# ПЕРВЫЙ ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ КАЗАХСТАНА

**Кайрош Макишев**

**Резюме.** Первый съезд учителей математики Казахстана, состоявшийся 10–12 мая 2011 года, постановил создать Казахстанскую Ассоциацию учителей математики. Ассоциация была создана и официально зарегистрирована 6 июля 2012 года. Согласно Плану мероприятий на 2013 год Казахстанская Ассоциация учителей математики проводила Первый творческий конкурс учителей математики. В данной статье обсуждаются задачия и решения конкурса.

*Keywords***:** creative competition, problem solving, teacher, achievement, methodology

Первый творческий конкурс учителей математики Казахстана состоялся 26–28 сентября 2013 года. Инициатором является исполнительный директор Ассоциации, директор РФМШИ, кандидат физико-математических наук Макишев К. Б. Конкурс проводился на базе Республиканской специализированной физико-математической школы–интернат им. О. Жаутыкова для одаренных детей. Он был поддержан Министерством образования Республики Казахстана. Генеральным спонсором конкурса выступил АО Интергаз Центральная Азия.

Основная цель конкурса – повышение престижа учителя, содействие росту их профессионального мастерства, вклад в развитие математического образования в республике, в сельских и городских школах, и повышение качества знаний по математике. Каждая область представила трех участников. Приняли участие 69 человек. Это разные по возрасту, опыту учителя, но одно их объединяет – безграничная любовь к математике, страстное желание решить задачу и одержать победу над ней.

Формат конкурса необычен и прост: только решение задач. Нет открытых уроков, не нужно портфолио учителя. Подготовительная работа членами Ассоциации велась с апреля 2013 года. На первый раз методическую помощь оказывал Московский Центр непрерывного математического образования в лице заслуженного учителя РФ, доцента кафедры методики преподавания математики, кандидата физико-математических наук Блинкова А. Д. Он приглашен в качестве члена жюри. Членом жюри был и профессор Института математики Болгарии Гроздев Сава. Другие члены – это ведущие ученые–математики вузов страны, доктора PhD, участники международных математических олимпиад, молодые учёные Казахстана. Председателем жюри был академик НАН РК Джумадильдаев А. С.

В конкурсе участвовали учителя всех типов школ Казахстана: школа для одаренных детей, гимназия, лицей, казахско-турецкий лицей, школы республиканского научно–методического центра работы с одаренными детьми „Дарын“, частные школы. Разнообразен был возрастной состав участников: от 22 лет до 55. Были кандидаты физико-математических наук, учителя-аспиранты, выпускники мехмата Московского университета им. Ломоносова, Новосибирского университета, национального университета в Китае.

Инициатива была положительно воспринята всеми управлениями образования областей и городов Астаны, Алматы. По отзывам участников, данный конкурс оказался своевременным, нужным. Предложенные задачи вызвали живой интерес, их хотелось решать и доказывать. Стиль языка простой для понимания, лаконичный, „доброжелательный“. Все 8 задач участниками были решены, особое внимание привлекла задача №4 о непрерывности функций. Блинков А. Д., составитель задач, дал глубокий, фундаментальный анализ решениям задач.

Есть задумка в мае организовать дистанционно или заочно олимпиаду для учителей математики. Работу конкурса освещали ведущие СМИ Республики Казахстан. Создан видеофильм об этом конкурсе, который был показан на закрытии. Выводы:

1. Учителя высказали пожелание сделать Конкурс учителей математики традиционным и проводить 1 раз в году;
2. Увеличить число участвующих;
3. Формат конкурса считать приемлемым;
4. Информацию о предстоящих конкурсах и олимпиадах помещать на сайте Ассоциации.

Время показало, что Ассоциация математиков своевременна, необходима, она – для консолидации деятельности математиков высшей и средней школы. У руководства Ассоциации много реальных идей.

