

ПОСТРОЯВАНЕ НА ОСТА НА КРЪСТОСАНИ ПРАВИ

Митко Кунчев
Русе

Резюме. Статията разглежда метод за построяване на оста на две кръстосани прави, свързани с даден многостен. Методът се основава на построяване на пресечната права на две равнини, които са съответно перпендикулярни на двете кръстосани прави. Оста се построява успоредна на тази права, така че да пресича кръстосаните прави. Разгледани са примери за построяване на ос на кръстосани прави в куб, права триъгълна призма и правилен тетраедър.

Ключови думи: ос; кръстосани прави; многостен; построение

1. Въведение

Решаването на задачи за построение в пространството е описано в различни учебници по математика за профилирана подготовка, например (Paskalev&Paskaleva 2013). Задачата за построяване на оста на кръстосани прави е разгледана в (Naralampiev 1983). Създаването на STEM центрове в училищата и наличието на компютърни кабинети дава възможност за провеждане на интересни уроци за създаване на сложни геометрични чертежи с помощта на софтуер, например GeoGebra. Практическо занятие за намиране на разстоянието между кръстосани прави с използване на GeoGebra 3D е описано в (Zamkovoy et al. 2020). Настоящата статия предлага метод за построяване оста на кръстосани прави, свързани с многостени. Решаването на построятелни задачи е важно за обучението на учениците, защото те разбират по-добре свойствата на фигурите и формират умения за прилагане на знанията по геометрия в практиката.

2. Помощни резултати

При решаване на задачи за многостен изобразяваме успоредната му проекция в равнина. Ако е даден такъв чертеж, то върху него с линийка и пергел може да се извършат следните построения:

1. да се построи права, определена от две дадени точки;
2. да се построи общата точка на две дадени пресичащи се прави;
3. да се построи права през дадена точка, която е успоредна на дадена права;

4. да се построи пресечната права на две дадени равнини, които имат две общи точки;
5. да се построи пробода на дадена права с дадена равнина, ако тя пресича права от равнината;
6. да се построи точка, която е среда на дадена отсечка.

Ще използваме, че една равнина е определена от три неколинеарни точки, от две успоредни прави или от две пресичащи се прави.

Ос на две кръстосани прави се нарича права, която ги пресича и е перпендикулярна на всяка от тях. За всяка двойка кръстосани прави съществува единствена ос.

Помощно твърдение. Дадени са две кръстосани прави AB и CD . Ако равнината α е перпендикулярна на AB , а равнината β е перпендикулярна на CD , то α пресича β и тяхната пресечница е успоредна на оста на AB и CD .

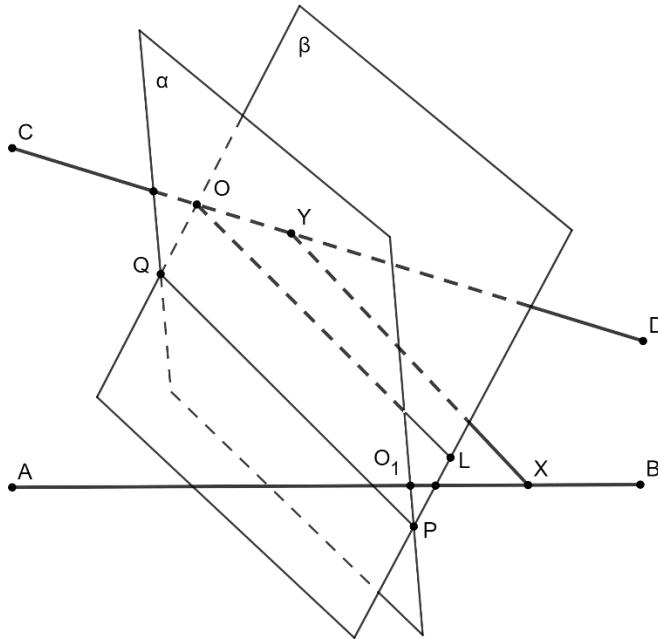
Доказателство. За две произволни равнини има точно две възможности: да са успоредни или да се пресичат. Да допуснем, че α и β са успоредни (Фигура 1). Дадено е, че AB е перпендикулярна на α , следователно AB е перпендикулярна и на β . По условие CD е перпендикулярна на β , следователно AB и CD са успоредни, което противоречи на даденото, че са кръстосани. Следователно не е възможно α и β да са успоредни.

