки с други изучавани обекти.

2) *Откриване на общи съществени свойства за клас от обекти*. В резултат на редица изследователски случаи, които обучаемите провеждат, те се насочват към изводи за свойства на цял клас изучавани обекти.

3) *Абстракция*. Тя е резултат от извървения път от примери към обобщение и подготвя дефинирането на понятието.

4) *Дефиниция*. Произтича непосредствено от абстракцията, където се подчертават свойствата на целия клас от обекти.

5) *Затвърждаване на съществените свойства чрез прости примери*.

6) *Връзка между изучаваното понятие и други изучавани понятия*.

7) *Приложение на изучаваното понятие в прости ситуации*.

8) *Класификация на понятията*. Този етап разкрива мястото на изучаваното понятие в цялата понятийна система на учебния предмет и цялостна картина.

9) *Приложение на понятието в по-сложни ситуации* създава условия за връзки с други системи от понятия в рамките на същата наука или сродни науки.

10) *Обогатяване на понятието с нови свойства*. Знанието става все по-пълно и по-богато.

11) *Изучаваното понятие се използва за развитие на нови понятия и за установяване на нови връзки с други понятия*.

Спецификата на представения случай е в това, че въвеждаме едновременно няколко понятия. В параграф 2 с подходяща анимация и задачи за самостоятелна работа въвеждаме понятията елипса, парабола и хипербола. След това въвеждаме понятията фокус, директриса и ексцентрицитет (параграф 3). Това е естествено следствие на доказаните свойства на коничните сечения. При доказателствата в параграф 3 и 4 основно място имат 3D графиките на конични сечения и обектите, които изследваме. Възможността обучаемите произволно да въртят графиките, да разглеждат изучавания обект от избрана от тях посока, ги въвлича в изследователския процес. Това развива тяхното пространствено виждане. В този случай графиките имат въздействието на реален физически обект. Задачите за самостоятелна работа в параграф 3 и 4 предполагат използването на графичните и изчислителните възможности на системата Mathematica.

#### *Означения и предварителни знания*

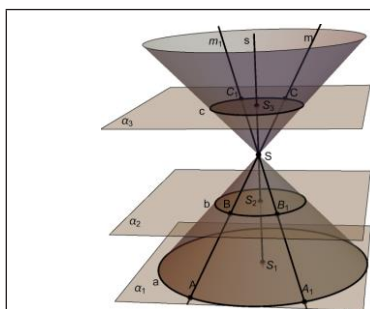
В статията с  $|AB|$  ще означаваме разстоянието между точките  $A$  и  $B$ . Освен това ще припомним някои понятия и свойства, които считаме за известни.

Нека правите  $m$  и  $s$  имат единствена обща точка, която означаваме с  $S$ . Въртим правата  $m$  около правата  $s$  в една и съща посока, без да се променя ъгълът между  $m$  и  $s$ , докато  $m$  се върне в началното си положение. Повърхнината  $\beta$ , която описва  $m$  при това въртене, ще наричаме кратко *конична повърхнина*. Всяка права от коничната повърхнина наричаме нейна *образуваща*. Точката  $S$  наричаме *върх* на  $\beta$ . Правата  $s$  наричаме *оста* на  $\beta$ .

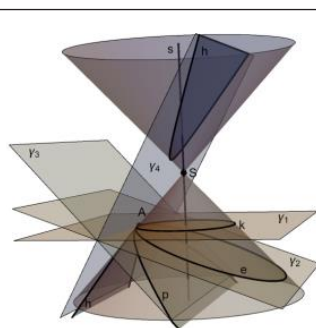
Ако  $m_1$  и  $m_2$  са две образуващи на коничната повърхнина  $\beta$ , то те заключават равни ъгли с оста  $s$ . Това ни дава основание да означим с  $\varphi$  ъгъла между  $s$  и която и да е образуваща.

Нека  $\alpha_1$  е равнина, перпендикулярна на оста  $s$ . Ако  $\alpha_1$  не съдържа върха  $S$ , то сечението на  $\alpha_1$  и  $\beta$  е окръжност  $a$  с център точката  $S_1$ , в която се пресичат  $\alpha_1$  и  $s$  и радиус  $r = |SS_1| \operatorname{tg}(\varphi)$ . Освен това, ако точките  $A$  и  $A_1$  принадлежат на окръжността  $a$ , то  $|SA| = |SA_1|$  (вж. фиг. 1).

Върхът  $S$  разделя повърхнината  $\beta$  на две части. Достатъчно е да построим равнина  $\alpha$ , съдържаща върха  $S$  и перпендикулярна на  $s$ , то двете части на  $\beta$  се съдържат в различни полупространства с граница  $\alpha$ . Ако точките  $B$  и  $B_1$  принадлежат на една и съща част от повърхнината  $\beta$  и  $|SB| = |SB_1|$ , то равнината  $\alpha_2$ , съдържаща точката  $B$  и перпендикулярна на  $s$ , съдържа и точката  $B_1$  (вж. фиг. 1).



**Фигура 1.** Равнините  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  са перпендикулярни на оста  $s$



**Фигура 2.** Конични сечения

*Свойство 1.* Ако  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  са две различни равнини, перпендикулярни на оста  $s$ , то те отсичат от образуващите на коничната повърхнина  $\beta$  отсечки с равни дължини.

На фиг. 1 са дадени двата основни случая на свойство 1. Равнините  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  са перпендикулярни на оста  $s$ . Свойство 1 доказва, че както отсечките  $AB$  и  $A_1B_1$ , така и отсечките  $AC$  и  $A_1C_1$  имат равни дължини.