### Условия, решения, комментарии и критерии проверки

*Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов*

**I. Решите задачи.**

**1. Рыцари и лжецы.** Каждому из ста жителей острова, часть жителей которого – рыцари, а остальные – лжецы, был задан вопрос: “Сколько среди вас рыцарей?”. В ответ было названо сто различных чисел. Какое число было названо наверняка? Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

*(Б. Р. Френкин, XII турнир математических боев имени А. П. Савина)*

*Ответ:* наверняка было названо число 1.

*Решение.* Заметим, что среди жителей острова не могло быть более одного рыцаря, так как в этом случае рыцари назвали бы одинаковые числа, что противоречит условию. Если же на острове – один рыцарь, то он обязательно назвал число 1, а лжецы назвали любые другие 99 различных чисел (возможно, и большие ста). Таким образом, число 1 обязательно было названо, а любое другое число могло быть и не названо.

*Критерии проверки.* Полное обоснованное решение – 10 баллов. Приведен верный ответ, объяснено, почему другие числа не удовлетворяют условию, но не объяснено, почему число 1 условию удовлетворяет – 7 баллов. Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию, но не объяснено, почему другие числа условию не удовлетворяют – 4 балла. Приведен только верный ответ – 1 балл.

**2. Раздел земли.** Четырехугольное поле разделено двумя диагоналями на четыре треугольных участка. Стоимость всех участков одинакова. Пьер и Жан купили противоположные участки. Площадь участка Пьера равна сумме площадей трех других участков. Докажите, что цена земли за акр на участке Жана равна сумме цен за акр на остальных трех участках.

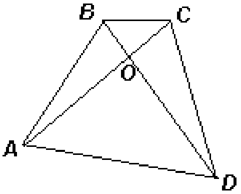
*(Фольклор)*

*Решение.* Обозначим площади участков Пьера и Жана через $S_p$ и $S_g$ соответственно, а площади двух остальных участков – через $S_1$ и $S_2$. Пусть стоимость каждого участка равна 1, тогда требуется доказать, что

$$\frac{1}{S_g}=\frac{1}{S_p}+\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2} \Leftrightarrow \frac{S_p-S_g}{S_pS_g}=\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}.$$

Докажем, что в последнем равенстве знаменатели дробей равны. Действительно, пусть диагонали четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке O (см. рис.). Тогда

$\dfrac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta BOA}}=\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{S_{\Delta DOC}}{S_{\Delta DOA}}$ (отношение площадей треугольников с общей высотой равно отношению их оснований).




Следовательно, $S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta DOA} = S_{\Delta BOA} \cdot S_{\Delta DOC}$.

Равенство числителей полученных дробей следует из условия задачи: $S_p = S_g + S_1 + S_2$. Таким образом, рассматриваемые дроби равны.

*Критерии проверки.* Полное обоснованное решение – 10 баллов. Приведено, в целом, верное рассуждение, но равенство произведений площадей треугольников использовано без доказательства – 7 баллов. Доказываемое утверждение формализовано в виде равенства дробей, но это равенство не доказано – 2 балла. Справедливость утверждения показана только на конкретном примере – 1 балл.

**3. Игра навылет**. Школьники играли в настольный теннис “на победителя”. Они установили очередь и правила: вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь шла в обратном порядке (вчерашний последний стал первым, предпоследний – вторым, и так далее). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый день, и во второй. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

*(Б. Р. Френкин)*

*Решение.* Пусть школьник А был последним в очереди в первый день и свою первую партию сыграл со школьником Б. Тогда Б – либо предпоследний, либо выиграл у всех, кто стоял в очереди между ним и А. Тем самым, Б сыграл со всеми, кто стоял в очереди после него.

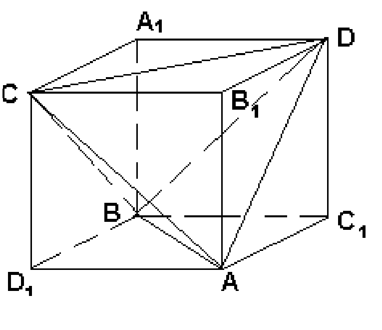
На следующий день все эти школьники (и только они!) окажутся в очереди впереди Б, поэтому свою первую партию он сыграет с кем-то из них.

*Критерии проверки.* Полное обоснованное решение – 10 баллов. Разобраны только отдельные частные случаи – не более, чем 3 балла.

**4. Угол.** Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях, как на основаниях, во внешнюю сторону построены правильные пирамиды $ABCD_1$, $ABDC_1$, $ACDB_1$ и $BCDA_1$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями $ABC_1$ и $ACD_1$.

*(Окружной тур ММО 1997 г.)*

*Ответ:* 90°.




*Решение.* Рассмотрим параллелепипед $AC_1BD_1B_1DA_1C$, описанный около данного тетраэдра и докажем, что его вершины $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ являются вершинами заданных пирамид (см. рис.).

Действительно, так как тетраэдр $ABCD$ – правильный, то описанный параллелепипед является кубом, поэтому его диагонали перпендикулярны соответствующим граням данного тетраэдра и проходят через центры этих граней. Из условия задачи следует, что указанные точки должны ортогонально проектироваться в центры соответствующих граней данного тетраэдра, значит, они лежат на прямых, содержащих диагонали куба. Кроме того, сфера, описанная около тетраэдра $ABCD$, одновременно является описанной и для куба, поэтому рассматриваемые точки являются вершинами куба.

Таким образом, искомый угол является углом между гранями этого куба и равен 90°.

*Критерии проверки.* Полное обоснованное решение – 10 баллов. Указано, но не обосновано, что вершины пирамид являются вершинами куба, и получен верный ответ – 5 баллов. Приведен только верный ответ – 1 балл.

**II. Методический блок.**

*В заданиях № 5 и № 6 могут содержаться математические ошибки (как в условиях "задач", так и в "ответах" и "решениях"). Если некорректно условие "задачи", то объясните, почему это так. Если неверно только "решение", то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

**5. "Задача".** Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 119, а разность квадратов – простое число.

*"Ответ"*: 60 и 59.

*"Решение".* Пусть $a$ и $b$ – искомые числа, тогда $a + b = 119$ и число $a^2 - b^2$ – простое. Так как $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, то $a - b = 1$. Решая систему уравнений $\begin{cases} a+b=119, \\ a-b=1 \end{cases}$, получим, что $a = 60$, $b = 59$.

*(Фольклор, предложил А. Д. Блинков)*

*Комментарий.* Таких чисел нет. Если $a - b = 1$, то $a^2 - b^2 = a + b = 119 = 7\cdot 17$, то есть 119 – составное число. Это можно в равной степени трактовать либо как некорректность условия (сумма чисел должна быть простым числом), либо как ошибку в "решении" и "ответе" (после разложения на множители можно сразу делать вывод, что искомых чисел не существует).

*Критерии проверки.* Верно указана ошибка и объяснено, из-за чего она произошла (в любой трактовке) – 10 баллов. Указано только, что искомых чисел нет – 3 балла.

**6. "Задача".** В шестиугольнике $ABCDEF$ противолежащие стороны равны и параллельны, а треугольник $ACE$ – равносторонний. Докажите, что существует такая точка O, что треугольники $AOB$, $COD$ и $EOF$ также равносторонние.

*"Решение".* Докажем сначала, что данный шестиугольник центрально симметричен. Действительно, так как $AB$ и $DE$ параллельны и равны, то $ABDE$ – параллелограмм. Следовательно, его диагонали $AD$ и $BE$ пересекаются в некоторой точке O и делятся ею пополам. Аналогично, $AD$ и $CF$ пересекают друг друга в серединах. Значит, точка $O$ является серединой всех трех диагоналей и центром симметрии шестиугольника.

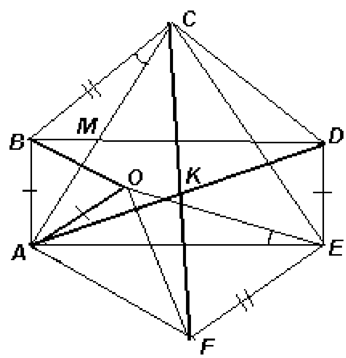
Следовательно, треугольник $DFB$ симметричен равностороннему треугольнику $ACE$ относительно точки О, поэтому он также – равносторонний. Значит, центры этих треугольников совпадают с $O$. Пусть $AD$ пересекает $BF$ в точке $H$. Угол $\hat{A}HO$ – прямой, так как $DH$ – высота треугольника $DBF$, $\angle HBO = 30°$, так как $BO$ – биссектриса угла $B$ в этом же треугольнике. Поэтому $\angle BOH = 60°$. Но $AO = B$O (равные части медиан в равных треугольниках АС$E$ и $BDF$). Таким образом, треугольник $AOB$ – равнобедренный с углом 60° при вершине, то есть – равносторонний.

Аналогично доказывается, что треугольники $COD$ и $EOF$ – также равносторонние.

*(А. В. Шаповалов и Л. Э. Медников (использована задаче Д. А. Калинина из XVIII турнира математических боев имени А. П. Савина))*

*Комментарий.* Условие задачи корректно, а в “решении” есть принципиальная ошибка: из того, что треугольники $DFB$ и $ACE$ симметричны, не следует, что точка О – их общий центр. На самом деле, их центры симметричны относительно О, но не совпадают с ней (если данный шестиугольник не является правильным). Следствием этой ошибки, в частности, является полученное равенство $AO = B$O, равносильное равенству диагоналей $AD$ и $BE$, которое в общем случае выполняться не обязано. Понятно также, что искомая точка – другая.

Приведем два способа решения задачи.




*Первый способ.* Построим внутрь шестиугольника равносторонний треугольник $AOB$ и докажем, что его вершина $O$ – искомая. Для этого потребуется доказать, что треугольники $EOF$ и $COD$ – равносторонние (см. рис.).

Из условия задачи следует, что $ABDE$ – параллелограмм, значит, $BD \parallel AE$ и $\angle CBD = \angle AEF$ (углы с противоположно направленными сторонами).

Рассмотрим поворот с центром А на угол 60° по часовой стрелке. Образами точек С и В будут являться точки Е и О соответственно, поэтому образом треугольника $ABC$ будет треугольник $AOE$. Значит, эти треугольники равны. Поэтому $OE = BC = EF$ и $\angle OEA = \angle BCA$.

Пусть $AC$ пересекает $BD$ в точке $M$. Тогда $\angle CMD = \angle CAE = 60°$. Следовательно, $\angle OEF = \angle OEA + \angle AEF = \angle BCA + \angle CBD = \angle CMD = 60°$. Таким образом, в равнобедренном треугольнике $OEF$ есть угол 60°, поэтому этот треугольник – равносторонний.

Аналогично доказывается, что и треугольник $COD$ – равносторонний.

*Второй способ.* Как было показано в начале “решения”, данный шестиугольник центрально симметричен. Пусть $K$ – центр симметрии. Рассмотрим композицию двух поворотов: на 120° против часовой стрелки вокруг центра треугольника $ACE$ и поворота на 180° вокруг точки $K$. Она является поворотом на 60° вокруг некоторой точки $O$, причем образами вершин A, C и E являются вершины B, $D$ и $F$ соответственно (см. рис. 6).

*Критерии проверки* (баллы суммируются). Указано, что условие *“задачи”* корректно – 2 балла. Верно указана принципиальная ошибка в *“решении”* – 3 балла (если указано только следствие этой ошибки – 1 балл). Приведено верное решение – 5 баллов.

