

ПОЛИНОМИ С КОРЕНИ В ЧЕТИРИ СПЕЦИАЛНО РАЗПОЛОЖЕНИ КОЛИНЕАРНИ ТОЧКИ

¹⁾Сава Гроздев, ²⁾Веселин Ненков

¹⁾Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ВВМУ „Никола Вапцаров“ – Варна

Резюме. Изведена е геометрична връзка между корените на полиноми, които имат корени в четири специално разположени точки върху една права, и корените на съответните им производни. По-точно три от разглежданите точки са произволни, а четвъртата зависи по специален начин от тях. Като приложение са разгледани някои полиноми на реална променлива с реални коефициенти.

Ключови думи: полином; производна на полином; корени на полиноми; елипса

1. Увод

В (Grozdev & Nenkov, 2020) е описана геометрична връзка между един вид полиноми $P(z)$, корените на които се намират във върховете на изпъкнал четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$, и корените на съответните им производни $P'(z)$. Тази геометрична връзка съдържа пресечната точка P_0 на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$ и фокусите на подходяща елипса, вписана в $A_1A_2A_3A_4$. Възниква въпросът за възможността да се трансформира четириъгълникът по такъв начин, че върховете му да станат колинеарни точки и между корените на подходящи полиноми $P(z)$ и $P'(z)$ да съществува геометрична зависимост, свързана с елипса и специална точка. По друг начин казано, да се установи геометрична връзка между корените на $P(z)$ и $P'(z)$, когато корените на $P(z)$ се намират в четири точки A_1 , A_2 , A_3 и A_4 от една права l , така че тези точки да удовлетворяват някое специфично свойство на четириъгълника. За всеки четириъгълник е определена пресечната точка на неговите диагонали. Затова можем да търсим такова преобразуване на четириъгълника върху права, че и пресечната точка на диагоналите да има своя еквивалент върху тази права. Нещо повече, да очакваме един от корените на $P'(z)$ да се намира в тази специална точка. Тези бележки ни насочват към следващите разглеждания. Нека A_1 , A_2 , A_3 и A_4 са точки от

права l , а точките P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат върху същата права и са изпълнени равенствата

$$(1) \quad \begin{aligned} \overline{A_1 M_{12}} : \overline{A_2 M_{12}} &= -k_1 : k_2, & \overline{A_2 M_{23}} : \overline{A_3 M_{23}} &= -k_2 : k_3, \\ \overline{A_3 M_{34}} : \overline{A_4 M_{34}} &= -k_3 : k_4, & \overline{A_4 M_{41}} : \overline{A_1 M_{41}} &= -k_4 : k_1, \end{aligned}$$

където k_1, k_2, k_3 и k_4 са естествени числа.

Ако $A_1 A_2 A_3 A_4$ е изпъкнал четириъгълник, точките M_{12}, M_{23}, M_{34} и M_{41} удовлетворяват равенствата (1) и P_0 е пресечната точка на диагоналите му, то

са изпълнени равенствата $\overline{A_3 P_0} : \overline{A_1 P_0} = -k_3 : k_1$ и $\overline{A_4 P_0} : \overline{A_2 P_0} = -k_4 : k_2$. Затова

имаме и векторните равенства $\overrightarrow{OP_0} = \frac{k_3 \overrightarrow{OA_1} + k_1 \overrightarrow{OA_3}}{k_3 + k_1}$ и $\overrightarrow{OP_0} = \frac{k_4 \overrightarrow{OA_2} + k_2 \overrightarrow{OA_4}}{k_4 + k_2}$,

където O е произволна точка в пространството. Оттук следва

$$(2) \quad k_3(k_4 + k_2) \overrightarrow{OA_1} - k_4(k_3 + k_1) \overrightarrow{OA_2} + k_1(k_4 + k_2) \overrightarrow{OA_3} - k_2(k_3 + k_1) \overrightarrow{OA_4} = \vec{0}.$$

Следователно $k_3 k_4 \overrightarrow{A_1 A_2} - k_4 k_1 \overrightarrow{A_2 A_3} + k_1 k_2 \overrightarrow{A_3 A_4} - k_2 k_3 \overrightarrow{A_4 A_1} = \vec{0}$.

Тъй като точките A_1, A_2, A_3 и A_4 са колинеарни, то $k_3 k_4 \overrightarrow{A_1 A_2} - k_4 k_1 \overrightarrow{A_2 A_3} + k_1 k_2 \overrightarrow{A_3 A_4} - k_2 k_3 \overrightarrow{A_4 A_1} = 0$. Затова $k_4 = \frac{k_2(k_1 \overrightarrow{A_3 A_4} + k_3 \overrightarrow{A_1 A_4})}{k_3 \overrightarrow{A_1 A_2} + k_1 \overrightarrow{A_3 A_2}}$.

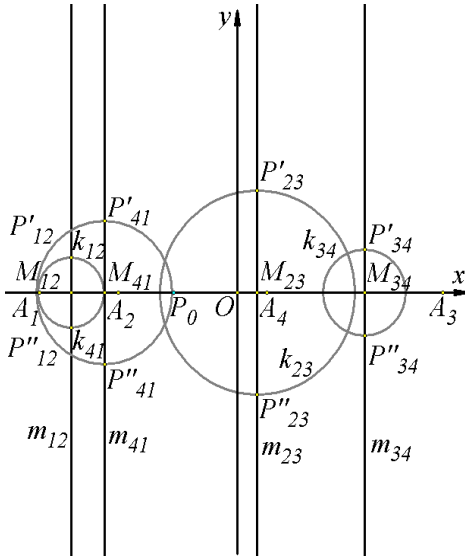
Следователно числото k_4 може да се определи еднозначно при дадени четири точки A_1, A_2, A_3 и A_4 , но невинаги то ще се окаже естествено число. Затова е по-удобно числото k_4 да е предварително известно, а точката A_4 да се построи в зависимост от точките A_1, A_2, A_3 и числата k_1, k_2, k_3, k_4 . Така от (2) имаме

$$(3) \quad \overrightarrow{OA_4} = \frac{k_3(k_4 + k_2) \overrightarrow{OA_1} - k_4(k_3 + k_1) \overrightarrow{OA_2} + k_1(k_4 + k_2) \overrightarrow{OA_3}}{k_2(k_3 + k_1)}.$$

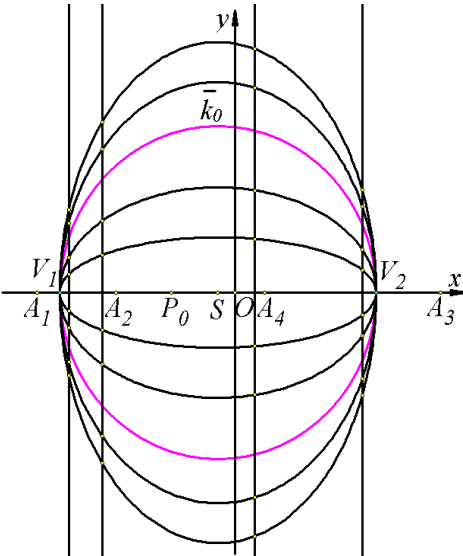
Последното равенство определя еднозначно четвъртата точка A_4 . Освен това в (3) точката O може да бъде избрана върху правата l .

2. Множество от концентрични елипси с общи върхове. Разкриването на търсените геометрични връзки между полиноми с корени в четири колинеарни точки, за които е изпълнено равенството (3), и съ-

ответните им производни са свързани с едно специално множество от елипси.



