ПОДГОТОВКА К ОЛИМПИАДАМ – УДОБНЫЙ ПОВОД ОБСУДИТЬ ТОНКОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ

Вячеслав Тепляков, Нина Патронова

„*Даже не плавая на глубоких
местах, полезно знать, где они*“
Козьма Прутков („Мысли и афоризмы“)

Резюме. В статье рассказывается о некоторых задачах, разбиравшихся на математическом кружке для школьников в Институте математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова.

Keywords: proof, existence, Euler characteristic, Vieta's formulae, isoperimetric problem

Содержание основных курсов математики в школе и ВУЗе составляют общие теоремы и типичные упражнения, которые должны обеспечить достаточные технические условия для отработки стандартных подходов к решению задач. Цель зачетов и экзаменов заключается в проверке того, „что должен знать каждый“. Олимпиады являются следующим этапом математического образования, на котором оригинальные идеи и логические тонкости выходят на первый план. В них принимают участие школьники и студенты, склонные к восприятию и анализу более глубоких вопросов, связанных с поиском решений нестандартных задач. В этом поиске большую роль начинают играть некоторые детали и нюансы математических конструкций, на которые в общих курсах не обращают внимание. При подготовке к олимпиадам возникает потребность обсуждать мотивировки теорем и определений, наглядные образы возникающих понятий, эвристические соображения, приводящие к полезным идеям.

Одним из таких вопросов является проблема существования тех объектов, свойствами которых мы интересуемся в той или иной задаче. Школьная практика решения геометрических задач такова, что вопрос существования фигур, о которых идет речь в условии, не исследуется, точнее, предполагается по умолчанию, что автор задачи сам позаботился о корректности поставленных вопросов. Это, скорее всего, правильная позиция для общей массы школьников – нельзя же „объять необъятное“. Но у школьников, участвующих в олимпиадах, хватает любопытства и способностей, чтобы разобраться в задаче до конца. Приведем пример, о котором написал Владимир Игоревич Арнольд (Арнольд, 2012).

В американском стандартном экзамене была следующая задача:

Задача 1. Найти площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 10 дюймов, а опущенная на нее высота – 6 дюймов.

С этой задачей американские школьники успешно справлялись 10 лет, но потом приехали из Москвы русские школьники и ни один эту задачу решить как американские школьники (дававшие ответ 30 квадратных дюймов) не смог. Почему? Похожую задачу мы предлагали из любопытства на олимпиаде по математике для школьников 8 – 11 классов и студентов, проводимой на базе математического факультета Поморского государственного университета имени М. В. Ломоносова в 2012 году (ныне Институт математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) государственного университета имени М. В. Ломоносова). К сожалению, большинство наших участников решали эту задачу „по-американски“ и только немногие замечали, что такой треугольник не существует.

Вот еще случай, который произошел на приемных экзаменах на вышеупомянутый факультет еще в „доегэшные“ времена. Было два варианта письменного экзамена по математике. В первом варианте геометрическая задача выглядела так:

Задача 2. В треугольнике ABC: $h_a = 3$, $h_b = 5$, угол $C = \pi/3$, угол $A < \pi/2$. Найти площадь этого треугольника и третью высоту.

А во втором варианте все то же самое, только угол $A > \pi/2$.

И в том и другом вариантах абитуриенты, более или менее знающие планиметрию, получали ответы, тем более что и ответы и сами вычисления в обоих вариантах ничем не отличались. Разница была только в том, что в первом варианте треугольник с указанными свойствами существовал, а во втором нет. А так как вопросы существования не находятся в поле зрения школьников, да и экзаменаторы, возможно, не обратили бы внимание на этот нюанс, то на этом бы все и закончилось, если бы один из абитуриентов, решавших второй вариант, не стал бы вычислять длину отрезка, соединяющего вершину A с основанием высоты h_b (зачем-то это ему понадобилось). Эта длина оказалась отрицательной. Он и сам, скорее всего, искал вычислительную ошибку и приемная комиссия при проверке работы тоже какое-то время искала, но вычисления были правильные. Просто у треугольника, которого нет на свете, такое возможно, и площадь оказывается у него можно найти, если пойти более стандартным путем, как это сделали остальные абитуриенты, и высоту третью, и все остальное при желании. Но самого треугольника нет!

У логиков есть убеждение, что из ложного высказывания следует все, что угодно. Если слово „следует“ понимать не формально, как в логике, а содержательно, как его обычно понимают, например в алгебре, анализе или геометрии, то с позицией логиков трудно согласиться. Рассмотрим например следующие переформулировки обоих вариантов предыдущей задачи (именно эти переформулировки адекватны школьному пониманию этих задач):

I. „Если треугольник, удовлетворяющий условиям задачи первого варианта, существует, то его площадь равна $5\sqrt{3}$.“

II. „Если треугольник, удовлетворяющий условиям задачи второго варианта, существует, то его площадь равна $5\sqrt{3}$.“

В утверждении II посылка ложная и всякий, кому не лень, из нее получит следствие, что площадь треугольника равна $5\sqrt{3}$. (Это происходит ровно также, как в случае I, где все „честно“). Но совершенно не ясно как из ложной посылки утверждения II получить, например, площадь равную $6\sqrt{3}$. Так что из ложного высказывания „треугольник, удовлетворяющий условиям задачи второго варианта, существует“ следует „не все, что угодно“, например, еще раз повторим, не ясно как получить высказывание „площадь треугольника равна $6\sqrt{3}$“.

Следующая задача была на первой олимпиаде Математического факультета Поморского государственного университета в 2009 году и вызвала большой интерес участников при разборе решений.

Задача 3. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета? (Лоскуты граничат, если у них есть хоть одна общая точка).

Эту достаточно легкую комбинаторную задачу решили, наверное, все, кто за нее брался, но опять же „по-школьному“, т.е. в предположении, что такой мяч существует.

Пусть x – число черных лоскутов. Тогда $(32 - x)$ – число белых, $5x$ – число всех сторон у черных лоскутов (пятиугольников) и это число равно половине всех сторон белых лоскутков (шестиугольников), а именно $\frac{6(32-x)}{2}$. Получается уравнение $5x = 3(32 - x)$, отсюда $x = 12$. Поэтому белых лоскутов 20.

Если в этой задаче число 32 заменить на 48, то легко получается уравнение $5x = 3(48 - x)$, отсюда $x = 18$, т.е. белых лоскутков 30.

И вообще, если общее число лоскутов кратно восьми, то получаем ответ. Однако оказывается, что такой мяч существует, только если общее число равно 32 (!), его часто можно видеть на футбольном поле и в магазинах, так что такой объект можно увидеть „очами во лбу“, а вот для доказательства того, что других нет, потребуются „очи умственные“, т.е. рассуждения. Известна формула Эйлера для выпуклых многогранников $B - P + \Gamma = 2$, где B – число вершин, P – число ребер, Γ – число граней выпуклого многогранника. Доказательство этой теоремы можно найти в книгах (Курант & Роббинс, 1967), (Лакатос, 1967) и (Пойа, 1975). В нашем случае Γ – число всех лоскутов, x – число черных (т.е. пятиугольных) лоскутов, $(\Gamma - x)$ – число белых (т.е. шестиугольных), B – число вершин (т.е. точек, где сходятся три лоскута), P – число ребер (т.е. швов). Между этими четырьмя числами возникают следующие связи:

$$\begin{cases} 5x = \dfrac{(\Gamma - x)}{2} \\ B - P + \Gamma = 2 \\ 3B = 2P \\ 5x = B \end{cases}.$$

Первое равенство системы – уже известное соотношение; второе – формула Эйлера; третье следует из того, что в каждой вершине сходятся три ребра и каждое ребро соединяет две вершины (т.е. $3B$ – число ребер, посчитанных дважды); четвертое следует из условия, что в каждой вершине нашего многогранника находится ровно одна вершина пятиугольной грани. В результате этих комбинаторных подсчетов возникает линейная система, решая которую получаем, что $\Gamma = 32$ (и ничего другого).

