

ПОЛИНОМИ С КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА МЕДИТАНГЕНЦИАЛНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

¹⁾ Сава Гроздев, ²⁾ Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ Висше военноморско училище „Никола Вапцаров“ – Варна

Резюме. Изведена е геометрична връзка между корените на един специален вид полиноми от n -та степен и корените на техните производни.

Ключови думи: полином; корени от многочлен; елипса; фокус; център

В следващите редове ще разгледаме една забележителна връзка между корените на един вид полиноми от n -та степен, корените на съответните им производни и специални елипси, породени от специалния начин, по който са разположени корените на разглежданите полиноми в комплексната равнина.

Една известна геометрична връзка между корените на полиномите от трета степен с неколинеарни корени и корените на съответните им производни се изразява със следната:

Теорема 1. Ако корените на един полином $P(z)$ от трета степен на комплексна променлива с комплексни коефициенти се намират във върховете на триъгълник Δ , то корените на производната $P'(z)$ на $P(z)$ се намират във фокусите на елипсата, допираща се до страните на Δ в техните среди. (Nenkov, 2010)

Подобна забележителна геометрична връзка съществува между корените на един вид полиноми от четвърта степен и корените на съответните им производни. Тази връзка се изразява със следната

Теорема 2. Ако корените на един полином $P(z)$ от четвърта степен на комплексна променлива с комплексни коефициенти се намират във върховете на успоредник $A_1A_2A_3A_4$, то корените на производната $P'(z)$ на $P(z)$ се намират във фокусите и центъра на елипсата, допираща се до страните на $A_1A_2A_3A_4$ в техните среди. (Grozdev & Nenkov, 2018)

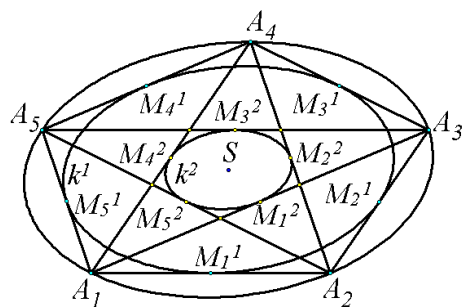
Формулираните две теореми се отнасят за полиномите от трета и четвърта степен с корени, разположени във върховете съответно на триъгълник и успоредник (Nenkov, 2010) и (Grozdev & Nenkov, 2018). Те могат да се обобщят, като се разгледа един специален клас многоъгълници, който обхваща триъгълника и успоредника като свои елементи. Този клас се състои от

многоъгълници, които са едновременно вписани и описани за концентрично хомотетични елипси и се определя по следния начин. Нека $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) е произволен изпъкнал многоъгълник, за който $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ са средите съответно на страните $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$. Ако $A_1 A_2 \dots A_n$ притежава вписана елипса k , такава, че допирните точки на k със страните на $A_1 A_2 \dots A_n$ са B_j ($j=1, 2, \dots, n$), ще казваме, че $A_1 A_2 \dots A_n$ е *медитангенциален многоъгълник* за k , а k ще наричаме *медитангенциална елипса* за $A_1 A_2 \dots A_n$.

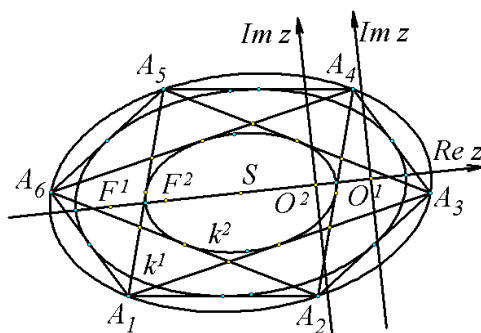
Някои свойства на медитангенциалните многоъгълници са описани в (Nenkov, 2009). В (Nenkov, 2009) е показано, че ако n точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ са върхове на медитангенциален n -ъгълник, те са върхове на точно $m = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

медитангенциални n -ъгълника, единият от които е обикновен изпъкнал многоъгълник, а останалите са звездовидни многоъгълници. Следователно тези n точки пораждат m медитангенциални елипси k^u ($u=1, 2, \dots, m$). Ще покажем, че именно елипсите k^u ($u=1, 2, \dots, m$) са свързващите елементи между корените на полином от n -та степен с корени във върховете на медитангенциален n -ъгълник $A_1 A_2 \dots A_n$ и неговата производна. По този начин ще получим обобщение на резултатите, формулирани в теорема 1 и 2.

Поради това, че елипсите k^u ($u=1, 2, \dots, m$) са концентрични, те притежават общ център S . Затова, ако n е четно число, многоъгълникът $A_1 A_2 \dots A_n$ е централно симетричен спрямо S .