Нека да означим пресечницата на α и β с PQ , а оста на AB и CD – с XY . Остава да докажем, че PQ и XY са успоредни. Ще докажем по-общо твърдение: ако a и b са кръстосани прави и правите m и n са перпендикулярни едновременно и на двете, то m и n са успоредни. За целта, да изберем произволна точка в пространството и през нея да построим две прави a_1 и b_1 , съответно успоредни на a и b . Те определят равнина, перпендикулярна на m и n , и следователно m и n са успоредни.

Описание на метода. Ще построим оста XY на две кръстосани прави AB и CD в следната последователност (Фигура 1):

1. построяваме равнина α , перпендикулярна на правата AB ;
2. построяваме равнина β , перпендикулярна на правата CD ;
3. построяваме пресечната права PQ на равнините α и β ;
4. построяваме пробода на правата CD с равнината β – точка O ;
5. през точка O построяваме права OL , успоредна на PQ , търсената ос XY лежи в равнината γ определена от правите CD и OL , защото XY и OL са успоредни и пресичат CD ;
6. построяваме пробода X на правата AB с равнината γ ;
7. през точка X в равнината γ построяваме права, успоредна на OL , която пресича CD в точка Y ;
8. построената права XY е търсената ос.

Доказателството, че това е търсената ос, следва от помощното твърдение и от построеното – XY пресича двете кръстосани прави и е перпендикулярна на тях, защото е успоредна на пресечницата на двете равнини α и β .



Фигура 1

3. Задачи

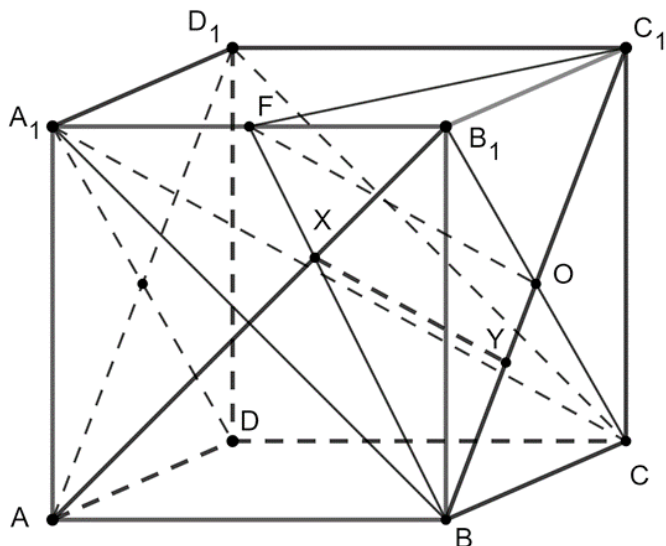
Ще разгледаме няколко задачи за построяване на оста на кръстосани прави, в решенията на които се използва описаният метод.

Пример 1. Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да се построи оста XY на кръстосаните прави AB_1 и BC_1 .

Решение (виж Фигура 2). Ще следваме описаната в метода последователност.

1. Равнината α , която е перпендикулярна на AB_1 , е $(BCD_1 A_1)$, защото очевидно $A_1 B$ и BC са перпендикулярни на AB_1 .
2. Равнината β , която е перпендикулярна на BC_1 , е $(A_1 B_1 CD)$, защото очевидно $A_1 B_1$ и $B_1 C$ са перпендикулярни на BC_1 .
3. Построяваме пресечницата на α и β – правата $A_1 C$. Тя е успоредна на търсената ос.
4. Построяваме пробода на BC_1 с β , който е пресечната точка на BC_1 и CB_1 – точка O .
5. През точка O в β построяваме права OF , успоредна на $A_1 C$. Тъй като O е среда на $B_1 C$, то F е среда на $A_1 B_1$ и OF е средна отсечка в триъгълник $A_1 CB_1$. Равнината $(BC_1 F)$ е равнината γ от описанието на метода.

6. Построяваме пробода на правата AB_1 с γ – точка X , като пресечница на правите AB_1 и BF .
7. През точка X в равнината γ построяваме права, успоредна на OF (или A_1C), която пресича BC_1 в точка Y .
8. Построената права XY е търсената ос.



Фигура 2

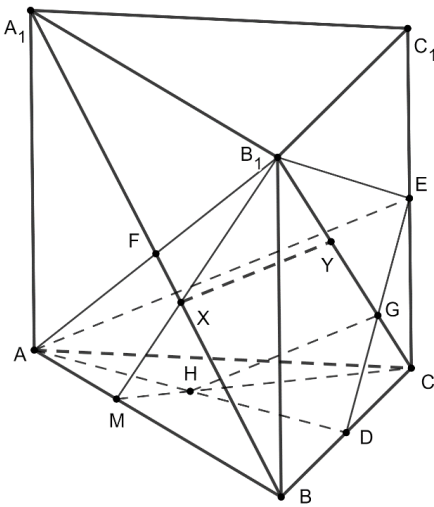
Пример 2. Дадена е права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$, на която всички ръбове са равни. Да се построи оста XY на кръстосаните прави A_1B и B_1C .

Решение (виж Фигура 3а).

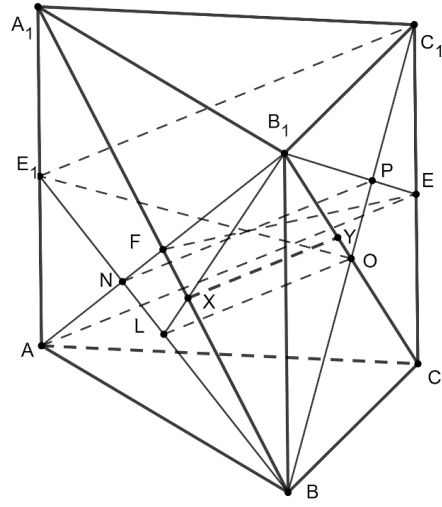
1. Построяваме точка E – среда на отсечката CC_1 . Равнината α , която е перпендикулярна на A_1B , е (AEB_1) , защото AB_1 е перпендикулярна на A_1B – диагонали в квадрат, а FE е перпендикулярна на A_1B – медиана към основата на равнобедрения триъгълник A_1BE .
2. Построяваме точка D – среда на отсечката BC . Равнината β , която е перпендикулярна на B_1C , е (ADE) , защото B_1C е перпендикулярна на AD и на DE . Правата B_1C е перпендикулярна на AD , защото лежи в равнината (BCC_1B_1) , която е перпендикулярна на AD . Правата B_1C е перпендикулярна на DE , защото DE е средна отсечка в триъгълник BCC_1 и следователно е успоредна на BC_1 , а BC_1 и B_1C са диагонали в квадрат.

3. Пресечницата на α и β е правата AE и тя е успоредна на търсената ос.
 4. Построяваме пробода на B_1C с β – точка G , която е пресечница на B_1C и DE .
 5. През точка G в β построяваме права GH , успоредна на AE . Отсечката GH е средна отсечка в триъгълник ADE . Равнината (HCB_1) е равнината γ от описанието на метода. Правата CH пресича AB в точка M – пробода на γ с AB . Построяваме пробода на правата A_1B с γ – точка X , която е пресечната точка на правите A_1B и MB_1 .
 6. През точка X в равнината γ построяваме права, успоредна на GH (или AE), която пресича CB_1 в точка Y .
- Построената права XY е търсената ос.

На Фигура 3б е дадено друго решение на задачата, като равнините, които са перпендикулярни на двете кръстосани прави, са (AEB_1) и (BC_1E_1) , а тяхната пресечница е PN . Точка E_1 е среда на отсечката AA_1 .