Фигура 1



Фигура 2

Върху правата l разглеждаме три произволни и различни точки A_1 , A_2 и A_3 и точка A_4 , за която е изпълнено векторното равенство (3). Нека M_{12} , M_{23} , M_{34} и M_{41} са такива точки съответно от отсечките A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 , за които са изпълнени равенствата (1). През точките M_{12} , M_{23} , M_{34} и M_{41} построяваме съответно правите m_{12} , m_{23} , m_{34} и m_{41} , които са перпендикулярни на l . Върху правите m_{12} , m_{23} , m_{34} и m_{41} построяваме съответно двойките точки (P'_{12}, P''_{12}) , (P'_{23}, P''_{23}) , (P'_{34}, P''_{34}) и (P'_{41}, P''_{41}) , така че са изпълнени равенствата:

$$(4) \quad \begin{aligned} M_{12}P'_{12} = M_{12}P''_{12} &= \frac{m}{k_1} A_1M_{12}, & M_{23}P'_{23} = M_{23}P''_{23} &= \frac{m}{k_2} A_2M_{23}, \\ M_{34}P'_{34} = M_{34}P''_{34} &= \frac{m}{k_3} A_3M_{34}, & M_{41}P'_{41} = M_{41}P''_{41} &= \frac{m}{k_4} A_4M_{41}, \end{aligned}$$

където m е произволно реално положително число (фиг. 1).

Така построените точки P'_{12} , P''_{12} , P'_{23} , P''_{23} , P'_{34} , P''_{34} , P'_{41} , P''_{41} (фиг. 1) удовлетворяват следната

Лема. За всяко $m > 0$ точките $P'_{12}, P''_{12}, P'_{23}, P''_{23}, P'_{34}, P''_{34}, P'_{41}, P''_{41}$ лежат върху една елипса $\bar{k}(m)$, два от върховете на която са постоянни точки от правата l (фиг. 2).

Доказателство. Разглеждаме координатна система с абсцисна ос по правата l и произволно координатно начало O върху l . Нека спрямо въведената координатна система абсцисите на точките A_1, A_2, A_3 и A_4 са съответно a_1, a_2, a_3 и a_4 , т.е. координатите има са: $A_1(a_1, 0), A_2(a_2, 0), A_3(a_3, 0), A_4(a_4, 0)$. От (3) следва, че е изпълнено равенството

$$(5) \quad a_4 = \frac{k_3(k_4 + k_2)a_1 - k_4(k_3 + k_1)a_2 + k_1(k_4 + k_2)a_3}{k_2(k_3 + k_1)}.$$

От дефиниционните равенства (1) се получават векторните релации

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_{12}} &= \frac{k_2 \overrightarrow{OA_1} + k_1 \overrightarrow{OA_2}}{k_1 + k_2}, \quad \overrightarrow{OM_{23}} = \frac{k_3 \overrightarrow{OA_2} + k_2 \overrightarrow{OA_3}}{k_2 + k_3}, \\ \overrightarrow{OM_{34}} &= \frac{k_4 \overrightarrow{OA_3} + k_3 \overrightarrow{OA_4}}{k_3 + k_4}, \quad \overrightarrow{OM_{41}} = \frac{k_1 \overrightarrow{OA_4} + k_4 \overrightarrow{OA_1}}{k_4 + k_1}. \end{aligned}$$

Оттук следва, че координатите на точките M_{12}, M_{23}, M_{34} и M_{41} са следните:

$$(6) \quad \begin{aligned} M_{12} \left(\frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, 0 \right), \quad M_{23} \left(\frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, 0 \right), \quad M_{34} \left(\frac{k_4 a_3 + k_3 a_4}{k_3 + k_4}, 0 \right), \\ M_{41} \left(\frac{k_1 a_4 + k_4 a_1}{k_4 + k_1}, 0 \right). \end{aligned}$$

От последните координати за уравненията на правите m_{12}, m_{23}, m_{34} и m_{41} получаваме съответно

$$(7) \quad \begin{aligned} m_{12} : x &= \frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, \quad m_{23} : x = \frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, \quad m_{34} : x = \frac{k_4 a_3 + k_3 a_4}{k_3 + k_4}, \\ m_{41} : x &= \frac{k_1 a_4 + k_4 a_1}{k_4 + k_1}. \end{aligned}$$

Като използваме координатите (6) за уравненията на окръжностите k_{12}, k_{23}, k_{34} и k_{41} , които имат за центрове точките M_{12}, M_{23}, M_{34} и M_{41} и радиуси съответно $\frac{m}{k_1} A_1 M_{12}, \frac{m}{k_2} A_2 M_{23}, \frac{m}{k_3} A_3 M_{34}$ и $\frac{m}{k_4} A_4 M_{41}$, получаваме:

$$(8) \quad \begin{aligned} k_{12} : \left(x - \frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2} \right)^2 + y^2 &= \frac{m^2 (a_1 - a_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, k_{23} : \left(x - \frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2 (a_2 - a_3)^2}{(k_2 + k_3)^2}, \\ k_{34} : \left(x - \frac{k_4 a_3 + k_3 a_4}{k_3 + k_4} \right)^2 + y^2 &= \frac{m^2 (a_3 - a_4)^2}{(k_3 + k_4)^2}, k_{41} : \left(x - \frac{k_1 a_4 + k_4 a_1}{k_4 + k_1} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2 (a_4 - a_1)^2}{(k_4 + k_1)^2}. \end{aligned}$$

От уравненията (7) и (8) за координатите на пресечните точки $\{P'_{12}, P''_{12}\} = k_{12} \cap m_{12}$, $\{P'_{23}, P''_{23}\} = k_{23} \cap m_{23}$, $\{P'_{34}, P''_{34}\} = k_{34} \cap m_{34}$ и $\{P'_{41}, P''_{41}\} = k_{41} \cap m_{41}$ получаваме:

$$(9) \quad \begin{aligned} P'_{12} \left(\frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, \frac{m |a_1 - a_2|}{k_1 + k_2} \right), P''_{12} \left(\frac{k_2 a_1 + k_1 a_2}{k_1 + k_2}, -\frac{m |a_1 - a_2|}{k_1 + k_2} \right), \\ P'_{23} \left(\frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, \frac{m |a_2 - a_3|}{k_2 + k_3} \right), P''_{23} \left(\frac{k_3 a_2 + k_2 a_3}{k_2 + k_3}, -\frac{m |a_2 - a_3|}{k_2 + k_3} \right), \\ P'_{34} \left(\frac{k_4 a_3 + k_3 a_4}{k_3 + k_4}, \frac{m |a_3 - a_4|}{k_3 + k_4} \right), P''_{34} \left(\frac{k_4 a_3 + k_3 a_4}{k_3 + k_4}, -\frac{m |a_3 - a_4|}{k_3 + k_4} \right), \\ P'_{41} \left(\frac{k_1 a_4 + k_4 a_1}{k_4 + k_1}, \frac{m |a_4 - a_1|}{k_4 + k_1} \right), P''_{41} \left(\frac{k_1 a_4 + k_4 a_1}{k_4 + k_1}, -\frac{m |a_4 - a_1|}{k_4 + k_1} \right). \end{aligned}$$

С непосредствено заместване на координатите (9) лесно се установява, че точките P'_{12} , P''_{12} , P'_{23} , P''_{23} , P'_{34} , P''_{34} , P'_{41} , P''_{41} лежат на крива от втора степен $\bar{k}(m)$, чието уравнение е следното:

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{k}(m) : -m^2 \left[(k_3 + k_2)(k_4 + k_2)a_1 - (k_3 + k_1)(k_4 - k_2)a_2 + (k_1 + k_2)(k_4 + k_2)a_3 \right] x + \\ + m^2 \left[k_3(k_4 + k_2)a_1 a_2 - k_1(k_4 + k_2)a_2 a_3 + k_2(k_4 + k_2)a_1 a_3 + k_4(k_3 + k_1)a_2^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Сега да запишем уравнението (10) по следния начин

$$(11) \quad \left[x - \frac{(k_2 + k_3)(k_2 + k_4)a_1 + (k_1 + k_3)(k_2 - k_4)a_2 + (k_1 + k_2)(k_2 + k_4)a_3}{2k_2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)} \right]^2 + \\ + \frac{k_1 k_2 k_3 + k_2 k_3 k_4 + k_3 k_4 k_1 + k_4 k_1 k_2}{m^2 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)} y^2 = q,$$

където

$$\frac{(k_2 + k_4)(q_0 - q_1 - q_2 - q_3)}{k_2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)},$$

$$q_0 = (k_2 + k_3)^2(k_2 + k_4)a_1^2 + (k_1 + k_3)[(k_1 + k_3)(k_2 + k_4) + 4k_2k_4]a_2^2 + (k_1 + k_2)^2(k_2 + k_4)a_3^2,$$

$$q_1 = 2[k_2^2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) - k_1k_2k_3 - k_2k_3k_4 - k_3k_4k_1 - k_4k_1k_2]a_2a_3,$$

$$q_2 = 2(k_1^2k_2 + k_1k_2^2 + k_1^2k_4 - k_2^2k_3 + k_1k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_4k_3k_1 + 3k_4k_1k_2)a_2a_3,$$

$$q_3 = 2(k_2k_3^2 + k_2^2k_3 + k_3^2k_4 - k_1k_2^2 + k_1k_2k_3 + 3k_2k_3k_4 + k_3k_4k_1 + k_4k_1k_2)a_1a_2.$$

Ако $q > 0$, равенството (11) показва, че $\bar{k}(m)$ е елипса. В противен случай от (11) следва, че $\bar{k}(m)$ е имагинерна елипса или две пресичащи се комплексно спрегнати прави. Тъй като тези случаи нямат геометричен смисъл, по-нататък ще разглеждаме само случаите, в които (10) е уравнение на елипса $\bar{k}(m)$. Освен това от (11) се вижда, че центърът S на елипсата $\bar{k}(m)$ има следното координатно представяне

$$(12) \quad S\left(\frac{(k_3 + k_2)(k_4 + k_2)a_1 - (k_3 + k_1)(k_4 - k_2)a_2 + (k_1 + k_2)(k_4 + k_2)a_3}{2k_2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}, 0\right).$$

От (10), при $y = 0$, се вижда, че елипсата $\bar{k}(m)$ има върхове V_1 и V_2 върху правата l (фиг. 2), координатите на които удовлетворяват уравнението

$$(13) \quad k_2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)x^2 - \\ - [(k_3 + k_2)(k_4 + k_2)a_1 - (k_3 + k_1)(k_4 - k_2)a_2 + (k_1 + k_2)(k_4 + k_2)a_3]x + \\ + k_3(k_4 + k_2)a_1a_2 - k_1(k_4 + k_2)a_2a_3 + k_2(k_4 + k_2)a_1a_3 + k_4(k_3 + k_1)a_2^2 = 0.$$

От (13) следва, че тези върхове не зависят от m , което означава, че те са постоянни точки от правата l за всяка елипса $\bar{k}(m)$ (фиг. 2). С това лемата е доказана.

Доказаната лема показва, че когато k_1 , k_2 , k_3 и k_4 остават постоянни, а стойността на m се променя, се получава множество от елипси с общи върхове (фиг. 2). От всичките тези елипси една е окръжност. Тя се получава при някоя специална стойност m_0 на m . Кривата $\bar{k}(m)$ е окръжност $\bar{k}_0$ тогава и само тогава, когато коефициентите пред x^2 и y^2 в (10) са равни. Така получаваме, че $\bar{k}(m)$ е окръжност $\bar{k}_0$ само когато

$$m = m_0 = \sqrt{\frac{k_1k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_3k_4k_1 + k_4k_1k_2}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}}. \text{ Окръжността } \bar{k}_0, \text{ както всички}$$

останали елипси на разглежданото множество, пресича правата l в постоянните точки V_1 и V_2 , които са решенията на (13).

3. Връзка между корените на производната и общите върхове на множеството от елипси. Сега ще покажем, че върховете V_1 и V_2 на разглежданото множество от елипси е търсената връзка между споменатите в началото полиноми и техните производни. По-точно в сила е следната:

Теорема. Нека A_1, A_2, A_3 и A_4 са точки от една права l , а $P(z)$ е полином от степен $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, който има k_j кратен корен в точката A_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Ако точката A_4 е определена чрез равенството

$$\overrightarrow{OA_4} = \frac{k_3(k_4 + k_2)\overrightarrow{OA_1} - k_4(k_3 + k_1)\overrightarrow{OA_2} + k_1(k_4 + k_2)\overrightarrow{OA_3}}{k_2(k_3 + k_1)},$$

то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени в общите върхове V_1 и V_2 на елипсите $\bar{k}(m)$ и в точката P_0 , която удовлетворява равенството $\overrightarrow{OP_0} = \frac{k_3\overrightarrow{OA_1} + k_1\overrightarrow{OA_3}}{k_3 + k_1}$.

Доказателство. Разглеждаме Гаусова координатна система с реална ос по правата l . Спрямо тази координатна система афиксите a_1, a_2, a_3 и a_4 , съответно на точките A_1, A_2, A_3 и A_4 , са реални числа. Ако $P(z)$ е полином, който притежава свойствата, описани в теоремата, той се представя по следния начин

$$P(z) = (z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} (z - a_3)^{k_3} (z - a_4)^{k_4}.$$

Следователно неговата производна $P'(z)$ е следната

$$P'(z) = (z - a_1)^{k_1-1} (z - a_2)^{k_2-1} (z - a_3)^{k_3-1} (z - a_4)^{k_4-1} \cdot U(z),$$

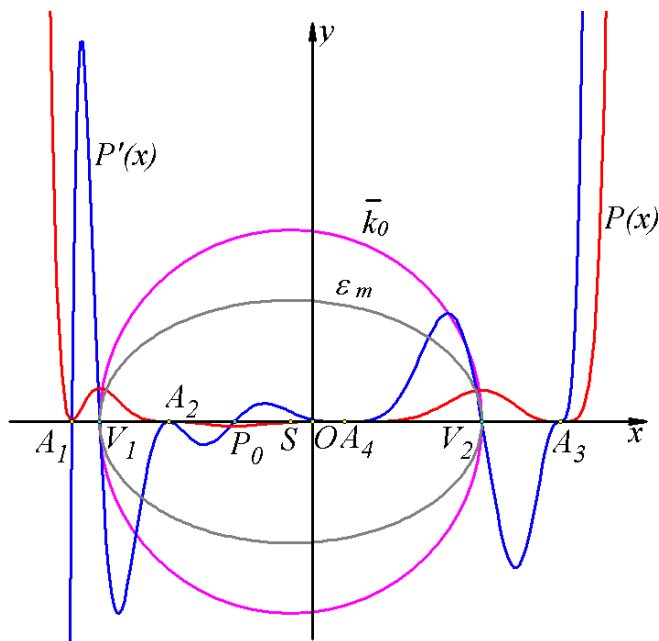
където

$$(14) \quad U(z) = k_1(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4) + k_2(z - a_3)(z - a_4)(z - a_1) + \\ + k_3(z - a_4)(z - a_1)(z - a_2) + k_4(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)$$

След заместване на a_4 от (5) получаваме

$$U(z) = \frac{(k_3 + k_1)z - k_3a_1 - k_1a_3}{k_2(k_3 + k_1)} \times \left[k_2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)z^2 - \right. \\ \left. - [(k_3 + k_2)(k_4 + k_2)a_1 - (k_3 + k_1)(k_4 - k_2)a_2 + (k_1 + k_2)(k_4 + k_2)a_3]z + \right. \\ \left. + k_3(k_4 + k_2)a_1a_2 - k_1(k_4 + k_2)a_2a_3 + k_2(k_4 + k_2)a_1a_3 + k_4(k_3 + k_1)a_2^2 \right].$$

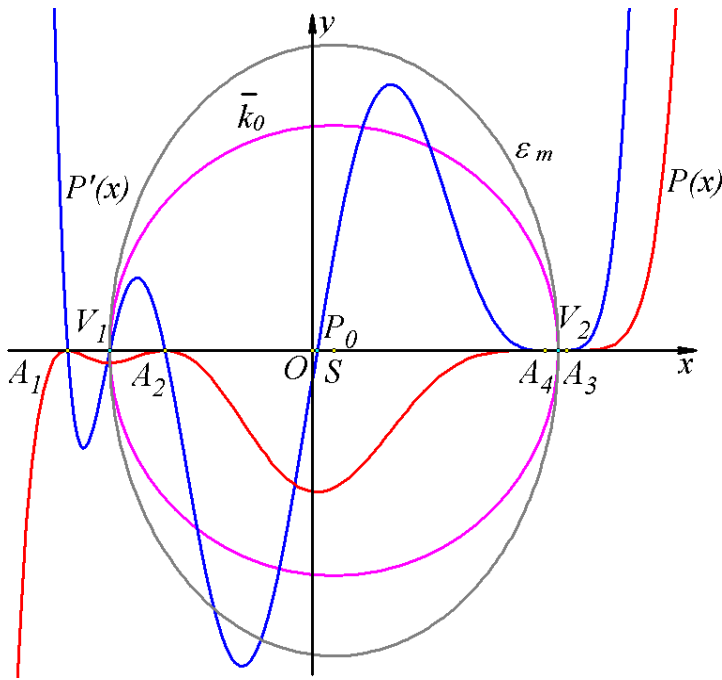
Вторият множител в $U(z)$ съвпада с лявата част на (13) при $z = x$. Следователно $P'(z)$ има корени в точките V_1 и V_2 . От първия множител се вижда, че $U(z) = 0$ и когато $z = \frac{k_3 a_1 + k_1 a_3}{k_3 + k_1}$. Следователно $P'(z)$ има корен и в точката P_0 . С това теоремата е доказана.



Фигура 3

Полиномът $P'(z)$ има $k_j - 1$ кратен корен в точката A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) (Genov, Mihovski & Mollov, 1991), а останалите три корена се описват от току-що доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.

Ако $P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на доказаната теорема. На фиг. 3 е представен полином $P(x)$ от степен $n = 14$, за който $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$, $k_4 = 5$. Елипсата ε_m е получена при $m = 2, 1$. На фиг. 4 е представен полином $P(x)$ от степен $n = 9$, за който $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 3$. Елипсата ε_m е получена при $m = 3$.



Фигура 4

ЛИТЕРАТУРА

- Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов. (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.
- Гроздев, С. & В. Ненков. (2020). Относно полиномите с корени във върховете на един клас изпъкнали четириъгълници *Математика и информатика*, 3, 324 – 329.
- Ненков, В. (2018). Полиноми с корени в три колинеарни точки, *Математика и информатика*, 5, 498 – 505.

REFERENCES

- Genov, G., S. Mihovski & T. Mollov. (1991). *Algebra with number theory*. Sofia: Nauka i izkustvo.
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2020). On the polynomials with roots in the vertices of a class of convex quadrilaterals, *Mathematics and informatics*, 3, 324 – 399.
- Nenkov, V. (2018). Polynomials with roots in three collinear points, *Mathematics and informatics*, 5, 498 – 505.

POLYNOMIALS WITH ROOTS IN FOUR SPECIALLY LOCATED COLLINEAR POINTS

Abstract. A geometric relation is derived between the roots of polynomials with roots in four specially located points on a line and the roots of the corresponding derivatives. More precisely, three of the points under consideration are arbitrary while the fourth one depends on them in a special way. Some polynomials of a real variable and with real coefficients are considered as an application.

Keywords: polynomial; derivative of a polynomial; roots of polynomials; ellipse

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

Researcher ID: AAG-4146-2020

ORCID iD: 0000-0002-1748-7324

University of Finance, Business Entrepreneurship
1, Gusla St.

1618 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Prof. Dr. Veselin Nenkov

Researcher ID: AAB-5776-2019

Department of Mathematics and Physics

Faculty of Engineering

Nikola Vaptsarov Naval Academy

73, Vasil Drumev St.

Varna, Bulgaria

E-mail: v.nenkov@nvna.eu; vnenkov@mail.bg