Фигура 1



Фигура 2

Тъй като елипсите k^u ($u=1, 2, \dots, m$) са хомотетични, те имат един и същ числен ексцентрицитет e . Нека k^u има за фокус точката O^u , а p^u е нейният фокален параметър. Означаваме с M_j^u , при $j=1, 2, \dots, n-u$, средата на отсечката $A_j A_{j+u}$, а при $j=n-u+1, n-u+2, \dots, n$ – средата на $A_j A_{j+u-n}$ ($u=1, 2, \dots, m$) (фиг. 1).

Спрямо Гаусовата координатна система K^u от фиг. 2 според резултатите от (Nenkov, 1998) афиксите на точките M_j^u и A_j ($j=1,2,\dots,n; u=1,2,\dots,m$) се изразяват съответно с формулите:

$$(1) \quad m_j^u = \frac{2p^u}{e \cdot (t_j^u)^2 + 2t_j^u + e}, \quad (j=1,2,\dots,n; u=1,2,\dots,m),$$

$$(2) \quad a_j = \frac{2p^u}{e \cdot t_{n-u+j}^u t_j^u + t_{n-u+j}^u + t_j^u + e}, \quad (j=1,2,\dots,u; u=1,2,\dots,m),$$

$$a_j = \frac{2p^u}{e \cdot t_{j-u}^u t_j^u + t_{j-u}^u + t_j^u + e}, \quad (j=u+1, u+2, \dots, n; u=1,2,\dots,m),$$

където $|t_j^u| = 1$ ($j=1,2,\dots,n; u=1,2,\dots,m$).

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини, така че точките M_j^u ($j=1,2,\dots,n; u=1,2,\dots,m$) да бъдат среди на отсечките, върху които са определени от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тъй като простото отношение на произволни три точки A_k, A_l и M_j^u от една права се изразява с равенството $\frac{\overline{A_k M_j^u}}{\overline{A_l M_j^u}} = \frac{a_k - m_j^u}{a_l - m_j^u}$, от (1) и (2) след несложни пресмятания се получават равенствата

$$(3) \quad \frac{\overline{A_j M_j^u}}{\overline{A_{j-u} M_j^u}} = \frac{t_{n+j-u}^u}{t_{j+u}^u} \cdot \frac{t_j^u}{t_j^u} \cdot \frac{a_j}{a_{j+u}}, \quad (j=1,2,\dots,u; u=1,2,\dots,m),$$

$$\frac{\overline{A_j M_j^u}}{\overline{A_{j+u} M_j^u}} = \frac{t_{j+u}^u}{t_{j+u}^u} \cdot \frac{t_j^u}{t_j^u} \cdot \frac{a_j}{a_{j+u}}, \quad (j=u+1, u+2, \dots, n-u; u=1,2,\dots,m),$$

$$\frac{\overline{A_j M_j^u}}{\overline{A_{j+u-n} M_j^u}} = \frac{t_{j+u-n}^u}{t_{j+u-n}^u} \cdot \frac{t_j^u}{t_j^u} \cdot \frac{a_j}{a_{j+u-n}}, \quad (j=n-u+1, n-u+2, \dots, n; u=1,2,\dots,m).$$

Сега да разгледаме равенствата

$$(4) \quad \begin{aligned} a_j &= -\frac{t_{n-u+1}^u - t_1^u}{t_j^u - t_{n+j-u}^u} \cdot a_1, (j=1, 2, \dots, u; u=1, 2, \dots, m), \\ a_j &= -\frac{t_{n-u+1}^u - t_1^u}{t_j^u - t_{j-u}^u} \cdot a_1, (j=u+1, u+2, \dots, n; u=1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Като заместим равенствата (4) в десните части на (3), установяваме, че съответните прости отношения са равни на -1 . Това означава, че равенствата (4) определят точките A_j ($j=1, 2, \dots, n$), така че M_j^u и ($j=1, 2, \dots, n; u=1, 2, \dots, m$) да са средите на съответните отсечки, върху които лежат.

Сега да разгледаме нормирания полином $P^u(z)$ ($u=1, 2, \dots, m$) от степен n на комплексна променлива с комплексни коефициенти, корените на който са разположени във върховете на един от медитангенциалните n -ъгълници $A_1 A_2 \dots A_n$. Коефициентът a^u ($u=1, 2, \dots, m$) пред z според формулите на Виет е сума на n събираеми, получени от всевъзможните произведения на числата $a_1, a_2, \dots, a_n$, взети по $n-1$ във всяко събираемо. Числото a^u можем да представим по следния начин $a^u = S_{n-1} + a_2 a_3 \dots a_n$, където S_{n-1} е сумата на всичките $n-1$ произведения, които съдържат множител a_1 ($u=1, 2, \dots, m$). Всяко събираемо на S_{n-1} според (4) има знаменател, на който липсва само един от знаменателите на $a_2, a_3, \dots, a_n$. Затова след привеждане към общ знаменател в числителя на S_{n-1} участва сумата на тези знаменатели, която е равна на $t_{n-u+1}^u - t_1^u$ ($u=1, 2, \dots, m$). Ако означим с $\prod$ произведението на

$$\text{всички знаменатели в (4), получаваме } S_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2} (t_{n-u+1}^u - t_1^u)^{n-1}}{\prod} \cdot a_1^{n-1} \text{ и}$$

$$a_2 a_3 \dots a_n = \frac{(-1)^{n-1} (t_{n-u+1}^u - t_1^u)^{n-1}}{\prod} \cdot a_1^{n-1}. \text{ Следователно } a^u = 0 \text{ (} u=1, 2, \dots, m \text{)}.$$

От последното равенство е ясно, че производната на $P^u(z)$ има корен $z=0$. Следователно производната на $P^u(z)$ има корен във фокуса O^u на k^u ($u=1, 2, \dots, n$). Сега ще отбележим една лема, доказана в (Grozdev & Nenkov, 2018).

Лема. Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури.

От тази лема следва, че произволен полином $P(z)$ със свойствата на $P^u(z)$ ($u=1, 2, \dots, n$) има корени във всички фокуси O^u ($u=1, 2, \dots, n$).

По аналогичен начин, ако разгледаме координатна система с център в другия фокус F^u на k^u , получаваме, че производната $P'(z)$ има корен и в точ-

ките F'' ($u = 1, 2, \dots, n$). Накрая остава да вземем предвид, че когато n е четно число, то $A_1 A_2 \dots A_n$ е симетричен спрямо точката S . Затова полиномът $P'(z)$ в този случай има корен и в точката S (Grozdev & Nenkov, 2018).

По този начин доказахме следната

Теорема 3. *Ако един полином $P(z)$ от степен n на комплексна променлива с комплексни коефициенти има корени във върховете на медитангенциален n -ъгълник $A_1 A_2 \dots A_n$, то корените на производната $P'(z)$ на $P(z)$ се намират във фокусите на всички медитангенциални елипси, породени от върховете на $A_1 A_2 \dots A_n$, и в центъра на $A_1 A_2 \dots A_n$, когато n е четно.*

От тази теорема непосредствено се получава следното:

Следствие 1. *Ако корените на полином $P(z)$ са разположени във върховете на медитангенциален многоъгълник, то корените на производната му $P'(z)$ лежат на една права.*

От доказателството на теорема 3 се вижда, че нищо няма да се промени, ако се разгледа полином, който има корени с еднакви кратности във върховете на $A_1 A_2 \dots A_n$. Затова е изпълнено следното:

Следствие 2. *Ако един полином $P(z)$ от степен $n \cdot p$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има p -кратен корен във върха A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) на медитангенциален многоъгълник $A_1 A_2 \dots A_n$, то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени във фокусите на всички медитангенциални елипси, породени от върховете на $A_1 A_2 \dots A_n$ и в центъра на $A_1 A_2 \dots A_n$, когато n е четно.*

По този начин следствие 2 се оказва обобщение на теорема 3.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & В. Ненков (2018). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник. *Математика и информатика*, 61, 3, 283 – 293.
- Гроздев, С. & В. Ненков. (2019). Полиноми с кратни корени във върховете на успоредник. *Математика и информатика*, 62, 4, 435 – 443.
- Ненков, В. (2010). Една връзка между нереални корени и реална елипса, *Математика плюс*, 2, 61 – 63.
- Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов. (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.
- Ненков, В. (2009). Няколко афинно породени свойства на елипсата, *Математика плюс*, 2, 54 – 59,
- Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика*, 5, 54 – 59.

REFERENCES

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2018). Polynomials of fourth degree with roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics*, 61, 3, 283 – 293.
- Grozdev, S & V. Nenkov (2019). Polynomials with multiple roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics*, 62, 4, 435 – 443.
- Nenkov, V. (2010). A relation between non-real roots and a real ellipse. *Mathematics plus*, 2, 61 – 63.
- Genov, G., S. Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo.
- Nenkov, V. (2009). Several affine generated properties of the ellipse, *Mathematics Plus*, 2, 54 – 59.
- Nenkov, V. (1998). Inscribed conics in a triangle, Конични сечения, вписани в триъгълник, *Mathematics and informatics*, 5, 54 – 59.

POLYNOMIALS WITH ROOTS IN THE VERTICES OF MEDI-TANGENTIAL POLYGONS

Abstract. A geometric relation is derived concerning the roots of a special type polynomials of n -th degree and the roots of their derivatives.

Keywords: polynomial, roots of polynomial, ellipse, focus, centre

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg