

## ПОКАЗАТЕЛНИ, ЛОГАРИТМИЧНИ И ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНИ УРАВНЕНИЯ (IV ЧАСТ)

Диана Стефанова

ОУ „Н. Й. Вапцаров“ – Асеновград

**Резюме.** Статията е посветена на трансцендентните уравнения. В настоящия текст се разглеждат комбинации от показателни, логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентно уравнение. Предложени са подходи за решаването им.

*Keywords:* transcendental equation; problem solving

В настоящата статия прилагаме идеята от (Stefanova, 2017) за решаване на комбинации от показателни и тригонометрични функции в основата на показателно уравнение, на логаритмично уравнение с основа или аргумент тригонометрични функции и логаритмични и показателни функции в трансцендентни уравнения относно решаването на комбинации от показателни, логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения. Задачите, които предлагаме, не се изучават в задължителната подготовка по математика в училище и са подходящи за ученици, проявяващи интерес към математиката, спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За да се решат тези задачи, е необходимо много добро владение на различните групи показателни, логаритмични и тригонометрични уравнения и неравенства, а също и свойствата на показателни, логаритмични и тригонометрични функции. Целта е обвързване на знанията за показателни, логаритмични и тригонометрични функции със съответните групи уравнения. За да открият различните връзки, учениците упражняват методите на научно познание, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. В следващите няколко задачи ще разгледаме показателно уравнение, при което в показателя е логаритъм с аргумент тригонометрична функция и с основа константа. Разгледани са различни подходи за решаване.

**Задача 1.** Да се реши уравнението  $2^{\log_2 \sin x} = 1$ .

*Решение:* допустими са тези стойности на  $x$ , за които  $\sin x > 0$ . Като използваме свойството  $a^{\log_a b} = b$ , преобразуваме даденото уравнение до тригонометричното уравнение  $\sin x = 1$ , чиито корени са  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 2.** Да се реши уравнението  $2 - 6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$ .

*Решение:* допустими са тези стойности на  $x$ , за които  $\sin x > 0$ ,  $\cos x > 0$ . Като използваме свойството  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ , даденото уравнение може да се запише във вида  $\sqrt{6} \cdot 6^{\log_6 \sin x} + \sqrt{2} \cdot 2^{\log_2 \cos x} = 2$ . От основното логаритмично тждество  $a^{\log_a b} = b$ , записваме уравнението във вида  $\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x = 2$ . Един от начините за решаване на общото уравнение  $a \sin x + b \cos x = c$  е да се разделят двете му страни с  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , след което се използва събирателна формула. В случая делим двете страни на уравнението с  $2\sqrt{2}$ . Получаваме уравнението  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  или  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$ , което има решения  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  и  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ , т.е.  $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$  и  $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ . Като вземем предвид условията  $\sin x > 0$ ,  $\cos x > 0$ , получаваме, че решенията на даденото уравнение са ъглите  $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ , където  $k \in Z$ .

**Задача 3.** Да се реши уравнението  $3^{\lg tg x} + 3^{\lg \cot g x} = 2$ .

*Решение:* допустимите стойности на даденото уравнение са:  $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ,  $tg x > 0$ ,  $\cot g x > 0$ . Преобразуваме по следния начин:

$$3^{\lg tg x} + 3^{\lg \frac{1}{tg x}} = 2 \Leftrightarrow 3^{\lg tg x} + 3^{-\lg tg x} = 2 \Leftrightarrow 3^{\lg tg x} + \frac{1}{3^{\lg tg x}} = 2. \text{ Полагаме } 3^{\lg tg x} = y,$$

като  $y > 0$ , заместваме и получаваме дробното уравнение  $y + \frac{1}{y} = 2$ , а оттам – и квадратното  $y^2 - 2y + 1 = 0$ , чийто корен е  $y = 1$ . От  $3^{\lg tg x} = 1$  намираме, че  $\lg tg x = 0 \Rightarrow tg x = 1$ , откъдето  $x = \frac{\pi}{4}(1 + 4k)$ ,  $k \in Z$ . Разглеждаме  $\frac{\pi}{4}(1 + 4k) \neq k\frac{\pi}{2}$  или  $2k \neq 1 + 4k$ , но това е изпълнено винаги, защото  $2k$  са четни числа, а  $1 + 4k$  са нечетни. Следователно решението е  $x = \frac{\pi}{4}(1 + 4k)$ ,  $k \in Z$ .

**Задача 4.** Да се реши уравнението  $4^{\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9}$ .

*Решение:* представяме основата 4 чрез  $2^2$  и  $\frac{1}{2}$  чрез  $2^{-1}$ .

Тогава  $2^{2 \log_2(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9}$  или  $2^{-2 \log_2(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9} \Rightarrow$

$2^{2 \log_2(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)^{-1}} = \frac{1}{9}$ . От основното логаритмично твърдение:

$a^{\log_a N} = N$  получаваме

$$\frac{1}{(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow (\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)^2 = 9,$$

т.е. след коренуване стигаме до две уравнения  $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = \pm 3$ .

Но  $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 > 0$  и следователно уравнението, еквивалентно на даденото, е  $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 1 = 0$ , което е

приводимо към хомогенно уравнение:  $-\cos^2 x + 5 \sin x \cos x = 0$ . Сега делим двете му страни на  $-\cos^2 x \neq 0$  и получаваме  $1 - \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$ . Допустимите

стойности  $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 > 0$  определяме, като представим числото 2 във вида  $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ , т.е.  $3 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x > 0$ .

Делим двете му страни на  $\cos^2 x \neq 0$  и получаваме неравенството  $3 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 2 > 0$ . Полагаме  $\operatorname{tg} x = u$  и  $3u^2 + 5u + 2 > 0$ , откъдето

$u \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ . Следователно  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$  е решение. Ако искаме

да определим ъгъла, съответстващ на решението, отчитаме по таблица за  $\operatorname{tg} x = 0,2$  и намираме, че  $x = 11^\circ 18'$ .

**Задача 5.** Да се намерят стойностите на параметъра  $a$ , при които уравнението

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}^2 x} - (3a+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x} + a = 0$$

има решение в интервала  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ .

*Решение:* при  $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$  имаме  $\operatorname{tg} x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right)$ . Тъй като  $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x$  е

намаляваща функция,  $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ , когато  $\operatorname{tg} x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right)$ . Полагаме

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x} = y$ . Тъй като  $\operatorname{tg} x > 0$ , то  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}^2 x} = y^2$ . Даденото уравнение

ние приема вида  $y^2 - (3a+1)y + a = 0$ . От това, че  $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ , а функцията  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x}$  е намаляваща, следва  $y \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ . Тогава даденото уравнение ще има решение в интервала  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ , ако полученото квадратно уравнение  $f(y) = y^2 - (3a+1)y + a = 0$  има поне един корен в интервала  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ . Като използваме свойството на разпределение на корените на квадратен тричлен в даден интервал, това ще бъде изпълнено, ако  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot f(\sqrt{2}) < 0$ . Оттук намираме, че  $a \in \left(\frac{\sqrt{2}-4}{16}; \frac{5\sqrt{2}-4}{17}\right)$ .

В следващите няколко задачи ще разгледаме тригонометрични функции със сложни аргументи (показателна, логаритмична или тригонометрична функция).

**Задача 6.** Да се реши уравнението  $\sin 2^{\sin x} = 1$ .

*Решение:* като използваме основното тригонометрично уравнение  $\sin \alpha = 1$ , получаваме, че  $2^{\sin x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$ , но  $\sin x \in [-1; 1] \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2^{\sin x} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2$ . При  $n = 0 \Rightarrow 2^{\sin x} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = \log_2 \frac{\pi}{2}$  и като съобразим, че  $\log_2 \frac{\pi}{2} > 1$ , получаваме, че даденото уравнение няма решение.

**Задача 7.** Да се намерят положителните корени на уравнението  $\operatorname{tg} \left[ 5\pi \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] = 1$ .