Казваме, че сферата  $\delta$  е *вписана* в коничната повърхнина  $\beta$ , когато тя се допира до всяка образуваща на  $\beta$ .

**Свойство 2.** Ако сферата  $\delta$  е вписана в коничната повърхнина  $\beta$ , то двете повърхнини се допират в окръжност  $a$ , която лежи върху равнина, перпендикулярна на оста  $s$ . Освен това центърът на сферата  $\delta$  и центърът на окръжност  $a$  принадлежат на оста  $s$ .

Ясно е, че всяка точка  $O \in s$  и  $O \neq S$  е център на вписана в  $\beta$  сфера.

## 2. Конични сечения

В статията ще означаваме с  $\gamma$  секущата равнина, а с  $\psi$  – ъгъла между тази равнина и оста  $s$  на коничната повърхнина  $\beta$ . Ще разгледаме коничните сечения  $\gamma \cap \beta$ , когато равнината  $\gamma$  не съдържа върха  $S$  на коничната повърхнина. Едно такова сечение бе коментирано в увода. Това е случаят, когато секущата равнина е перпендикулярна на оста  $s$ . В този случай сечението  $k = \gamma \cap \beta$  е окръжност. (На фиг. 2 равнината  $\gamma_1$  е перпендикулярна на  $s$ .) Фиксираме точка  $A$  от  $k$  и въртим секущата равнина около точката  $A$ , така че ъгълът между секущата равнина и оста  $s$  непрекъснато да намалява до нула. Въртенето може да продължи и още малко в същата посока. Това се илюстрира с анимация, която въвежда обучаемите в изследването на коничните сечения. На фиг. 2 като  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и  $\gamma_4$  са изобразени четири типични състояния на равнината  $\gamma$  при това въртене. Наблюдавайки как се променят коничните сечения, обучаемите стигат до извода, че има три вида конични сечения, които се различават лесно.

Коничното сечение от *първи вид* е затворена, ограничена линия. То е разположено върху едната част на коничната повърхнина и прилича на „сплескана“ окръжност (вж. на фиг. 2 коничното сечение  $e = \gamma_2 \cap \beta$ ).

Коничното сечение от *втори вид* е неограничена линия, разположена само върху едната част от коничната повърхнина (вж. на фиг. 2 коничното сечение  $p = \gamma_3 \cap \beta$ ).

Коничното сечение от *трети вид* се състои от две отделни неограничени части. Различните части на сечението са разположени върху различни части на коничната повърхнина (вж. на фиг. 2 коничното сечение  $h = \gamma_4 \cap \beta$ ).

В действителност анимацията показва как се променя коничното сечение  $\gamma \cap \beta$ , когато ъгълът  $\psi$  се променя непрекъснато от  $\frac{\pi}{2}$  до  $0$ . Така естествено възникват въпросите:

1. При кой ъгъл  $\psi$  сечението е от втори вид?
2. За кои ъгли  $\psi$  секущата равнина пресича двете части на коничната повърхнина?

**Задача 1.** Докажете, че ако  $\psi = \varphi$ , то съществува образуваща на коничната повърхнина, която е успоредна на секущата равнина  $\gamma$ .

**Задача 2.** Докажете, че ако  $0 \leq \psi < \varphi$ , то равнината  $\gamma$  пресича двете части на коничната повърхнина.

Натрупаният опит ни дава основание да дадем следното определение на коничните сечения.

**Определение 1.** *Конично сечение* ще наричаме  $\gamma \cap \beta$ , когато равнината  $\gamma$  не съдържа върха на коничната повърхнина  $\beta$ .

*Елипса* наричаме коничното сечение  $\gamma \cap \beta$ , когато  $\frac{\pi}{2} > \psi > \varphi$ .

*Парабола* наричаме коничното сечение  $\gamma \cap \beta$ , когато  $\psi = \varphi$ .

*Хипербола* наричаме коничното сечение  $\gamma \cap \beta$ , когато  $\varphi > \psi \geq 0$ .

Фиг. 2 дава геометричната илюстрация на определение 1. Коничното сечение  $e = \gamma_2 \cap \beta$  е елипса. Коничното сечение  $p = \gamma_3 \cap \beta$  е парабола. Коничното сечение  $h = \gamma_4 \cap \beta$  е хипербола.

Коничните сечения елипса, парабола и хипербола са централни проекции на окръжността.

И трите конични сечения са равнинни линии. Естествено е да потърсим такива техни свойства, даващи възможност да определим елипсата, параболата и хиперболата, без да излизаме в пространството.

### 3. Фокус, директриса и ексцентрицитет

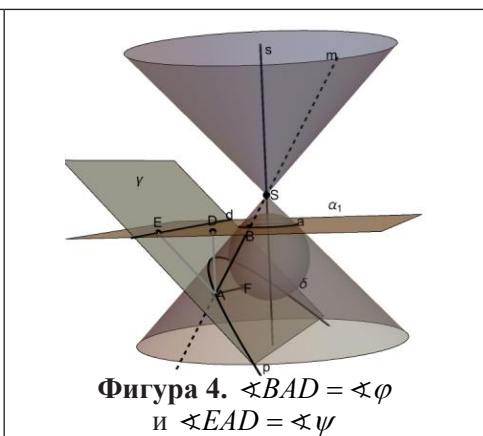
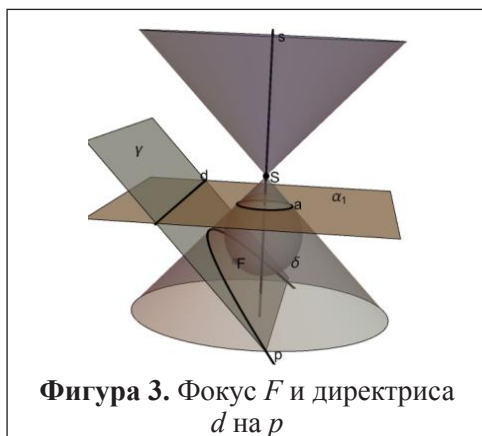
Една класическа конструкция, принадлежаща на белгийския математик и механик Germinal Pierre Dandelin (1847 – 1794) (Dandelin 1826), дава възможност лесно да се разкрият определящи равнинните свойства на коничните сечения. (Akopyan & Zaslavskiy 2007).

