

ПЕДАЛНА КРИВА НА ТОЧКА СПРЯМО ФОЙЕРБАХОВА КОНФИГУРАЦИЯ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Институт по математика и информатика – БАН

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В статия е описано обобщение на понятието педална окръжност от геометрията на триъгълника.

Keywords: triangle, conic, pedal curve, Feuerbach configuration, GSP.

Много основни понятия от геометрията на триъгълника могат да се обобщят по естествен начин чрез подходящи конструкции, зависещи от конични сечения. Тук ще покажем едно обобщение на понятието педална окръжност на точка в равнината на даден $\triangle ABC$. Обосноваването на получените резултати ще осъществим с помощта на барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Средите на страните BC , CA и AB означаваме съответно с $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Освен това при извършване на необходимите построения ще използваме конструктивните и динамични възможности на програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP).

1. Педални окръжности и Симсънови прави. Нека $P(x_p, y_p, z_p)$ ($x_p + y_p + z_p = 1$) е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$. Ако P лежи върху описаната за триъгълника окръжност Γ , то ортогоналните проекции P_a , P_b и P_c на P , съответно върху правите BC , CA и AB , лежат на една права s_p – Симсънова права на P . Във всички останали случаи точките P_a , P_b и P_c са върхове на триъгълник, който притежава описана окръжност π_p – педална окръжност на P . Целта ни е да намерим крива от втора степен, която да е обобщение на педалната окръжност на произволна точка P . Тъй като точките, определящи окръжността π_p , се получават по същия начин както точките, определящи произволна Симсънова права, можем да очакваме, че обобщаването на понятието педална окръжност ще се получи подобно на обобщаването на понятието Симсънова права. Обобщение на понятието Симсънова права е направено в (Ненков, 2007) по следния начин: нека $\bar{k}(O)$ е произволно описано за $\triangle ABC$ конично сечение

с център O и P е точка от $\bar{k}(O)$. Ако правите p_a, p_b и p_c са успоредни съответно на OM_a, OM_b и OM_c , то точките $P_a = p_a \cap BC$, $P_b = p_b \cap CA$ и $P_c = p_c \cap AB$ лежат на една права s_P , която наричаме *Симсънова права на P спрямо $\bar{k}(O)$* . Аналогично можем да разгледаме същите прави през произволна точка P , нележаща на $\bar{k}(O)$. Тогава обаче трите точки P_a, P_b и P_c няма да са достатъчни за еднозначно определяне на крива от втора степен. Затова е необходимо да припомним едно свойство на педалната окръжност π_P . Ако Q е изогонално спрегнатата точка на P спрямо $\triangle ABC$, а Q_a, Q_b и Q_c са ортогоналните проекции на Q съответно върху правите BC, CA и AB , то π_P минава през Q_a, Q_b и Q_c . Освен това центърът на окръжността π_P е средата на PQ . Следователно търсеното обобщение трябва да се свърже с точка, която съответства на P при изображение спрямо $\triangle ABC$ и $\bar{k}(O)$ подобно на изогоналното. Затова ще покажем как се определя едно изображение, което обобщава изогоналното.

2. Изображение спрямо Фойербахова конфигурация. Нека $I(x_I, y_I, z_I)$ ($x_I + y_I + z_I = 1$) е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$, нележаща на никоя от правите $BC, CA, AB, M_bM_c, M_cM_a$ и M_aM_b . Спрямо $\triangle ABC$ точката I има спрегнат триъгълник $I_AI_BI_C$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Точките $I(x_I, y_I, z_I)$, $I_A\left(-\frac{x_I}{1-2x_I}, \frac{y_I}{1-2x_I}, \frac{z_I}{1-2x_I}\right)$, $I_B\left(\frac{x_I}{1-2y_I}, -\frac{y_I}{1-2y_I}, \frac{z_I}{1-2y_I}\right)$ и $I_C\left(\frac{x_I}{1-2z_I}, \frac{y_I}{1-2z_I}, -\frac{z_I}{1-2z_I}\right)$ са центрове на конични сечения $k(I), k(I_A), k(I_B)$ и $k(I_C)$, вписани в $\triangle ABC$. Средите на отсечките $I_A, I_B, I_C, I_AI_C, I_CI_A$ и I_AI_B лежат