*Решение:* като използваме основното тригонометрично уравнение  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ , за даденото уравнение получаваме, че  $5\pi \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  (1). След това делим двете страни на (1) с  $\pi$  и намираме  $5 \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4} + k$ , а оттам – и показателното уравнение  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{20} + \frac{k}{5}$ , но когато  $x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \in (0; 1)$ , откъдето

$\frac{1+4k}{20} \in (0;1) \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4$ . След това намираме, че  $x = \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{20} + \frac{k}{5} \right)$ , при  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

**Задача 8.** Да се реши уравнението  $\sin(2^{x-1} + 2^{x-2}) \cos(2^{x-1} + 2^{x-2}) = \frac{1}{4}$ .

*Решение:* умножаваме по 2 двете страни на даденото уравнение и като използваме формулата  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ , получаваме основно тригонометрично уравнение  $\sin(2^x + 2^{x-1}) = \frac{1}{2}$ . След това намираме, че  $2^x + 2^{x-1} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ , преобразуваме до  $2^x = \frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9}$ , но  $2^x > 0$ , откъдето  $\frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9} > 0$  при  $n \geq 0$ . Корените на даденото уравнение са  $x = \log_2 \left( \frac{2}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9} \right)$ , при  $n \geq 0$ .

**Задача 9.** Да се реши уравнението  $\cos 2^x + \sqrt{3} \sin 2^x = 2 \cos 2^{x+1}$ .

*Решение:* да разделим двете страни на даденото уравнение с 2. Получаваме  $\frac{1}{2} \cos 2^x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2^x = \cos 2^{x+1}$ . Като използваме, че  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  и  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , то  $\cos \frac{\pi}{3} \cos 2^x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2^x = \cos 2^{x+1}$ , а оттам и  $\cos \left( 2^x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos 2^{x+1} = 0$ . След това използваме формулата за разли-

ка на два косинуса и получаваме  $-2 \sin \frac{2^x - \frac{\pi}{3} - 2^{x+1}}{2} \sin \frac{2^x - \frac{\pi}{3} + 2^{x+1}}{2} = 0$ ,

откъдето произведението им ще бъде 0, когато имаме множител 0, и на-

мираме, че  $\frac{2^x + \frac{\pi}{3}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$  и  $\frac{3 \cdot 2^x - \frac{\pi}{3}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Преобразуваме полу-

чените уравнения относно  $2^x$  и получаваме, че  $2^x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$  и

$3 \cdot 2^x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{N}_0$ . След което намираме и коре-

ните  $x = \log \left( 2\pi n - \frac{\pi}{3} \right), n \in \mathbb{N}$  и  $x = \log \left( \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \right), k \in \mathbb{N}_0$ .

**Задача 10.** Намерете тези стойности на параметъра  $a$ , за които уравнението  $2 \cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3} \sin(2^{2x-x^2+1})$  има поне едно решение.

*Решение:* като приложим свойството  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ , даденото уравнение може да се запише във вида  $2 \cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3} \sin(2^{2x-x^2} \cdot 2^1)$ . Полагаме  $2^{2x-x^2} = y, y > 0$  и получаваме  $2 \cos^2 y = a + \sqrt{3} \sin 2y$ . След това използваме формулата за понижение на степента  $1 + \cos 2y = a + \sqrt{3} \sin 2y$ , а оттам делим двете страни на уравнението с  $2 \cos 2y - \sqrt{3} \sin 2y = a - 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2y - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2y = \frac{a-1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 2y - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2y = \frac{a-1}{2} \Rightarrow \cos\left(2y + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a-1}{2}$ . Като вземем предвид, че  $|\cos \varphi| \leq 1$  и  $y > 0$ , получаваме, че  $a \in [-1; 2)$ .

**Задача 11.** Да се реши уравнението  $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$ .

*Решение:* допустимите стойности на даденото уравнение са:  $x > 0$ . Като използваме  $\cos(\pi \lg x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \lg x\right)$ , записваме даденото уравнение по следния начин:  $\sin(\pi \lg x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \lg x\right) = 1$ . Прилагаме формулата за сбор на два синуса и получаваме произведението

$$2 \sin \frac{\pi \lg x + \frac{\pi}{2} - \pi \lg x}{2} \cdot \cos \frac{\pi \lg x - \frac{\pi}{2} + \pi \lg x}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos\left(\pi \lg x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

или  $\cos\left(\pi \lg x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \pi \lg x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  и

$\pi \lg x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . След преобразуване намираме, че  $\lg x = \frac{1}{2} + 2k$  и  $\lg x = 2k$ , а оттам  $x = 10^{\frac{1}{2}+2k}$  и  $x = 10^{2k}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 12.** Да се реши уравнението  $\sin|\lg x| + \cos|\lg x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

*Решение:* допустимите стойности на даденото уравнение са:  $x > 0$ . Като използваме  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ , преобразуваме даденото уравнение до  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \lg x\right) = \frac{1}{2}$ , откъдето  $\frac{\pi}{4} + \lg x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  и  $\frac{\pi}{4} + \lg x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ .

Преобразуваме спрямо  $\lg x$  и получаваме, че  $\lg x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$  и  $\lg x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ , а оттам – и корените  $x = 10^{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi}$ ,  $k \in Z$   $x = 10^{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}$ ,  $k \in Z$ .

**Задача 13.** Да се реши уравнението  $\sin(2\pi \cos x) = 0$ .

*Решение:* даденото уравнение е равносилно на  $2\pi \cos x = \pi n$ ,  $n \in Z$ , откъдето намираме, че  $\cos x = \frac{n}{2}$ . От  $|\cos x| \leq 1$  следва  $\left| \frac{n}{2} \right| \leq 1$ , но  $n \in Z \Rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2$ . Решаваме три уравнения:

$$1) |\cos x| = 1 \Rightarrow x = \pi l, l \in Z.$$

$$2) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$3) |\cos x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

След това получаваме и корените  $x = \frac{\pi m}{2}$ ,  $m \in Z$  и  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in Z$ .

**Задача 14.** Да се реши уравнението  $\sin\left(\frac{\pi \cos x}{\cos^2 x + 1}\right) = 0$ .

*Решение:* съобразявайки, че  $\frac{\pi \cos x}{\cos^2 x + 1} = \pi n$ ,  $n \in Z$ , преобразуваме и получаваме квадратното уравнение  $n \cos^2 x - \cos x + n = 0$  относно  $\cos x$  при  $n \neq 0$ . На полученото квадратно уравнение пресмятаме  $D = 1 - 4n^2$ . Като решим неравенството  $1 - 4n^2 \geq 0$  при  $n \in Z$ , получаваме, че  $n = 0$ . Тогава  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in Z$ .

**Задача 15.** Да се реши уравнението  $\sin(\sin(\cos x - \sin x)) = 0$ .

*Решение:* решаваме даденото уравнение и получаваме  $\sin(\cos x - \sin x) = \pi n$ ,  $n \in Z$ .

Но като съобразим, че  $|\sin \varphi| \leq 1$ , то  $|\pi n| \leq 1 \Rightarrow n = 0$ . След това решаваме уравнението  $\sin(\cos x - \sin x) = 0$ , което е равно силно на  $\cos x - \sin x = \pi k$ ,  $k \in Z$ .

Използваме тригонометричната формула  $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  и по-

лучаваме, че  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi k \sqrt{2}}{2}$ ,  $k \in Z$ . Но  $|\sin \varphi| \leq 1$  и  $\left| \frac{\pi k \sqrt{2}}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow n = 0$ .

Остава да решим уравнението  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi m$ ,  $m \in Z$ .

В следващите няколко задачи ще разгледаме логаритмични уравнения със сложни аргументи или основи.

**Задача 16.** Да се реши уравнението  $\log_{\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right|} (9^x - 3^{x+3} + 30) = \log_{\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right|} (3^x + 3)$ .

*Решение:* допустимите стойности за даденото уравнение се определят от неравенствата:  $9^x - 3^{x+3} + 30 > 0$ ,  $\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right| \neq 1$  и  $\left|\sin \frac{\pi x}{4}\right| > 0$ . Преобразувам даденото уравнение до  $9^x - 3^{x+3} + 30 = 3^x + 3$ , а отгук и до  $3^{2x} - 27 \cdot 3^x - 3^x + 27 = 0$ . Групираме две по две събираемите на полученото уравнение  $3^x(3^x - 1) - 27(3^x - 1) = 0$  и го разлагаме на множители  $(3^x - 1)(3^x - 27) = 0$ . Отгук намираме  $3^x = 1$  или  $3^x = 27$  и корените са и  $x = 0$  или  $x = 3$ , но  $x = 0$  не принадлежи на допустимите стойности следователно  $x = 3$  е единствен корен на даденото уравнение.