#### 3.1 Парабола

Пресичаме коничната повърхнина  $\beta$  с равнината  $\gamma$ , така че  $\psi = \varphi$ . В този случай сечението  $p = \beta \cap \gamma$  е парабола.

В коничната повърхнина  $\beta$  вписваме сферата  $\delta$ , която се допира до равнината  $\gamma$ . Тази сфера се нарича *сфера на Данделен*. Точката на допиране на сферата  $\delta$  и равнината  $\gamma$  се нарича *фокус* на параболата  $p$ . С  $F$  означаваме фокуса на  $p$ .

Сферата  $\delta$  и коничната повърхнина  $\beta$  се допират в окръжността  $a$ . Означаваме с  $\alpha_1$  равнината, която съдържа окръжността  $a$ . Правата  $d$ , в която се пресичат равнините  $\gamma$  и  $\alpha_1$ , се нарича *директриса* на параболата  $p$  (вж. фиг. 3).



Чрез графичните възможности на системата Mathematica се визуализират конкретни параболи, техните фокуси и директриси. Обучаемите извършват изследователска работа, в която откриват определящи свойства на фокуса и директрисата. Удобните изчислителни функции на системата дават възможност самостоятелно да се открие връзката между разстоянията на точка от параболата до фокуса  $F$  и до директрисата  $d$ . Така се създава мотивация да се докаже теорема 1.

**Теорема 1.** Параболата  $p$  е множеството от точки на равнината  $\gamma$ , за които разстоянието до фокуса  $F$  е равно на разстоянието до директрисата  $d$ .

*Доказателство.* Фиксираме произволна точка  $A$  от параболата  $p$  и построяваме образуващата  $m$ , която съдържа точката  $A$ . Образуващата  $m$  пресича окръжността  $a$  в точката  $B$ . Построяваме ортогоналните проекции на точката  $A$  върху равнината  $\alpha_1$  и върху директрисата  $d$ . Означаваме с  $D$  проекцията на  $A$  върху  $\alpha_1$  и с  $E$  проекцията върху директрисата  $d$  (вж. фиг. 4).

От фиг. 4 се вижда, че  $\angle BAD = \angle \varphi$ , защото  $AD \parallel s$  и  $AB$  е отсечка от образуващата  $m$ . Тогава  $\frac{|AD|}{|AB|} = \cos(\varphi)$  за всяка точка  $A$  от параболата.

Аналогично се установява, че  $\angle EAD = \angle \psi$  и следователно  $\frac{|AD|}{|AE|} = \cos(\psi)$ .

Следователно

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AB| \cdot |AD|}{|AE| \cdot |AD|} = \frac{|AD|}{|AE|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)}$$

Сега, поглеждайки фиг. 4 от друг ъгъл, установяваме, че  $|AB| = |AF|$  като допирателни към сферата  $\delta$ . (Отсечката  $AF$  е от равнината  $\gamma$ , а отсечката  $AB$  е от образуващата  $m$ , която се допира до сферата  $\delta$  в точката  $B$ .) Следователно

$$\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)} = 1,$$

защото по условие  $\sphericalangle \psi = \sphericalangle \varphi$ . Понеже разстоянието от точката  $A$  до директрисата  $d$  е равно на  $|AE|$ , докажахме, че ако  $A \in p$ , то разстоянието на  $A$  до директрисата  $d$  е равно на  $|AF|$ .

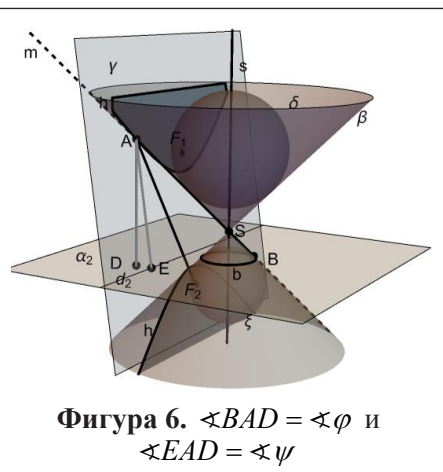
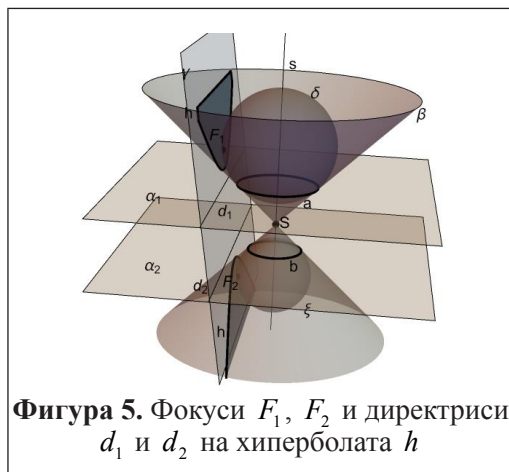
Лесно се установява, че ако  $G \in \gamma$  и  $G \notin p$ , то разстоянието от точката  $G$  до директрисата  $d$  е различно от  $|GF|$ .