**7. На уроке в 10 классе была предложена задача:** “В круг радиуса $R$ впишите равнобедренный треугольник наибольшей площади”. Ученик, вызванный к доске, записал решение, приведенное ниже.

Пусть угол при вершине равнобедренного треугольника равен $\alpha$. Тогда боковая сторона треугольника: $b = 2R\cos 0{,}5\alpha$. Площадь треугольника: $S = 0{,}5b^2\sin\alpha = 2R^2\sin\alpha\cos^2 0{,}5\alpha$. Используем формулу понижения степени, тогда $S = R^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$. Находя производную, получим: $S' = R^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = R^2(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$.

Сделаем замену: $t = \cos\alpha$. Корни получившегося квадратного трехчлена $2t^2 + t - 1$ равны $-1$ и $0{,}5$. На промежутке $(-1; 0{,}5)$ его значения отрицательны, а на промежутке $(0{,}5; +\infty)$ – положительны, то есть “при переходе” через 0,5 производная меняет знак с минуса на плюс, значит эта точка является точкой минимума. Таким образом, наибольшего значения площади не существует.

После этого ученик предположил, что в условии задачи опечатка: имеется ввиду не наибольшая площадь, а наименьшая.

*1) Оправдано ли заключительное предположение ученика? Обоснуйте.*

*2) Если в его решении есть ошибки и погрешности, то укажите их и подробно прокомментируйте.*

*(Е. Б. Гладкова (использована задача № 439 из учебника Н. Я. Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 10 кл. – М.: “Просвещение”, 1999))*

*Комментарий.* 1) Опечатки в условии задачи нет. Равнобедренного треугольника наименьшей площади, вписанного в данный круг, не существует. Это легко показать, рассматривая вписанный треугольник, близкий к “вырожденному”. Его площадь может быть равна сколь угодно малому положительному числу.

2) Главная ошибка ученика – в заключительной фазе решения: сделан неверный

вывод об изменении знака производной, так как ученик “забыл”, что функция $t = \cos\alpha$ на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ убывает. Получив, что производная обращается в ноль при $t = 0{,}5$, можно было найти соответствующее значение $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и убедиться в том, что, на самом деле, “при переходе” через это значение аргумента производная меняет знак с плюса на минус, то есть $\alpha = \frac{\pi}{3}$ является точкой максимума функции.

3) При этом, приведенные рассуждения ученика все равно не позволяют сделать вывод о том, что именно при таком значении $\alpha$ функция принимает наибольшее значение. Это связано с другими погрешностями его решения, а именно: а) не указан промежуток, на котором рассматривается функция (формально говоря, не указано даже, что $\alpha$ является ее аргументом), поэтому, в частности, неясно из-за чего не рассмотрено значение $t = -1$; б) не обоснована и даже не упомянута непрерывность функции, без чего ни один из двух стандартных алгоритмов поиска ее экстремальных значений (в том числе и тот, который, видимо, подразумевался в “решении”) не работает.

Устранив эти недочеты “решения”, можно обоснованно получить, что искомый треугольник – равносторонний.

*Критерии проверки* (баллы суммируются). Обоснована корректность условия задачи – 2 балла. Указана и прокомментирована основная ошибка – 4 балла. Указаны и прокомментированы остальные погрешности – 4 балла.

**8.** Приведите как можно больше различных способов решения задачи: “Найдите наибольшее значение выражения $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.”

*(Фольклор, предложили А. Д. Блинков и С. Л. Синякова)*

*Ответ*: 1.

*Решение*. Указанное значение достигается, например, при $x = 1$, $y = 0$, поэтому достаточно рассмотреть различные способы доказательства неравенства $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le 1$. Кроме того, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le |x|\sqrt{1-|y|^2} + |y|\sqrt{1-|x|^2}$, поэтому указанное неравенство достаточно доказать для случая, когда $x \ge 0$ и $y \ge 0$.