на конично сечение $\bar{k}(O)$, описано за $\triangle ABC$ (Ненков, 2008). От резултатите, получени в (Ненков, 2008), следва, че уравнението на кривата $\bar{k}(O)$ и координатите на центъра O са съответно следните:

$$(1) \quad \bar{k}(O): x_I^2yz + y_I^2zx + z_I^2xy = 0,$$

$$(2) \quad O\left(\frac{(1-2x_I-2y_Iz_I)x_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2y_I-2z_Ix_I)y_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2z_I-2x_Iy_I)z_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}\right).$$

Коничните сечения $k(I), k(I_A), k(I_B), k(I_C)$ и $\bar{k}(O)$ са свързани с редица общи свойства. Поради едно от тях казваме, че те са елементи на една *Фойербахова конфигурация* (Ненков, 2010).

Сега ако $P(x_P, y_P, z_P)$ е произволна точка, нележаща върху никоя от правите BC, CA и AB , въвеждаме означенията $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$ и $C_1 = AC \cap AB$.

Нека AA_2 ($A_2 \in BC$) е хармонично спрегната на AA_1 спрямо AI и $I_B I_C$, BB_2 ($B_2 \in CA$) е хармонично спрегната на BB_1 спрямо BI и $I_C I_A$, а CC_2 ($C_2 \in AB$) е хармонично спрегната на CC_1 спрямо CI и $I_A I_B$. В (Гроздев & Ненков, 2012) е показано, че правите AA_2 , BB_2 и CC_2 минават през една точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, координатите на която се изразяват с равенствата:

$$(3) \quad x_Q = \frac{x_I^2 y_P z_P}{\vartheta(P)}, \quad y_Q = \frac{y_I^2 z_P x_P}{\vartheta(P)}, \quad z_Q = \frac{z_I^2 x_P y_P}{\vartheta(P)},$$

където

$$(4) \quad \vartheta(P) = x_I^2 y_P z_P + y_I^2 z_P x_P + z_I^2 x_P y_P.$$

Равенствата (3) задават изображение в равнината на $\triangle ABC$, което на точката P съпоставя единствена точка Q . В (Гроздев & Ненков, 2012) точките P и Q са наречени *спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$* . Тъй като кривата $\bar{k}(O)$ е елемент на разглежданата Фойербахова конфигурация, можем да казваме още, че точките P и Q са *спрегнати спрямо Фойербаховата конфигурация, на която принадлежи $\bar{k}(O)$* . От резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2012), следва, че двойните елементи спрямо произволна Фойербахова конфигурация са точките I, I_A, I_B и I_C .

3. Педална крива. Нека $P(x_P, y_P, z_P)$ ($x_P + y_P + z_P = 1$) е точка от равнината на $\triangle ABC$, нележаща върху $\bar{k}(O)$, а точката Q е нейната спрегната спрямо разглежданата Фойербахова конфигурация. Построяваме правите q_a, q_b и q_c , които са успоредни съответно на OM_a, OM_b и OM_c . Ще докажем, че построените по-рано точки P_a, P_b и P_c заедно с точките $Q_a = q_a \cap BC$, $Q_b = q_b \cap CA$ и $Q_c = q_c \cap AB$ лежат на една крива от втора степен π_P .

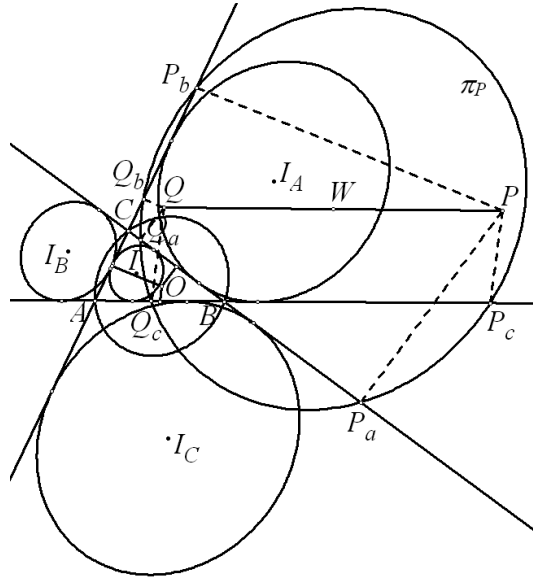
Координатите на точката P_a намираме от параметричните уравнения на правата p_a , записани във вида $x = x_P + 2x_0 \bar{p}_a$, $y = y_P + (2y_0 - 1) \bar{p}_a$, $z = z_P + (2z_0 - 1) \bar{p}_a$ и уравне-

нието $x=0$ на правата BC . Получаваме $P_a \left(0, \frac{(1-2y_0)x_P + 2x_0 y_P}{2x_0}, \frac{(1-2z_0)x_P + 2x_0 z_P}{2x_0} \right)$.

По аналогичен начин координатите на P_b и P_c се получават във вида

$$P_b \left(\frac{(1-2x_0)y_P + 2y_0 x_P}{2y_0}, 0, \frac{(1-2z_0)y_P + 2y_0 z_P}{2y_0} \right),$$

$$P_c \left(\frac{(1-2x_0)z_P + 2z_0 x_P}{2z_0}, \frac{(1-2y_0)z_P + 2z_0 y_P}{2z_0}, 0 \right).$$



Фигура 1

Сега от (2) следва, че точките P_a , P_b и P_c имат и следните координатни представяния

$$(5) \quad \begin{aligned} P_a & \left(0, \frac{1-2z_I-2x_I y_I}{2x_I^2} x_P + y_P, \frac{1-2y_I-2z_I x_I}{2x_I^2} x_P + z_P \right), \\ P_b & \left(\frac{1-2z_I-2x_I y_I}{2y_I^2} y_P + x_P, 0, \frac{1-2x_I-2y_I z_I}{2y_I^2} y_P + z_P \right), \\ P_c & \left(\frac{1-2y_I-2z_I x_I}{2z_I^2} z_P + x_P, \frac{1-2x_I-2y_I z_I}{2z_I^2} z_P + y_P, 0 \right). \end{aligned}$$

Като се заместят x_P , y_P и z_P в (5) съответно с x_Q , y_Q и z_Q , от (3) се получават координатите на точките Q_a , Q_b и Q_c във вида:

$$(6) \quad \begin{aligned} Q_a & \left(0, \frac{[(1-2z_I-2x_I y_I) y_P + 2y_I^2 x_P] z_P}{2\vartheta(P)}, \frac{[(1-2y_I-2z_I x_I) z_P + 2z_I^2 x_P] y_P}{2\vartheta(P)} \right), \\ Q_b & \left(\frac{[(1-2z_I-2x_I y_I) x_P + 2x_I^2 y_P] z_P}{2\vartheta(P)}, 0, \frac{[(1-2x_I-2y_I z_I) z_P + 2z_I^2 y_P] x_P}{2\vartheta(P)} \right), \\ Q_c & \left(\frac{[(1-2y_I-2z_I x_I) x_P + 2x_I^2 z_P] y_P}{2\vartheta(P)}, \frac{[(1-2x_I-2y_I z_I) y_P + 2y_I^2 z_P] x_P}{2\vartheta(P)}, 0 \right). \end{aligned}$$

След известни пресмятания, получени с помощта на софтуерния продукт Maple, от (5) и (6) се установява, че шестте точки P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b и Q_c удовлетворяват уравнението

$$(7) \quad 4.\vartheta(P) \cdot (x_I^2 y z + y_I^2 z x + z_I^2 x y) - (a_{11} x + a_{22} y + a_{33} z)(x + y + z) = 0,$$

където

$$a_{11} = [(1 - 2x_I - 2y_I z_I) y_P + 2y_I^2 z_P] [(1 - 2x_I - 2y_I z_I) z_P + 2z_I^2 y_P] x_P,$$

$$a_{22} = [(1 - 2y_I - 2z_I x_I) z_P + 2z_I^2 x_P] [(1 - 2y_I - 2z_I x_I) x_P + 2x_I^2 z_P] y_P,$$

$$a_{33} = [(1 - 2z_I - 2x_I y_I) x_P + 2x_I^2 y_P] [(1 - 2z_I - 2x_I y_I) y_P + 2y_I^2 x_P] z_P,$$

а $\vartheta(P)$ се изразява с равенството (4).

