

ПРЕБРОЯВАНЕ НА ПРЕСЕЧНИ ТОЧКИ НА ОТСЕЧКИ И ПРАВИ

Юлия Кръстева

Резюме. В настоящата бележка е разгледан урок по комбинаторика с ученици от 11. клас.

Keywords: combinatorics, line, segment, intersection point

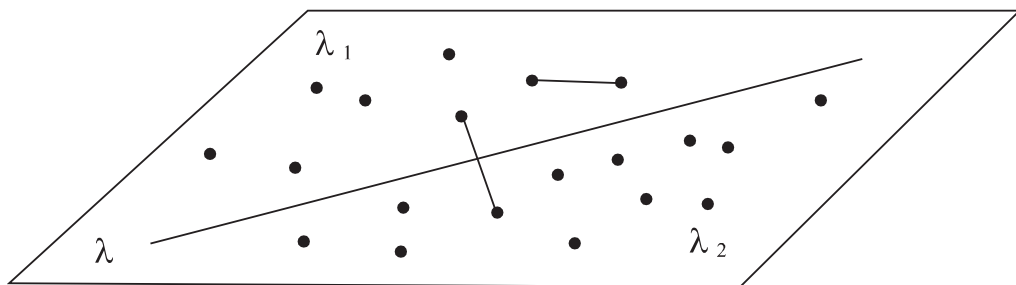
Тук представяме един урок в 11. клас на ПМГ “Акад. Б. Петканчин”, гр. Хасково. Темата е “Преброяване на пресечни точки на отсечки и прави”. Учениците са изучавали раздел “Комбинаторика” в края на 10. клас в часовете по математика – задължителна подготовка, второ равнище. Те познават и умеят да разграничават съединения без повторения в конкретна ситуация и да ги пресмятат по правилото за събиране и умножение на възможности. Знаят и могат да решават комбинаторни задачи чрез изписване на всички варианти с помощта на подходящо избрани средства, умеят да преценяват рационалност и целесъобразност при избор, както и да прилагат елементи от формалната логика при броене. В началото на 11. клас е направен преговор върху темата и са решени геометрични задачи с комбинаторен характер. Намиран е броят на отсечките, правите, триъгълниците и четириъгълниците, определени от даден брой точки. Решени са и задачи за пресичане на прави.

Една от основните цели на урока е да се разбере, че докато всеки две прави в една равнина, които не са успоредни помежду си, имат обща точка, то не е така с отсечките: ако две отсечки лежат върху две пресичащи се прави, не следва, че и самите отсечки се пресичат (имат обща вътрешна точка). В този урок броим общите точки на отсечки.

Най-напред припомняме, че ако в равнина λ е взета права a , то правата разделя равнината на две полуравнини λ_1 и λ_2 с контур a . За всеки две точки от λ_1 (или λ_2) отсечката, определена от тях, няма обща точка с правата a . В същото време отсечката, определена от произволна точка от λ_1 и произволна точка от λ_2 , пресича правата a . С помощта на това свойство разглеждаме няколко задачи.

Задача 1. Права a от равнина λ разделя равнината на две полуравнини λ_1 и λ_2 . В λ_1 и λ_2 са дадени съответно n и m на брой точки, като никои три от точките в която и да е от двете полуравнини не лежат на една права. Всеки две от всичките $n + m$ точки са свързвани с отсечка. Колко са пресечните точки на така получените отсечки и правата a ?

Решение: Учениците използваха казаното преди задачата и стигнаха до извода, че трябва да се намери броя на отсечките, единият край на които е в λ_1 , а другият – в λ_2 (фигура 1).



Фигура 1

Фиксираме една точка от λ_1 и я свързваме с всяка точка от λ_2 . Така се получават m на брой отсечки. Тъй като всички точки от λ_1 са n на брой, то отсечките с единия край в λ_1 и другия край в λ_2 са $m.n$ на брой. Следователно търсените пресечни точки са $m.n$.

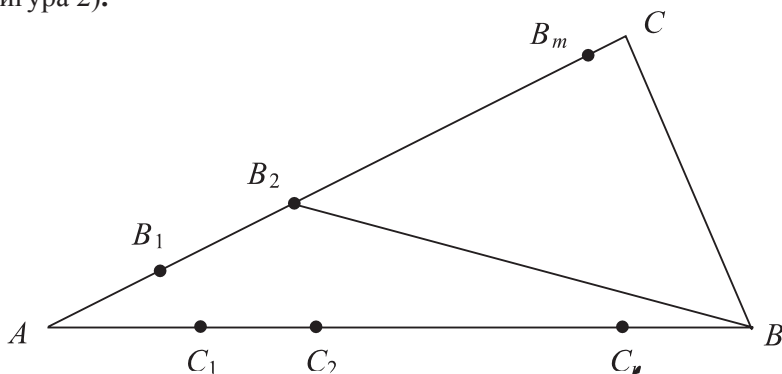
Задача 2. В една равнина са дадени $2n$ ($n \geq 1$) точки и права a , която не минава през никоя от тях. Да се докаже, че a пресича не повече от n^2 отсечки с краища измежду дадените точки.

Решение: Имаше известно притеснение у учениците за това в коя от полуравнините са дадените $2n$ на брой точки. След дискусия, водена от учителя, бяха направени следните разглеждания: Щом никоя от точките не е от правата a , то те са или само в една от полуравнините относно a , или има точки и в двете полуравнини. В първия случай нито една от отсечките, определени от дадените точки, няма обща точка с правата a , с което твърдението е доказано. Във втория случай да предположим, че m ($m < 2n$) на брой точки са в едната полуравнина, а останалите $2n - m$ са в другата. Ако M е произволна точка от първата полуравнина и M се свърже с всяка точка от втората полуравнина, ще се получат $2n - m$ отсечки, всяка от които пресича правата a . Тъй като в първата полуравнина има m на брой точки, то всички

отсечки, които пресичат a , ще бъдат $m(2n - m)$ на брой. Трябва да сравним числата $m(2n - m)$ и n^2 . За целта образуваме разликата $n^2 - m(2n - m)$. Преработваме тази разлика и получаваме $n^2 - m(2n - m) = n^2 - 2mn + m^2 = (n - m)^2 \geq 0$. Последното показва, че $n^2 \geq m(2n - m)$, с което твърдението е доказано.

Задача 3. Върху едната страна на $\triangle ABC$ са отбелязани m точки, а върху една от другите две страни – n точки. Краищата на третата страна са съединени с отсечки с отбелязани точки от срещуположната страна. В колко точки се пресичат тези отсечки?

Решение: Нека върху страната AB са отбелязани n на брой точки, които означаваме с $C_1, C_2, \dots, C_n$, а нека отбелязаните точки върху страната AC са $B_1, B_2, \dots, B_m$ (фигура 2).

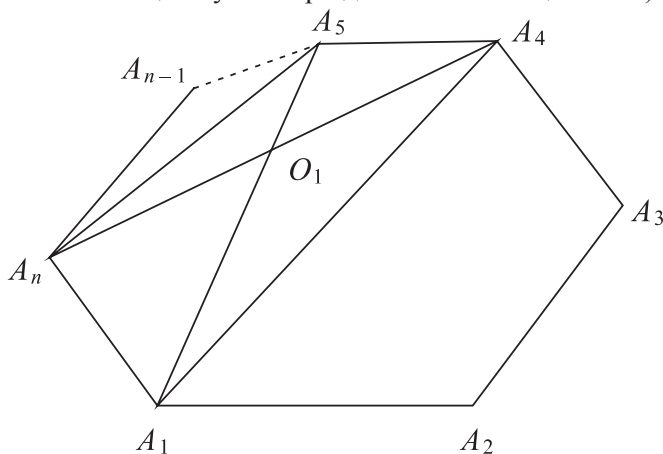


Фигура 2

Учениците установиха, че върхът B може да се свърже с отбелязаните точки от страната AC чрез m на брой отсечки ($BB_1, BB_2, \dots, BB_m$), а върхът C – с точките от страната AB с n на брой отсечки ($CC_1, CC_2, \dots, CC_n$). След дискусия върху условието на задачата и върху това, което се търси, всички разбраха, че върхът C и всяка от точките $CC_1, CC_2, \dots, CC_n$ са в различни полуравнини относно всяка една от правите $BB_1, BB_2, \dots, BB_m$. Оттук те направиха извода, че получените n отсечки се пресичат с всяка една от отсечките $BB_1, BB_2, \dots, BB_m$. Следователно броят на търсените пресечни точки е $m \cdot n$.

Задача 4. Даден е изпъкнал n -ъгълник, за който никои три негови диагонала не се пресичат в една точка (вътрешна за n -ъгълника). Намерете пресечните точки на диагоналите на n -ъгълника.

Решение: Учениците се насочиха към намиране броя на диагоналите на n -ъгълника. Едното предложение беше от числото C_n^2 (което е броят на всички страни и диагонали на n -ъгълника, т.е. броят на комбинациите на двойките върхове) да се извади броят на страните n . Другото предложение беше да се вземе предвид, че всеки връх може да се свърже с останалите $n - 3$ върха чрез диагонали, а след това полученото произведение $n(n-3)$ да се раздели на 2 поради двойното преброяване на диагоналите по този начин. Така и по двата начина получаваме, че диагоналите са $\frac{n(n-3)}{2}$. Липсваше обаче идея как да се установи кои от тези отсечки имат обща точка. Учениците бяха насочени към следните разглеждания: Нека O_1 е пресечна точка на двойката диагонали A_1A_5 и A_4A_n (фигура 3). Точката O_1 може да се разглежда като пресечна точка на диагоналите в четириъгълника $A_1A_4A_5A_n$. Затова търсеното число пресечни точки може да се определя от броя на групите от по четири точки от дадените n точки, т.е. $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Тук взимаме предвид условието на задачата, от което следва, че измежду преброените точки няма съвпадащи (в противен случай биха съществували три диагонала с обща точка.)



Фигура 3

По-нататък разсъждавахме с учениците върху следния въпрос: От познатите правилни n -ъгълници има ли такива, които изпълняват условието на задача 4? Установихме, че правилният петоъгълник изпълнява условието на задачата, а правилният шестоъгълник – не.

Задача 5. (сп. „Математика”, бр. 1, 1965, стр. 37) В равнината са дадени пет точки така, че измежду правите, определени от кои да е две от тези точки, няма

успоредни, перпендикулярни или съвпадащи. През всяка петте точки са прекарани перпендикуляри към правите, определени от кои да е две от останалите четири точки. Какъв е максималният брой пресечни точки на всичките перпендикуляри, като не се броят дадените пет точки (задачата е от VI MOM, Москва, 1964 г.)

Решение: За да обосновем разсъжденията, означаваме дадените точки с A, B, C, D и E . Учениците предложиха да намерим броя на триъгълниците, определени от дадените точки. Те са $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$. Ясно е, че височините в тези триъгълници са измежду въпросните перпендикуляри. С помощта на учителя беше направено следното разсъждение: Избираме една от петте точки (например A) и разглеждаме правите, определени от останалите четири точки. Броят на тези прави е $C_4^2 = 6$. Толкова са и перпендикулярите към тях, спуснати от избраната точка A . Тогава перпендикулярите от всяка от дадените точки към правите, определени от останалите четири, са $5 \cdot 6 = 30$. Нека сега d_1 е един от перпендикулярите, спуснат от A . Тъй като по условие A не се брои за пресечна точка, то онези от търсените пресечни точки, които са върху d_1 , ще се получат от пресичането на d_1 с останалите перпендикуляри, които са $4 \cdot 6 = 24$. От тези 24 перпендикуляра точно два са успоредни на d_1 , защото са спуснати към една и съща права, към която е спуснат и d_1 . Следователно d_1 ще се пресече с точно 22 от другите перпендикуляри, т.е. върху d_1 ще има 22 пресечни точки (без A). От казаното дотук следва, че общият брой на пресечните точки на перпендикулярите е $22 \cdot 30 = 660$. Някои от тези точки са ортоцентрове в преброените по-горе 10 триъгълника. При това всеки ортоцентър е броен шест пъти. Наистина, ако височините в един от триъгълниците са d_1, d_2 и d_3 , то ортоцентърът на този триъгълник се брои като пресечна точка на d_1 и d_2 , d_1 и d_3 , d_2 и d_1 , d_2 и d_3 , d_3 и d_1 , d_3 и d_2 . Заклучаваме, че за търсените пресечни точки остават $660 - 6 \cdot 10 = 600$. Всяка една от тези точки обаче се брои два пъти. Например, пресечната точка на d_1 и d_2 е броена и върху d_1 , и върху d_2 . Така получаваме числото 300. Накрая прибавяме десетте ортоцентъра и получаваме, че търсеният брой пресечни точки е равен на 310.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паскалева, З., Паскалев, Г., Алашка, М. (2008). *Математика 7. клас*. София: Архимед, ISBN 978-954-779-087-2.
2. Паскалев, Г., Паскалева, З. (2001). *Математика 10. клас (второ равнище)*. София: Архимед, ISBN 954-90761-2-1.

COUNTING OF INTERSECTION POINTS OF SEGMENTS AND LINES

Abstract. The present note considers a class on Combinatorics with 11th grade students.

✉ Julia Krasteva
Teacher in Mathematics
Mathematical school “Acad. B. Petkanchin”
Haskovo
e-mail: ulia_krusteva@abv.bg