*Первый способ (“алгебраический”)*. По неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим $x\sqrt{1-y^2} = \sqrt{x^2(1-y^2)} \le \frac{x^2+1-y^2}{2}$. Аналогично, $y\sqrt{1-x^2} \le \frac{y^2+1-x^2}{2}$.

Складывая эти неравенства почленно, получим: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le 1$.

*Второй способ (“векторный”).* Рассмотрим векторы $\overline{a}\left(x; \sqrt{1-x^2}\right)$ и $\overline{b}\left(\sqrt{1-y^2}; y\right)$ в декартовой системе координат. Так как $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = 1$, то $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ $\leq \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| = 1$.

Отметим, что при этом способе решения не используется, что $x \geq 0$ *и* $y \geq 0$.

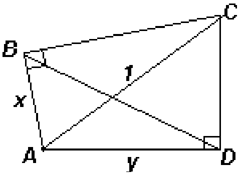
Разновидностью этого способа является применение неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$ для $k = 2$, где $x_1 = x$; $y_1 = \sqrt{1-y^2}$; $x_2 = \sqrt{1-x^2}$; $y_2 = y$.

*Третий способ (“тригонометрический”).* Из условия задачи и сказанного выше следует, что $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$. Значит, на отрезке $[0; 90°]$ найдутся такие углы $\alpha$ и $\beta$, что $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$. Тогда $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha + \beta) \leq 1$.

*При замене переменных можно также использовать и косинусы острых углов.*

*Четвертый способ (“геометрический”).* Заметим, что при $x = 0$ или $y = 0$ доказываемое неравенство, очевидно, выполняется. Аналогично, если $x = 1$ или $y = 1$.




Если $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$, то рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и *ADC* с общей гипотенузой AC = 1 (точки B и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно AC, см. рис.). Тогда четырехугольник ABCD является вписанным в окружность диаметра 1.

Пусть AB = x, *AD* = *y*, тогда BC = $\sqrt{1-x^2}$, CD = $\sqrt{1-y^2}$ (см. рис.). По теореме Птолемея $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ = AB·CD + BC·AD = AC·*B*D ≤ 1, так как каждая из диагоналей четырехугольника не больше, чем диаметр описанной окружности.

*Критерии проверки.* Приведено не менее четырех способов решения – 10 баллов. Приведено три способа решения – 7 баллов. Приведено два способа решения – 4 балла.

Приведен один способ решения – 1 балл. Если приведены, в целом, верные рассуждения, но допущены неточности (не обоснован переход к неотрицательным значениям x и y, не рассмотрены «крайние» значения x и y там, где это необходимо, и т. п.), то из общей суммы вычитается по 1 баллу за каждую неточность.

**ЛИТЕРАТУРА**

Зимняя И. А. (2004). *Ключевые компетентности как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании*. Москва: Наука.

Сергеева, Т. Ф., С. Гроздев (2012), Субектность как методологический принцип, Математика и информатика, 3, 201 – 207.

Grozdev, S. (2007*). For High Achievements in Mathematics. Theory and Practice.* (*The Bulgarian Experience*). Sofia: ADE. ISBN 978-954-92139-1-1, 295 pages.

## FIRST CREATIVE COMPETITION FOR MATHEMATICS TEACHERS OF KAZAKHSTAN

**Abstract.** The First Congress of Mathematics Teachers of Kazakhstan was held on 10–12 May 2011. One of the decisions was to create the Kazakhstan Association of Mathematics Teachers, which was registered officially on 6 July 2012. According to the Event Plan the First creative competition for Mathematics teachers was organized. The present paper considers the problems and the solutions of the competition.

**Kairosh Makishev**
✉ Doctor in Physics-Mathematics
Director RSPhMSBS
Buhar Zhirau Street, 36
050040 Almaty, Republic of Kazakhstan
E-mail: makishev@mail.ru