Фигура 3а



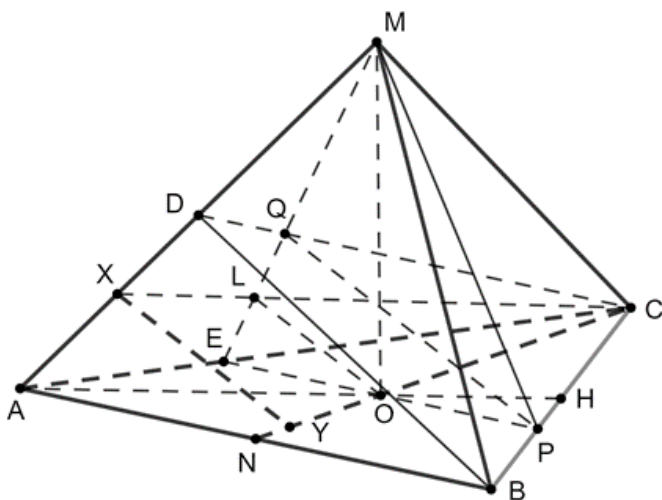
Фигура 3б

Пример 3. Даден е правилен тетраедър $ABCM$ и точка N е среда на AB . Да се построи оста XY на правите AM и CN .

Решение (виж Фигура 4).

1. Построяваме последователно: точка H – среда на отсечката BC , точка D – среда на отсечката AM , точка O – пресечна точка на AH и CN . Точка O е ортогоналната проекция на върха M в равнината (ABC) . Построяваме права EP през точка O , успоредна на AB .

2. Построяваме равнината (EPM), която е перпендикулярна на CN , защото CN е перпендикулярна на MO и на EP .
3. Построяваме равнината (BCD), която е перпендикулярна на AM , защото AM е перпендикулярна на BD и на CD .
4. Построяваме правата PQ , която е пресечница на равнините (EPM) и (BCD). Тя е успоредна на оста на правите AM и CN .
5. През точка O , която е прободът на CN с равнината (EPM), построяваме права, успоредна на PQ , която пресича EM в точка L . Следователно OL е успоредна на търсената ос. В равнината (NCL) лежат едната от дадените кръстосани прави – CN , и права, която е успоредна на оста – OL .
6. Построяваме пробода на AM с равнината (NCL) – точка X , като построяваме пресечната точка на CL и AM в равнината (ACM).
7. В равнината (NCL) през точка X построяваме права, успоредна на OL , която пресича CN в точка Y .
8. Построената права XY е оста на кръстосаните прави AM и CN .



Фигура 4

4. Задачи за упражнение

Задача 1. Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да се построи оста XY на кръстосаните прави BC_1 и DB_1 .

Задача 2. Дадена е права триъгълна призма $ABCA_1 B_1 C_1$, на която всички ръбове са равни. Да се построи оста XY на кръстосаните прави:

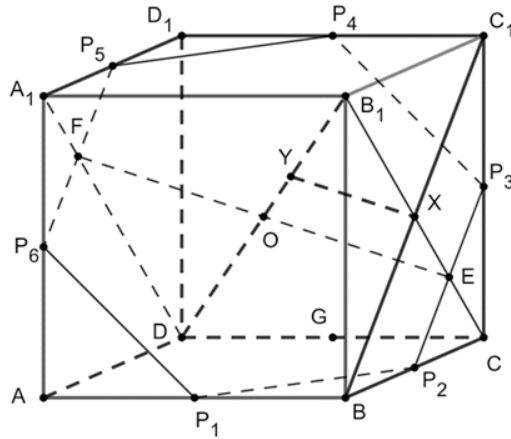
а. AB_1 и BC ;

б. AM и CN , ако M е среда на BB_1 и N е среда на $A_1 C_1$.

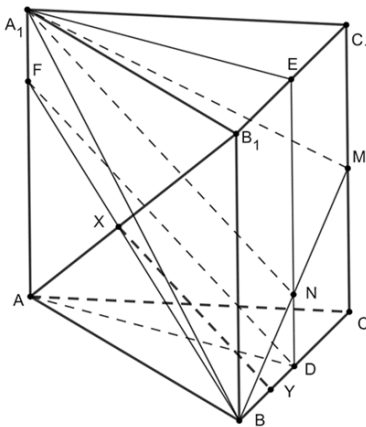
Задача 3. Даден е правилен тетраедър $ABCM$.

- Да се построи оста XU на кръстосаните прави AD и BE , където точка D е среда на отсечката BM , а точка E е среда на отсечката AM .
- Да се построи оста XU на кръстосаните прави CE и MO , където точка E е среда на отсечката CM , а точка O е ортогоналната проекция на върха M в равнината (ABC) .

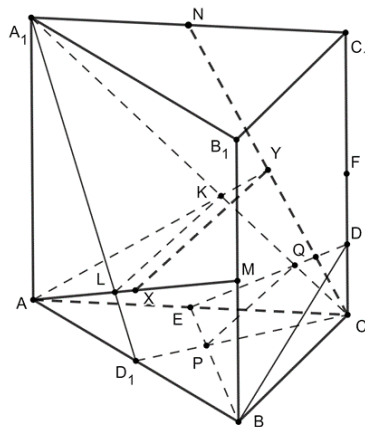
5. Решения на задачите за упражнение



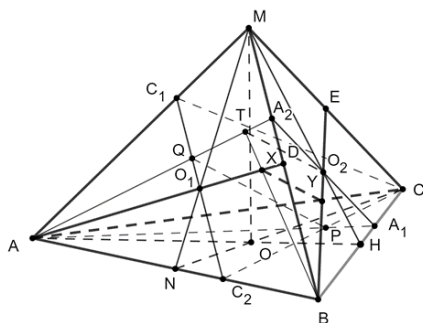
Фигура 5. Задача 1



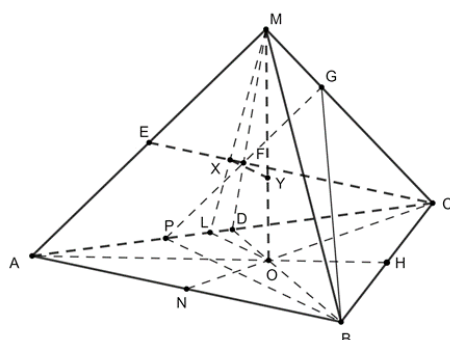
Фигура 6. Задача 2а



Фигура 7. Задача 2б



Фигура 8. Задача 3а



Фигура 9. Задача 3б

ЛИТЕРАТУРА

- ПАСКАЛЕВ, Г., ПАСКАЛЕВА, З., 2013. *Математика – учебник за XI клас профилирана подготовка*. София: Архимед, 241 – 245 и 272 – 275.
- ЗАМКОВОЙ, С., НЕНКОВ, С., ТОДОРОВА, П., БОЖИЛОВ, А., 2020. *Математика – учебник за XI клас профилирана подготовка, Модул 1. Геометрия*. София: Клет България, 142 – 144.
- ХАРАЛАМПИЕВ, С., 1983. Ос на кръстосани прави. *Математика*, **8**, 6 – 11.

REFERENCES

- PASKALEV, G., PASKALEVA, Z., 2013. Mathematics – Textbook for Grade 11 Profile. Sofia: Arhimed, 241 – 245 and 272 – 275. [in Bulgarian]
- ZAMKOVY, S., NENKOV, S., TODOROVA, P., BOZHILOV, A., 2020. Mathematics – Textbook for Grade 11 Profile, Module 1. Geometry. Sofia: Klett Bulgaria, 142 – 144. [in Bulgarian]
- HARALAMPIEV, S., 1983. Common perpendicular of skew lines. *Matematika*, **8**, 6 – 11. [in Bulgarian]

CONSTRUCTING THE COMMON PERPENDICULAR OF TWO SKEW LINES

Abstract. The article presents a method for constructing the common perpendicular of two skew lines in a given polyhedron. The method is based on constructing the intersecting line of two planes that are respectively perpendicular to the two skew lines. The common perpendicular is constructed parallel to this line so that it intersects the skew lines. Examples of constructing the common perpendicular of skew lines in a cube, a right triangular prism, and a regular tetrahedron are considered.

Keywords: common perpendicular; skew lines; polyhedron; constructing

✉ **Mr. Mitko Kunchev**
66, Zgorigrad St.
7000 Ruse, Bulgaria
E-mail: mitko@kunchev.info