От (7), като вземем предвид (1), се получава следното

Твърдение 1. Ако точката P не лежи върху $\bar{k}(O)$, то точките P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b и Q_c лежат на една крива от втора степен π_P (фиг. 1).

Кривата π_P ще наричаме *педална крива на P и Q спрямо разглежданата Фойербахова конфигурация* или *спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$* .

Относно вида на педалната крива на дадена точка с GSP се забелязва следното

Твърдение 2. Всички педални криви спрямо постоянна, описана за ΔABC крива $\bar{k}(O)$, са от същия вид, от който е $\bar{k}(O)$.

Нещо повече, от резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2014), твърдение 2 се уточнява чрез следващите твърдения:

Твърдение 3. Ако кривата $\bar{k}(O)$ е елипса, то за всяка точка $P \notin \bar{k}(O)$ от равнината на ΔABC кривата π_P е елипса, хомотетична на $\bar{k}(O)$ (фиг. 1).

Твърдение 4. Ако кривата $\bar{k}(O)$ е хипербола, то за всяка точка $P \notin \bar{k}(O)$ от равнината на ΔABC кривата π_P е хипербола, хомотетична на $\bar{k}(O)$ или на нейната спрегната $\bar{\bar{k}}(O)$.

Забележка. Тук разглеждаме само централни криви, но ако $\bar{k}(O)$ е парабола, можем да считаме двете прави, минаващи през P и Q , които са успоредни на оста на параболата, като педална крива на тези точки. В този случай обаче твърдение 2 не е изпълнено.

4. Няколко свойства на центъра на педална крива. Нека W е средата на отсечката PQ . Тогава за координатите на W от (3) и (4) се получават равенствата

$$(8) \quad x_W = \frac{\vartheta(P) x_P + x_I^2 y_P z_P}{2\vartheta(P)}, \quad y_W = \frac{\vartheta(P) y_P + y_I^2 z_P x_P}{2\vartheta(P)}, \quad z_W = \frac{\vartheta(P) z_P + z_I^2 x_P y_P}{2\vartheta(P)}.$$

Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е точка от π_P , а $M_2(x_2, y_2, z_2)$ е точката, симетрична на M_1

спрямо W , от (8) следва, че $x_2 = \frac{\vartheta(P)(x_P - x_1) + x_I^2 y_P z_P}{\vartheta(P)}$, $y_2 = \frac{\vartheta(P)(y_P - y_1) + y_I^2 z_P x_P}{\vartheta(P)}$ и

$z_2 = \frac{\vartheta(P)(z_P - z_1) + z_I^2 x_P y_P}{\vartheta(P)}$. Означаваме с $f(x, y, z)$ лявата част на (7). След известни

пресмятания с помощта на Maple получаваме, че $\frac{f(x_2, y_2, z_2) - \vartheta(P) \cdot f(x_1, y_1, z_1)}{\vartheta(P)} = 0$.

Тъй като $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ (защото $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi_P$), от последното равенство следва, че $f(x_2, y_2, z_2) = 0$. Следователно точката M_2 лежи върху π_P . Така установихме следното

Твърдение 5. *Средата W на отсечката PQ е центърът на педалната крива π_P .*

Друго интересно свойство, свързано с педалните криви и Симсъновите прави, се получава чрез следващите построения. Нека l_a , l_b и l_c са прави, минаващи през P и успоредни съответно на AI , BI и CI , като $l_a \cap I_B I_C = P_A$, $l_b \cap I_C I_A = P_B$ и $l_c \cap I_A I_B = P_C$. Освен това с l'_a , l'_b и l'_c означаваме правите, минаващи през P и успоредни съответно на $I_B I_C$, $I_C I_A$ и $I_A I_B$, като $l'_a \cap AI = P'_A$, $l'_b \cap BI = P'_B$ и $l'_c \cap CI = P'_C$. Наблюденията с GSP показват, че правите $P_A P'_A$, $P_B P'_B$ и $P_C P'_C$ се пресичат в една точка или са успоредни.