А вот алгебраическая задача, которая была на олимпиаде Института математики, информационных и космических технологий САФУ в 2013 году (заимствована из Санкт-Петербургских олимпиад). В ней тоже вопрос существования решения оказался более нетривиальным, чем свойство этого решения, которое и требовалось найти.

Задача 4. Чему может равняться сумма $a + b + c$, если $a = ab + c$, $b = bc + a$, $c = ca + b$?

Школьники, ловкие в алгебраических преобразованиях, быстро из данных соотношений могут получить различные следствия.

Складывая эти три равенства, получаем

$a + b + c = ab + bc + ca + a + b + c \Rightarrow ab + bc + ca = 0.$

Если же исходные три равенства умножить соответственно на c, a, и b и потом сложить, то получим $ac + ba + cb = 3abc + a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -3abc$. Учитывая, что сумму квадратов можно представить в виде

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$, приходим к равенству

$$(a + b + c)^2 = -3abc.$$

И, наконец, еще одно полезное соотношение получается из исходных равенств следующим образом:

$a(1-b) = c,\ b(1-c) = a,\ c(1-a) = b \ \Rightarrow\ abc(1-b)(1-c)(1-a) = abc \Rightarrow$ $(1-b)(1-c)(1-a) = 1$ (если среди a, b и c есть нулевые, то вся тройка нулевая и последнее равенство все равно имеет место) $\Rightarrow$

$$1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc = 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c} = -abc.$$

В результате таких алгебраических раскопок возникают важные равенства:

$$ab + bc + ca = 0;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = -3abc;$$
$$(1-b)(1-c)(1-a) = 1;$$
$$(a+b+c)^2 = -3abc;$$
$$a + b + c = -abc.$$

Из последних двух следует, что $(a+b+c)^2 = 3(a+b+c)$. Отсюда, $a+b+c = 0$ или $a+b+c = 3$. Таким образом, если тройка чисел удовлетворяет исходной системе равенств, то их сумма может принимать только два значения 0 или 3. Остается выяснить реализуются ли эти две возможности. Очевидно, что нулевая тройка $a = b = c = 0$ удовлетворяет исходным равенствам и реализует нулевую сумму. Более того, если среди трех чисел, удовлетворяющих исходной системе, есть нулевые, то вся тройка нулевая. Или если два числа в тройке равны, то тройка нулевая, и, наконец, если сумма $a + b + c = 0$, то $a = b = c = 0$. Поэтому вопрос о сумме равной 3 эквивалентен вопросу о существовании ненулевого решения исходной системы. Если такое решение существует, то оно, как теперь знаем, удовлетворяет условиям: $a + b + c = 3,\ ab + bc + ca = 0,\ abc = -3$. По теореме Виета такая тройка чисел должна быть корнями кубического уравнения $= t^3 - 3t^2 + 3 = 0$. У этого уравнения, в самом деле, есть три различных действительных корня – это можно показать, вычислив значения $f(t) = t^3 - 3t^2 + 3$ в критических точках:

$f\,'(t) = 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ и $t_2 = 2$, $f(0) = 3 > 0$, $f(2) = -1 < 0 \Rightarrow$ график этого кубического многочлена трижды пересекает ось абсцисс.

А можно получить такой же результат, заметив, что на отрезках $[-1; 0]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ многочлен $f(t)$ меняет знак.