**Задача 17.** Да се реши уравнението  $\cot gx + \lg(1 + 2^{\cot gx}) = \lg 5 \cot gx + \lg 6$ .

*Решение:* допустимите стойности за даденото уравнение са тези ъгли, за които  $\cot gx > 0$ . Полагаме  $\cot gx = a$ , като  $a > 0$ , замества-  
ме и получаваме  $a + \lg(1 + 2^a) = \lg 5a + \lg 6$ . Преобразуваме и получа-  
ваме  $\lg 10^a + \lg(1 + 2^a) = \lg 30a$ , а след това и  $\lg 10^a(1 + 2^a) = \lg 30a \Rightarrow$   
 $10^a + 20^a = 30a$ . Но  $a > 0$ , откъдето  $a = 1$ . Заместваме получената стойност  
на  $a$  в уравнението  $\cot gx = a$  и получаваме  $\cot gx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in Z$ .

Решавайки горните задачи, както и подобни на тях, ученикът не само съчетава едни знания с други, но се създават условия за активизиране на учебните му дейности. Важното е да се осъществяват благоприятни ситуации за обучение чрез задачи. Това пък води до развитие на различни механизми на мислене, необходими за откриване, за творчество и за приложение на математически идеи.

## REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968). *Exponential and logarithmic equations* (in Russian), Moscow: Prosveshchenie. [Бородуля, И. (1968). *Показателни и логаритмични уравнения и неравенства*. Москва, Просвещение.]
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka. [Вавилов, В. и др. (1987). *Задачи по математике*. Москва: Наука.]

- Georgieva, M. & S. Grozdev (2017). *Morphodynamics in the development of the noospheric intellect*. Beau Bassin: LAMBERT Academic Publishing (ISBN 978-3-659-53922-0), 304 pages.
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1996). *Mathematics for 10-th grade*. Sofia: Prosveta. [Запрянов, З., В. Вакарелова & Б. Димитров (1996). *Математика X клас*. София: Просвета.]
- Zapryanov, Z. & N. Raikov (2012). *How to solve difficult problems easily* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta. [Запрянов, З. & Н. Райков (2012). *Как да решаваме лесно трудни задачи*. София: Просвета.]
- Sevriakov, P. & A. Smoljakov (2008). *Trigonometric, exponential and logarithmic equations and inequalities* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie (ISBN 978-5-93078-567-8). [Севрюков, П. & А. Смоляков (2008). *Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства*. Москва: Просвещение (ISBN 978-5-93078-567-8).]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). One more idea for solving trigonometric equations (in Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Още една идея за решаване на тригонометрични уравнения. *Математика и информатика*, 59, 2, 170 – 182.]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Excel helps in solving some exponential equations (in Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 59, 5, 368 – 380. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Excel в помощ при решаване на някои показателни уравнения, *Математика и информатика*, 59, 5, 368 – 380.]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Some groups of logarithmic equations by means of Excel (in Bulgarian), *Mathematics and Informatics*, 59, 6, 599 – 613. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Някои групи логаритмични уравнения с помощта на Excel, *Математика и информатика*, 59, 6, 599 – 613.]
- Stefanova, D. (2017). Exponential and trigonometric functions in transcendental equations (Part I), *Mathematics and Informatics*, 60, 1, 57 – 63. [Стефанова, Д. (2017). Показателни и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (I част). *Математика и информатика*, 60, 1, 57 – 63.]
- Stefanova, D. (2017). Logarithmic and trigonometric functions in transcendental equations (Part II). *Mathematics and Informatics*, 60, 4, 351 – 363. [Стефанова, Д. (2017). Логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (II част). *Математика и информатика*, 60, 4, 351 – 363.]

Stefanova, D. (2017). Logarithmic and exponential functions in transcendental equations (Part III). *Mathematics and Informatics*, 60, 6, 601 – 615. [Стефанова, Д. (2017). Логаритмични и показателни функции в трансцендентни уравнения (III част), *Математика и информатика*, 60, 6, 601 – 615.]

## EXPONENTIAL, LOGARITHMIC AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN TRANSCENDENTAL EQUATIONS (PART IV)

**Abstract.** The paper is dedicated to transcendental equations. Presently, combinations of exponential, logarithmic and trigonometric functions in a transcendental equation are considered. Approaches to solve them are proposed.

✉ **Dr. Diana Stefanova**

Teacher in Mathematics

116, Tsar Ivan Asen II St.

4230 Asenovgrad, Bulgaria

E-mail: dianastefanova13@gmail.com