Записваме правите l_a , l'_a , AI и $I_B I_C$ със следващите параметрични уравнения:

$$l_a : \begin{cases} x = x_P + (x_P - 1)\alpha, \\ y = y_P + y_I \alpha, \\ z = z_P + z_I \alpha, \end{cases} \quad l'_a : \begin{cases} x = x_P + (z_I - y_I)\alpha', \\ y = y_P + y_I \alpha', \\ z = z_P - z_I \alpha', \end{cases}$$

$$AI : \begin{cases} x = 1 + (x_I - 1)\bar{\alpha}, \\ y = y_I \bar{\alpha}, \\ z = z_I \bar{\alpha}, \end{cases} \quad I_B I_C : \begin{cases} x = 1 + (z_I - y_I)\bar{\alpha}', \\ y = y_I \bar{\alpha}', \\ z = -z_I \bar{\alpha}'. \end{cases}$$

От последните уравнения намираме координатите на точките P_A и P'_A по следния начин

$$P_A \left(\frac{(z_I - y_I)(z_I y_P - y_I z_P) + 2y_I z_I}{2y_I z_I}, \frac{y_I(z_I y_P - y_I z_P)}{2y_I z_I}, -\frac{y_I(z_I y_P - y_I z_P)}{2y_I z_I} \right),$$

$$P'_A \left(\frac{(x_I - 1)(z_I y_P + y_I z_P) + 2y_I z_I}{2y_I z_I}, \frac{y_I (z_I y_P + y_I z_P)}{2y_I z_I}, \frac{y_I (z_I y_P + y_I z_P)}{2y_I z_I} \right).$$

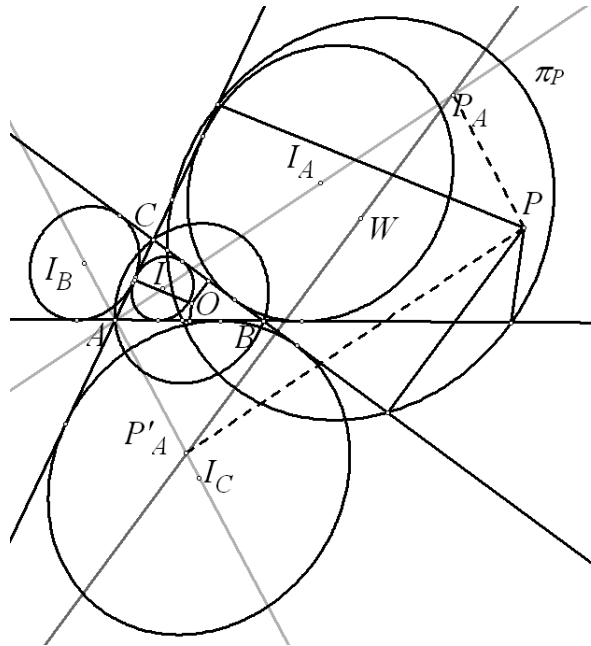
От координатите на точките P_A и P'_A определяме общото уравнение на правата $P_A P'_A$ във вида:

$$P_A P'_A : (z_I^2 y_P^2 - y_I^2 z_P^2) x + (z_I^2 y_P^2 - y_I^2 z_P^2 - 2z_I^2 y_P) y + (z_I^2 y_P^2 - y_I^2 z_P^2 + 2y_I^2 z_P) z = 0.$$

По аналогичен начин намираме уравненията на правите $P_B P'_B$ и $P_C P'_C$ във вида:

$$P_B P'_B : (x_I^2 z_P^2 - z_I^2 x_P^2 + 2z_I^2 x_P) x + (x_I^2 z_P^2 - z_I^2 x_P^2) y + (x_I^2 z_P^2 - z_I^2 x_P^2 - 2x_I^2 z_P) z = 0,$$

$$P_C P'_C : (y_I^2 x_P^2 - x_I^2 y_P^2 - 2y_I^2 x_P) x + (y_I^2 x_P^2 - x_I^2 y_P^2 + 2x_I^2 y_P) y + (y_I^2 x_P^2 - x_I^2 y_P^2) z = 0.$$



Фигура 2

Сега, като се заместят равенствата (8) във всяко от последните три уравнения, се вижда, че координатите на W удовлетворяват тези уравнения. С това е доказано следното:

Твърдение 6. Ако точката P не лежи върху описаната крива $\bar{k}(O)$, правите $P_A P'_A$, $P_B P'_B$ и $P_C P'_C$ минават през центъра на π_P .