Осталось последнее – показать, что корни $f(t)$ удовлетворяют исходным трем равенствам. Тут важно обратить внимание на то, что исходная система уравнений не инвариантна относительно перестановок переменных a, b, c, точнее – при циклических перестановках $a \to b \to c \to a$ система переходит в себя, а при инверсиях, например, $a \to b \to a,\ c \to c$ исходная система равенств $\begin{cases} a = ab + c \\ b = bc + a \\ c = ca + b \end{cases}$ переходит в систему $\begin{cases} a = ac + b \\ b = ba + c \\ c = cb + a \end{cases}$, (при других инверсиях то же самое). Поэтому, чтобы показать, что корни многочлена $f(t)$ удовлетворяют исходной системе, достаточно показать, что они удовлетворяют одной из этих двух систем (если окажется, что второй, то просто поменяем ролями пару переменных).

Начнем с первого уравнения и покажем, что если a, b, c – корни уравнения $f(t) = 0$, то $(ab + c - a)(ac + b - a) = 0$. Раскрывая левую часть, получаем $a^2bc + ab^2 - a^2b + ac^2 + bc - ac - a^2c - ab + + a^2 = 0$. Чтобы доказать это последнее равенство, воспользуемся соотношениями для корней уравнения $f(t) = 0$, полученными ранее: $a + b + c = 3$, $ab + bc + ca = 0$, $abc = -3$. Полезным еще может оказаться соотношение $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Группируя разумно выражения в последнем выражении, получаем $a(abc) + a(b^2 + c^2) - a^2(b + c) + (bc - ac - ab) + a^2 = -3a + a(9 - a^2) - a^2(3 - a) - 2a(b+c) + a^2 = 0$.

И так, корни уравнения $f(t) = 0$ удовлетворяют одному из уравнений $a = ab + c$ или $a = ac + b$. Аналогично получаем, что эти корни удовлетворяют одному из уравнений $b = bc + a$ или $b = ba + c$. При этом $a = ab + c$ и $b = ba +$ с не могут выполняться одновременно, иначе $a = b$, но числа в нашем случае различны. Аналогично картина получается для третьего уравнения $c = ca + b$ или $c = cb + a$, и годится только одно, правильно дополняющее первые два до одной из двух систем.

Доказательства существования часто оказываются нетривиальными, остроумными и поучительными, как, например, в этой задаче. Следующая классическая задача Дидоны про изопериметрическое свойство (Grozdev, 2007) круга часто используется в геометрических оценках и ее решение тоже имеет большое воспитательное значение.

Задача 5. Из всех фигур с данным периметром наибольшую площадь имеет круг.

Снова, как и в предыдущей задаче, мы будем искать свойства интересующего нас объекта, а потом, используя их, решать проблему его существования.

Пусть F – фигура, имеющая данный периметр и наибольшую площадь, тогда она должна быть выпуклой (иначе ее площадь можно было бы увеличить очевидным способом, сохранив периметр). Если теперь ввести понятие диаметра выпуклой фигуры, как хорды, делящей периметр пополам, то получаем еще одно свойство искомой фигуры F: всякий диаметр делит ее площадь пополам (опять потому, что иначе площадь можно увеличить, сохранив периметр прежним). И, наконец, последнее основное свойство искомой фигуры: из любой точки на периметре (т.е. на границе) фигуры F любой диаметр виден под прямым углом (снова потому, что иначе площадь можно увеличить, сохранив периметр). Последнее свойство характеризует границу искомой фигуры как окружность, т.е. как множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом. Таким образом, если искомая фигура F существует (т.е. фигура наибольшей площади при заданном периметре), то это круг.

Доказательство существования фигуры с наибольшей площадью среди всех фигур с тем же периметром требует более серьезных средств, и, по-видимому, без анализа тут не обойтись. Рассмотрим два сценария, приводящих к одной цели.

Первым получил это доказательство Якоб Штейнер. Заметим, во-первых, что многоугольник с данным набором сторон имеет наибольшую площадь, если вокруг него можно описать окружность. Во-вторых, искать фигуру наибольшей площади надо среди выпуклых. В-третьих, для любого n-угольника с данным набором сторон существует n-угольник с тем же набором сторон, вокруг которого можно описать окружность. Теперь, используя эти факты, можно любую выпуклую фигуру с помощью преобразований, увеличивающих площадь и сохраняющих периметр, перевести в круг с таким же периметром. Эти преобразования устроены так: берем выпуклую фигуру F_0 с данным периметром, вписываем в нее некоторый n-угольник. Части фигуры между сторонами этого n-угольника и границей фигуры F_0 назовем „шапочками". От этого n-угольника переходим к n-угольнику с тем же набором сторон, вокруг которого можно описать окружность. Площадь n-угольника при этом увеличивается, а „шапочки" над сторонами оставляем такими же. Получаем новую фигуру F_1 с большей площадью и тем же периметром. В эту фигуру снова вписываем $2n$-угольник и проделываем то же самое, переходим к фигуре F_2 и т.д. Каждый раз, увеличивая число сторон вписанного в F_n многоугольника, устремляя их длины к нулю и деформируя возникающий на каждом шаге многоугольник во вписанный в окружность, приклеивая соответствующие „шапочки", в пределе получим круг с тем же периметром и площадью большей, чем площадь исходной фигуры F_0.

Помимо такого аналитического доказательства существования можно привести топологическое. Рассмотрим множество всех выпуклых фигур с данным периметром, содержащих некоторую фиксированную точку. На этом множестве фигур введем метрику Хаусдорфа, получим метрическое пространство (элементами которого являются наши фигуры). Это пространство ограничено и замкнуто, значит компактно. На нем рассмотрим функцию: каждому элементу сопоставим его площадь. Эта функция оказывается непрерывной. Непрерывная функция на компактном пространстве принимает наибольшее значение. Значит, найдется среди фигур, принадлежащих нашему множеству, та, площадь которой наибольшая.

Это не единственный шедевр древнегреческой математики, который до сих пор играет важную идейную и воспитательную роль в современной системе образования. „Начала" Евклида, написанные в 3 веке до новой эры, являются образцом построения современного школьного курса геометрии. Трисекция угла, квадратура круга, построение правильных многоугольников, проблема пятого постулата – это лишь малая часть задач, на которых вырабатывалась техника доказательств теорем существования на протяжении последних двух тысяч лет.

ЛИТЕРАТУРА

Арнольд В. И. (2012). *Задачи для детей от 5 до 15 лет*. Москва: МЦНМО.
Курант Р., Г. Роббинс (1967). *Что такое математика*? Москва: Просвещение.
Лакатос И. (1967). *Доказательства и опровержения*. Москва: Наука.
Пойа Д. (1975). *Математика и правдоподобные рассуждения*. Москва: Наука.
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia, ADE, (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

Вячеслав Тепляков
🖂 доцент
кафедра алгебры и геометрии
Институт математики и информатики Северного (Арктического) государственного университета имени М. В. Ломоносова, ул. „Набережная Северной Двины", 17, Архангельск, Россия

Нина Патронова
🖂 доцент, кандидат педагогических наук
кафедра методики преподавания математики
Институт математики и информатики Северного (Арктичского) государственного университета имени М. В. Ломоносова,
ул. „Набережная Северной Двины", 17, Архангельск, Россия

PREPARATION FOR OLYMPIADS – A CONVENIENT CAUSE TO DISCUSS REFINEMENTS OF MATHEMATICAL REASONINGS

Vjacheslav Tepljakov, Nina Patronova

Abstract. The paper considers some mathematical problems which have been discussed at mathematical circles for high school students in the Institute of Mathematics, Information and Space Technologies of the Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov.

Vjacheslav Tepljakov
✉ Associated Professor
Department of Algebra and Geometry
Institute of Mathematics and Computer Science
17, "Naberezhnaja Severnoj Dvini" Street
163060, Arkhangelsk, Russia

Nina Patronova
✉ Associated Professor, PhD in Pedagogy
Department of Methodics of Mathematics Teaching
Institute of Mathematics and Computer Science
17, "Naberezhnaja Severnoj Dvini" Street
163060, Arkhangelsk, Russia