**Забележка 1.** Използването на 3D графики при представянето на доказателството на теорема 1 спомага за по-добро разбиране. Възможността графиката да се разглежда от произволно избрана посока, развива пространственото виждане на обучаемите. Дава възможност да се представи ясно математическата аргументация, като текущо се променя акцентът на графиката. Създава динамичност, която приобщава обучаемите към процеса на доказателство.

Напълно аналогично се въвеждат понятията фокус и директриса за хиперболата и елипсата. В този случай съществуват две вписани сфери в конуса, които се допират до секущата равнина. Тези сфери се наричат *сфери на Данделен*. Всяка една от сферите на Данделен определя по един фокус и една директриса, които ще наричаме *съответни*.

### 3.2. Хипербола

Пресичаме коничната повърхнина  $\beta$  с равнината  $\gamma$ , за която ъгълът  $\psi$  на нейния наклон към оста  $s$  е по-малък от ъгъла  $\varphi$  между оста  $s$  и която и да е образуваща на  $\beta$ . В този случай сечението  $h = \beta \cap \gamma$  е хипербола. В коничната повърхнина  $\beta$  вписваме сферите  $\delta$  и  $\xi$ , които се допират до равнината  $\gamma$ . Сферата  $\delta$  е вписана в горната част на коничната повърхнина  $\beta$ , а сферата  $\xi$  е вписана в долната част. Тези сфери се наричат *сфери на Данделен*. Точките на допиране на сферите  $\delta$  и  $\xi$  до равнината  $\gamma$  се наричат *фокуси* на хиперболата  $h$ . С  $F_1$  и  $F_2$  означаваме съответно фокусите на хиперболата (вж. фиг. 5).



Сферата  $\delta$  и коничната повърхнина  $\beta$  се допират в окръжността  $a$ . Означаваме с  $\alpha_1$  равнината, която съдържа окръжността  $a$ . Правата  $d_1$ , в която се пресичат равнините  $\gamma$  и  $\alpha_1$ , се нарича *директриса* на хиперболатата  $h$ . Директрисата  $d_1$  и фокусът  $F_1$ , които се определят с една и съща сфера на Данделен, наричаме съответни. Аналогично сферата  $\xi$  и коничната повърхнина  $\beta$  се допират в окръжността  $b$ . Означаваме с  $\alpha_2$  равнината, която съдържа окръжността  $b$ . Правата  $d_2$ , в която се пресичат равнините  $\gamma$  и  $\alpha_2$ , се нарича *директриса* на хиперболатата  $h$ . Директрисата  $d_2$  и фокусът  $F_2$ , които се определят със сферата  $\xi$ , наричаме съответни (вж. фиг. 5).

**Забележка 2.** Аналогично на случая на параболата чрез следваща група от задачи се мотивира изучаването на връзката между понятията фокуси и директриси за хиперболатата. Процесът се благоприятства от добрите графични и изчислителни функции на системата Mathematica. Обучаемите сами откриват формулировката на теорема 2.

**Теорема 2.** Хиперболатата  $h$  е множеството от точки на равнината  $\gamma$ , за които отношението на разстоянието до фокуса  $F_j$  към разстоянието до директрисата  $d_j$ , ( $j = 1$  или  $j = 2$ ) е постоянно число  $\varepsilon > 1$ .

*Доказателство.* Ще докажем теорема 2 за фокуса  $F_2$  и директрисата  $d_2$ , които се определят със сферата на Данделен  $\xi$ . Премахваме от фиг. 5 равнината  $\alpha_1$ , директрисата  $d_1$  и окръжността  $a$ . Нека  $A$  е произволна точка от хиперболатата  $h = \beta \cap \gamma$ . Скицираме случая, когато точката  $A$  е от горния клон на хиперболатата  $h$ . Построяваме образуващата  $m$ , която съдържа точките  $A$  и  $S$  и означаваме с  $B$  точката, в която тя пресича окръжността  $b$ . Освен това определяме точката  $D$ , която е ортогоналната проекция на  $A$  върху равнината  $\alpha_2$  и точката  $E$ , която е ортогоналната проекция на  $A$  върху директрисата  $d_2$  (вж. фиг. 6).

Аналогично на теорема 1 доказваме, че

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \cos(\psi) \text{ и } \frac{|AD|}{|AB|} = \cos(\varphi),$$

където  $\varphi$  е ъгълът между  $s$  и  $m$ , а  $\psi$  е ъгълът, който сключва оста  $s$  с равнината  $\gamma$ .

Забелязва се, че  $|AB| = |AF|$ , защото  $AB$  и  $AF$  са допирателни към сферата  $\xi$  от точката  $A$ . Следователно

$$\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)} = \varepsilon \quad (1)$$

където  $\varepsilon > 1$ , защото  $0 < \angle \psi < \angle \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Напълно аналогично е доказателството на равенството (1), когато точката  $A$  принадлежи на долния клон на хиперболатата. (3D графиката в този случай прилича на тази от фиг. 4.)

Напълно аналогично е доказателството в случая, когато се разглеждат фокусът  $F_1$  и директрисата  $d_1$ , които се определят от горната сфера на Данделен  $\delta$ .

**Забележка 3.** Доказателството на теорема 2 в случаите, когато точката  $A$  е от долния клон на хиперболатата или когато фокусът и директрисата се определят от горната сфера, се решават с подходящи задачи за самостоятелна работа. Целта на тези задачи е да се затвърди подходът на Данделен и знанията да станат по-осъзнати и трайни. Очакваните резултати са:

- да се разберат понятията фокус и директриса на хипербола;
- да се развие пространственото виждане на обучаемите;
- в конкретни случаи да се построяват 3D графики, илюстриращи подхода на Данделен.

### 3.3 Елипса

Пресичаме коничната повърхнина  $\beta$  с равнината  $\gamma$ , за която ъгълът  $\psi$  на оста  $s$  и  $\gamma$  е по-голям от ъгъла  $\varphi$  между оста  $s$  и която и да е образуваща на  $\beta$ . В този случай коничното сечение  $e = \beta \cap \gamma$  е елипс. В коничната повърхнина  $\beta$  вписваме сферите  $\delta$  и  $\xi$ , които се допират до равнината  $\gamma$ . Сферата  $\delta$  е в горното полупространство с граница  $\gamma$ , а  $\xi$  е в долното полупространство с граница  $\gamma$ . Тези сфери се наричат *сфери на Данделен*. Точките на допиране на сферите  $\delta$  и  $\xi$  до равнината  $\gamma$  се наричат *фокуси* на елипсата  $e$ . С  $F_1$  и  $F_2$  означаваме съответно фокусите на елипсата  $e$ . Аналогично на случая на хиперболатата, означаваме с  $a$  окръжността, в която се допират сферата  $\delta$  и коничната повърхнина  $\beta$ , и с  $b$  окръжността, в която се допират сферата  $\xi$  и коничната повърхнина  $\beta$ . Равнината  $\alpha_1$ , съдържаща окръжността  $a$ , пресича равнината  $\gamma$  в правата  $d_1$ , а равнината  $\alpha_2$ , съдържаща окръжността  $b$ , пресича равнината  $\gamma$  в правата  $d_2$ . Правите  $d_1$  и  $d_2$  се наричат *директриси* на елипсата  $e$ . На фиг. 7 се вижда как сферата  $\delta$  определя фокуса  $F_1$  и директрисата  $d_1$ , а сферата  $\xi$  определя фокуса  $F_2$  и директрисата  $d_2$ .

**Теорема 3.** Елипсата  $e$  е множеството от точки на равнината  $\gamma$ , за които отношението на разстоянието до фокуса  $F_j$  към разстоянието до директрисата  $d_j$ , ( $j = 1$  или  $j = 2$ ) е постоянно число  $\varepsilon \in (0; 1)$ .

*Доказателство.* Ще докажем теорема 3 за фокуса  $F_2$  и директрисата  $d_2$ , които се определят със сферата на Данделен  $\xi$ . За произволна точка  $A$  от елипсата  $e$  определяме ортогоналната проекция  $D$  върху равнината  $\alpha_2$  и ортогоналната проекция  $E$  върху директрисата  $d_2$ . Освен това, образуващата  $m$ , която минава през точката  $A$ , пресича окръжността  $b$  в точката  $B$ . Аналогично на доказаните по-горе теореми 1 и 2 установяваме, че  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle \varphi$  и  $\sphericalangle EAD = \sphericalangle \psi$  (вж. фиг. 8.) Тогава:

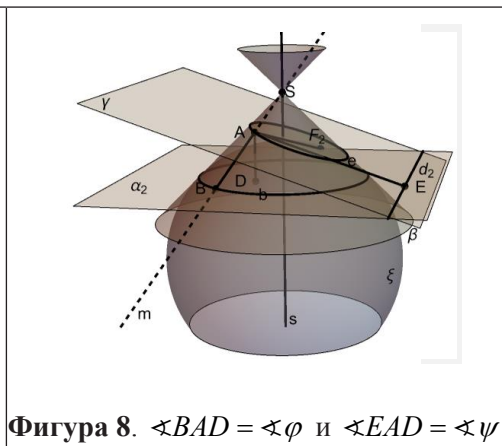
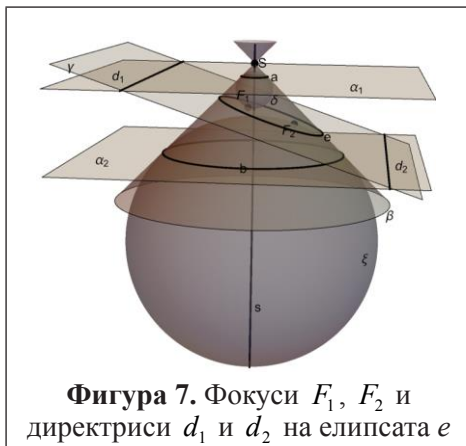
$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AB| \cdot |AD|}{|AE| \cdot |AD|} = \frac{|AD|}{|AE|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)}$$

Следователно

$$\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)} = \varepsilon,$$

защото  $|AB| = |AF|$  като допирателни към сферата  $\xi$  от точката  $A$ .

Числото  $\varepsilon < 1$ , защото  $\frac{\pi}{2} > \angle \psi > \angle \varphi > 0$ .



**Забележка 4.** Означаваме с  $\text{dist}(A, d_1)$  разстоянието от точката  $A$  до директрисата  $d_1$ . Следващите задачи водят към доказателството на следните твърдения:

- Ако  $A$  принадлежи на елипсата  $e$ , то  $\frac{|AF_1|}{\text{dist}(A, d_1)} = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)}$ .
- Ако  $A$  принадлежи на вътрешността на елипсата  $e$ , то  $\frac{|AF_1|}{\text{dist}(A, d_1)} < \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)}$ .
- Ако  $A$  принадлежи на външността на елипсата  $e$ , то  $\frac{|AF_1|}{\text{dist}(A, d_1)} > \frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)}$ .

Доказателствата се илюстрират с чертежи.

Така доказахме, че за всяко конично сечение, наред с двойката фокус  $F$  и директриса  $d$ , получени с една сфера на Данделен, съществува и едно специално число  $\varepsilon$ . Това число  $\varepsilon$  се определя с произволна точка  $A$  от коничното сечение и е равно на отношението на разстоянието между точките  $A$  и  $F$  към разстоянието от  $A$  до директрисата  $d$ . Числото  $\varepsilon$  се нарича *есцентрицитет* на коничното сечение.

В теореме 1, 2 и 3 доказахме, че за параболата  $\varepsilon = 1$ , за хиперболатата  $\varepsilon > 1$  и за елипсата  $0 < \varepsilon < 1$ .

Натрупаният опит с понятията фокус, директриса и есцентрицитет ни дава възможност за следваща стъпка на абстракция.

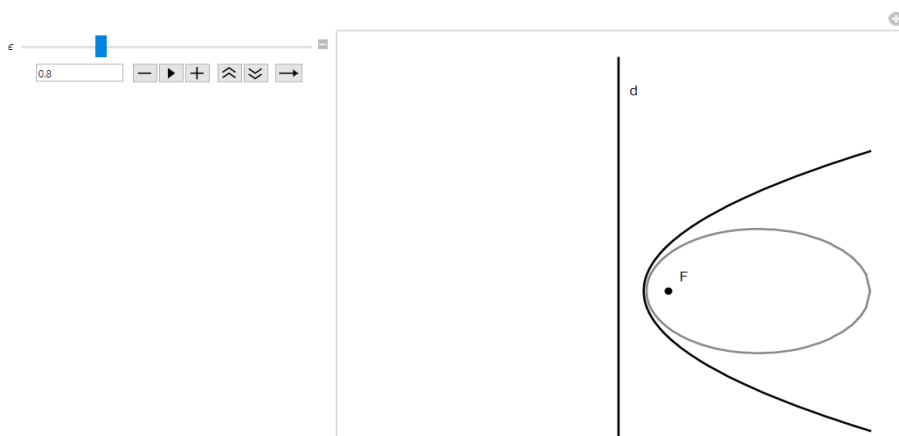
**Определение 2.** Геометричното място  $\{A\}$  на точки  $A$  от равнината  $\alpha$ , за които отношението на разстоянието  $t$  до фиксирана точка  $F \in \alpha$  към разстоянието  $r$  до фиксирана права  $d \subset \alpha$  ( $F \notin d$ ) е постоянна величина  $\varepsilon$ , се нарича *конично сечение*.

Когато  $0 < \varepsilon < 1$ , коничното сечение се нарича *елипса*.

Когато  $\varepsilon = 1$ , коничното сечение се нарича *парабола*.

Когато  $\varepsilon > 1$  коничното сечение се нарича *хипербола*.

Определение 2 илюстрираме с анимация, представена на фиг. 9. На чертежа с черен цвят са скицирани директрисата  $d$  и граничният случай  $\varepsilon = 1$ . Със сив цвят скицираме текущото конично сечение, което има ексцентрицитет  $\varepsilon$ . На фигурата е представено сечението с  $\varepsilon = 0.8$ .



**Фигура 9.** Зависимост между ексцентрицитета  $\varepsilon$  и вида на коничното сечение

С доказаните по-горе теореми установихме, че ако една линия е елипса, парабола или хипербола според определение 1, то тя е съответно елипса, парабола или хипербола и според определение 2. Остава да проверим обратното твърдения.

**Теорема 4.** Нека в равнината  $\alpha$  са фиксирани точка  $F$  и права  $d$ , която не съдържа точката  $F$ . Фиксираме и числото  $\varepsilon > 0$ . Означаваме с  $f$  геометричното място на точки  $A \in \alpha$ , за които

$$\frac{|AF|}{\text{dist}(A, d)} = \varepsilon,$$

където  $\text{dist}(A, d)$  е разстоянието от  $A$  до  $d$  и  $|AF|$  е дължината на отсечката  $AF$ .

Тогаво съществува конична повърхнина  $\beta$  и равнина  $\gamma$ , за които  $f$  е сечение на  $\beta$  и  $\gamma$ .

*Доказателството* се реализира със задачи, които водят до доказателството на следните твърдения.

– Нека  $f_1$  и  $f_2$  са конични сечения на успоредни равнини  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , които не съдържат върха  $S$  на коничната повърхнина  $\beta$ . Тогаво  $f_1$  и  $f_2$  са подобни

с коефициент на подобие, равен на отношението на разстоянията от  $S$  до равнините  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

– Ако коничното сечение  $f_1 = \beta \cap \gamma_1$  е подобно на  $f$ , то съществува равнина  $\gamma_2$ , успоредна на  $\gamma_1$  и такава, че  $f_2 = \beta \cap \gamma_2$  е еквивалентна на  $f$ .

– Ако  $f$  и  $f_1$  са конични сечения (според определение 2) с равни ексцентрицитети, то те са подобни.

С помощта на тези твърдения лесно се завършва доказателството на теорема 4. Нека  $f$  е конично сечение според определение 2 с ексцентрицитет  $\varepsilon > 0$ .

Първо избираме ъгъл  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , за който  $0 < \varepsilon \cos(\varphi) < 1$ . Построяваме конус  $\beta$ , за който ъгълът между оста  $s$  и образуваща е равен на  $\varphi$ . След това определяме ъгъла  $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , за който  $\cos(\psi) = \varepsilon \cos(\varphi)$ . Построяваме равнина  $\gamma_1$ ,

която не съдържа върха  $S$  на коничната повърхнина  $\beta$  и съдържа ъгъл  $\psi$  с оста  $s$ . От теореми 1, 2 и 3 следва, че ексцентрицитетът на коничното сечение  $f_1 = \beta \cap \gamma_1$  е равен на  $\frac{\cos(\psi)}{\cos(\varphi)} = \varepsilon$ . Тогава линиите  $f$  и  $f_1$  са подобни, като конични сечения (според определение 2) с равни ексцентрицитети. Но тогава според доказано твърдение съществува равнина  $\gamma$ , успоредна на  $\gamma_1$  и такава, че  $f$  е сечението на  $\beta$  и  $\gamma$ .

#### 4. Още едно определение на хипербола и елипса

Подходът на Данделен дава възможност да се определят хиперболата и елипсата с помощта на техните фокуси, без да се използват директрисите.

**Теорема 5.** Нека  $h$  е хипербола, получена от сечението на коничната повърхнина  $\beta$  с равнината  $\gamma$ , а  $F_1$  и  $F_2$  са нейните фокуси. Тогава съществува такава константа  $r$ , че  $h$  е множеството от точки  $A$  на равнината  $\gamma$ , за които

$$||AF_1| - |AF_2|| = r$$

*Доказателство.* С  $\delta$  и  $\xi$  сме означили сферите, които са вписани в  $\beta$  и се допират до равнината  $\gamma$  съответно в точките  $F_1$  и  $F_2$  (вж. фиг. 5). Равнините  $a_1$  и  $a_2$ , които съдържат съответно окръжностите  $a = \beta \cap \delta$  и  $b = \beta \cap \xi$ , са перпендикулярни на оста  $s$  на  $\beta$  (свойство 2). Според свойство 1 равнините  $a_1$  и  $a_2$  отсичат от образуващите на  $\beta$  отсечки с равни дължини. Означаваме с  $r$  тяхната дължина.

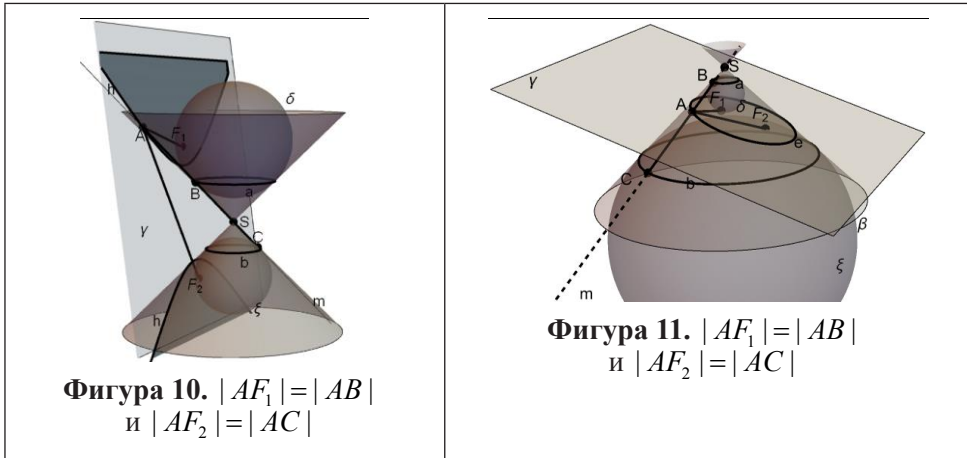
Нека  $A$  е произволна точка от линията  $h$ . Построяваме правата  $m$ , която съдържа точките  $A$  и  $S$ . Правата  $m$ , като образуваща на коничната повърхнина  $\beta$ , пресича окръжностите  $a$  и  $b$ . Означаваме пресечната точка на  $m$  и  $a$  с  $B$ , а пресечната точка на  $m$  и  $b$  – с  $C$ . Тогава  $|BC| = r$ .

Скицираме отсечките  $AF$  и  $AF_2$ , които принадлежат на равнината  $\gamma$  (вж. фиг. 10). Забелязва се, че  $AF_1$  и  $AB$  са допирателни от точката  $A$  към сферата  $\delta$  и следователно  $|AF_1| = |AB|$ .

Аналогично  $AF_2$  и  $AC$  са допирателни от точката  $A$  към сферата  $\xi$  и следователно  $|AF_2| = |AC|$ .

Следователно

$$||AF_1| - |AF_2|| = ||AB| - |AC|| = |BC| = r.$$



**Задача 3.** Скицирайте фигура 10, като отбележите точката  $A_1$  върху долния клон на хиперболата. Постройте образуващата  $m_1$ , която съдържа  $A_1$ . Означете с  $C_1$  и  $B_1$  точките, в които  $m_1$  пресича съответно окръжностите  $b$  и  $a$ . Докажете, че  $|BC| = |B_1C_1|$ .

**Определение 3.1.** Хипербола е геометричното място на точки от равнината  $\gamma$ , за които модулет на разлика от разстоянията до две фиксирани точки  $F_1$  и  $F_2$  от  $\gamma$  е постоянна величина.

**Забележка 5.** Следващите задачи доказват, че ако  $h$  е хипербола според определение 3.1, то тя е хипербола и според определение 2.

**Теорема 6.** Нека  $e$  е елипса, получена от сечението на коничната повърхнина  $\beta$  с равнината  $\gamma$ , а  $F_1$  и  $F_2$  са нейните фокуси. Тогава съществува такава константа  $r$ , че  $e$  е множеството от точки  $A$  на равнината  $\gamma$ , за които:

$$|AF_1| + |AF_2| = r$$

**Доказателство.** Предполагаме, че са въведени означенията от параграф 3.3 (вж. фиг. 7).

Фиксираме т.  $A$  от линията  $e = \gamma \cap \beta$ . Означаваме с  $m$  образуващата на конуса  $\beta$ , която минава през т.  $A$ . Тя пресича окръжността  $a$  в точка  $B$  и окръжността  $b$  в точка  $C$  (вж. фиг. 11).

Понеже  $AF_1$  и  $AB$  са две допирателни към сферата  $\delta$ , то те имат равни дължини, т.е.  $|AF_1| = |AB|$ .

Аналогично  $AF_2$  и  $AC$  са две допирателни към сферата  $\xi$ , т.е.  $|AF_2| = |AC|$ .

Следователно:

$$|AF_1| + |AF_2| = |AB| + |AC| = |BC| = r$$

Нека  $A'$  е произволна точка от линията  $e$  и  $m'$  е образуващата на коничната повърхнина  $\beta$ , която съдържа  $A'$ . Означаваме с  $B'$  точката на пресичане на  $m'$  с  $a$  и с  $C'$  точката на пресичане на  $m'$  с  $b$ . Тогава, повтаряйки горните разсъждения доказваме, че  $|A'F_1| + |A'F_2| = |B'C'|$ . Както и при доказателството на теорема 5, с помощта на свойства 1 и 2 доказваме, че  $|B'C'| = |BC| = r$ .

**Определение 3.2.** *Елипса е геометричното място на точки от равнината, за които сумата от разстоянията им до две фиксирани точки  $F_1$  и  $F_2$  от същата равнина е постоянна величина.*

**Забележка 6.** С подходящи задачи се доказва, че ако  $e$  е елипса според определение 3.2, то тя е елипса и според определение 2.

## 5. Заключение

Използването на системите за символно смятане при преподаването засилва мотивацията на обучаемите за активно участие в процеса на обучение. Анимациите и 3D-графиките откриват нови възможности за реализация на евристичния и изследователския метод на преподаване. Използването на системите за символно смятане налага цялостно преосмисляне и на задачите за самостоятелна работа. Новата система от задачи трябва да отчита възможностите на системата за символно смятане и да осигурява ефективен начин за постигане на целите: въвеждане, затвърждаване и приложение на новото знание (Asenova and Marinov 2019). Това изисква повече време от преподавателите за разработката на учебни материали и повече време от обучаемите за самостоятелна работа.

## ЛИТЕРАТУРА

- Акопян, А. & Заславский, А., 2007. *Геометрические свойства кривых второго порядка*. Москва: МЦНМО, ISBN 978-5-94057-300-5.
- Маринов, М., 2015. Обучение по математика със система за символно смятане. *Математика и математическо образование* **44**, 137 – 148.
- Усова, А. В., 2011. Методические аспекты проблемы формирования научных понятий у учащихся школ и студентов вузов, *Мир науки, культуры, образования*, **4(29)**, 11 – 13.

## REFERENCES

- Akopyan, A. & Zaslavskiy, A., 2007. *Geometricheskie svoystva krivih vtorogo poryadka*. Moskva: MTNMO, ISBN 978-5-94057-300-5.
- Asenova, P., Marinov, M., 2018. Teaching mathematics with computer system. *Mathematics and education in mathematics* **47**, 213 – 220.
- Asenova, P., Marinov, M., 2019. System of tasks in mathematics education. *Mathematics and Informatics* **62** (1), 52– 70.
- Dandelin, G., 1826. Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M Brianchon. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*. 3, 3 – 16.
- Marinov, M., 2015. Obuchenie po matematika sas Sistema za simvolno smiatane. *Matematika I matematichsko obrazovanie* **44**, 137 – 148.
- Usova, A. V., 2011. Metodicheskie aspekti problem formirovaniya nauchnih ponyatii u uchashchihsya shkol I studentov, *Mir nauki, kulturi, obrazovania*, **4**(29), 11 – 13.

## TEACHING THE NOTION CONIC SECTION WITH COMPUTER

**Abstract.** The article discusses the problem of introducing and constructing mathematical concepts using a computer. The Wolfram Mathematica 12 symbolic calculation system is used at each stage of the complex spiral process to form the notion of conic section and the related concepts of focus, directrix and eccentricity. The nature of these notions implies the use of appropriate animations, 3D graphics and symbolic calculations. Our vision of the process of formation of mathematical concepts is presented. The notions ellipse, parabola and hyperbola are defined as the intersection of a conical surface with a plane not containing the vertex of the conical surface. The conical section is represented as a geometric location of points on the plane for which the ratio of the distance to the focus to the distance to the directrix is a constant value. The lines of hyperbola and ellipse are determined by their foci. The equivalence of different definitions for conical sections is commented.

**Keywords:** mathematical notions; conic sections; ellipse; parabola; hyperbola; focus; directrix; eccentricity; computer visualization

✉ **Marin Marinov**  
Computer Science Department  
New Bulgarian University  
Sofia, Bulgaria  
E-mail: mlmarinov@nbu.bg

✉ **Petya Asenova**  
Computer Science Department  
New Bulgarian University  
Sofia, Bulgaria  
E-mail: mlmarinov@nbu.bg