В случая $P \in \bar{k}(O)$ от (1) следва, че е изпълнено равенството $\vartheta(P) = 0$. Тогава от уравненията на правите $P_A P'_A$, $P_B P'_B$ и $P_C P'_C$ се вижда, че те са колинеарни с вектора $(x_I^2 y_P z_P, y_I^2 z_I x_I, z_I^2 x_I y_I)$. Следователно е изпълнено

Твърдение 7. Ако точката P лежи върху описаната крива $\bar{k}(O)$, правите $P_A P'_A$, $P_B P'_B$ и $P_C P'_C$ са успоредни.

Нещо повече, може да се покаже, че тези прави принадлежат на спрегнатото направление на Симсъновата права s_P . Други интересни свойства на Симсъновите прави се съдържат в (Гроздев & Ненков, 2014) и (Гроздев, Ненков, Хаимов, 2013).

Накрая ще отбележим някои специални педални криви за дадена Фойербахова конфигурация. Педалните криви на двойните елементи I , I_A , I_B и I_C за изображението спрямо Фойербаховата конфигурация са съответно вписаните криви $\bar{k}(I)$, $\bar{k}(I_A)$, $\bar{k}(I_B)$ и $\bar{k}(I_C)$. Педалната крива на центъра O на описаната крива $\bar{k}(O)$ е крива $\Omega(O)$, която минава през точките M_a , M_b , M_c и пресечните точки на правите през върховете A , B и C , съответно успоредни на OM_a , OM_b и OM_c , със срещуположните им прави BC , CA и AB . Тази крива наричаме *Ойлерова крива* за $\triangle ABC$ в разглежданата Фойербахова конфигурация. Ойлеровата крива е аналог на класическата Ойлерова окръжност за триъгълника.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & Ненков, В. (2012). Две двойки точки, породени от асоциирани спрямо триъгълник централни конични сечения. *Математика и информатика*, 55 (1), 60 – 83.
- Гроздев, С., Ненков, В. & Хаимов, Х. (2013). Осем линии през една забележителна точка за четириъгълник, *Математика плюс*, 21 (4), 63 – 65.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2014). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник. *Математика и информатика*, 57 (2), 139 – 154.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2014). Няколко свойства на Симсъновите прави, свързани с Ойлерови криви. *Математика и математическо образование*, 43, 240 – 247.
- Ненков, В. (2007). Две описани конични сечения и две породени от тях множества от прави. *Математика и математическо образование*, 36, 392 – 396.
- Ненков, В. (2008). Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, 51 (2), 35 – 42.
- Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, 53 (5), 42 – 61.

Паскалев, Г. & Чобанов, И. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.

REFERENCES

- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). Dve dvoynki tochki, porodeni ot asocirani spryamo tri'g'lnik centralni konichni sechenia. *Matematika i Informatika*, 55 (1), 60 – 83.
- Grozdev, S., Nenkov, V. & Haimov, H. (2013). Osem linii prez edna zabelezhitelna tochka za chetiri'g'lnik. *Matematika Plus*, 21 (4), 63 – 65.
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2014). Homotetichni konichni sechenyav ravninata na tri'g'lnik. *Matematika i Informatika*, 57 (2), 139 – 154.
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2014). Nyakolko svoystva na Sims'novite pravi, sv'rzani s Oylerovi krivi. *Matematika i matematichsko obrazovanie*, 43, 240 – 247.
- Nenkov, V. (2007). Dve opisani konichni sechenia i dve porodeni ot tyah mnozhestva ot pravi. *Matematika i matematichsko obrazovanie*, 36, 392 – 396.
- Nenkov, V. (2008). Obobshtenie na teoremata na Feuerbah. *Matematika i Informatika*, 51 (2), 35 – 42.
- Nenkov, V. (2010). Nyakolko svoystva na Feuerbahovata konfiguracia. *Matematika i Informatika*, 53 (5), 42 – 61.
- Paskalev, G. & Chobanov, G. (1985). *Zabelezhitelni tochki v tri'g'lnika*. Sofia: Narodna prosveta.

A PEDAL CURVE OF A POINT WITH RESPECT TO A FEUERBACH CONFIGURATION

Abstract. A generalization of the pedal circle notion is described in the paper concerning the triangle geometry.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
31, Sajko Saev Str.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg