

ОТНОСНО ПОЛИНОМИТЕ С КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА ЕДИН КЛАС ИЗПЪКНАЛИ ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

¹⁾ Сава Гроздев, ²⁾ Веселин Ненков

¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ ВВМУ „Никола Вапцаров“ – Варна

Резюме. Изведена е геометрична връзка между корените на полиноми на комплексна променлива с кратни корени във върховете на изпъкнал четириъгълник и корените на съответните им производни. Накрая, като приложение са разгледани някои полиноми на реална променлива с реални коефициенти.

Ключови думи: полином; производна на полином; корени на полином; изпъкнал четириъгълник; елипса; фокус

В (Grozdev & Nenkov, 2019) е описана една геометрична връзка между полиномите, корените на които се намират във върховете на успоредник, и корените на съответните им производни. Тази геометрична връзка съдържа фокусите на подходяща елипса, вписана в разглеждания успоредник. От друга страна, във всеки изпъкнал четириъгълник могат да се впишат безкраен брой елипси. Така възниква въпросът за съществуване на връзка между някои от тези елипси и производните на полиномите, които имат корени само във върховете на даден четириъгълник. Целта на този материал изложение е да се покаже как изглежда една такава връзка между някои полиноми с корени във върховете на изпъкнал четириъгълник, съответните им производни и подходящо подбрани елипси, вписани в разглеждания четириъгълник.

Преди да преминем към излагане на основното съдържание на разглежданата тема, ще отбележим две помощни твърдения.

Лема 1. *Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури.*

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018 a). От лема 1 следва, че от всички полиноми, принадлежащи на клас от полиноми с еднаква геометрия, е достатъчно да се изследва само някой нормиран полином, за да се определи геометрията на класа, определен от производните на полиномите от разглеждания клас.

Лема 2. Ако $a_1, a_2, \dots, a_s$ са корени на полином $P(z)$ от n -та степен, така че a_j е k_j ($j=1,2,\dots,s$) кратен корен на $P(z)$ и $k_1+k_2+\dots+k_s=n$, то коефициентът пред първата степен на променливата z е равен на

$$a_1^{k_1-1} a_2^{k_2-1} \dots a_s^{k_s-1} (k_1 a_2 a_3 \dots a_s + k_2 a_3 \dots a_s a_1 + \dots + k_s a_1 a_2 \dots a_{s-1}).$$

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018 b).

Основният резултат, който ще докажем, се съдържа в следващата теорема.

Теорема. Нека k_j ($j=1,2,3,4$) са естествени числа и k е елипса, вписана в изпъкналият четириъгълник $A_1 A_2 A_3 A_4$, така че за допирните точки P_1, P_2, P_3 и P_4 на k съответно с отсечките $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4$ и $A_4 A_1$ са изпълнени равенствата:

$$(1) \quad \overline{A_1 P_1} : \overline{A_2 P_1} = -k_1 : k_2, \quad \overline{A_2 P_2} : \overline{A_3 P_2} = -k_2 : k_3, \quad \overline{A_3 P_3} : \overline{A_4 P_3} = -k_3 : k_4, \quad \overline{A_4 P_4} : \overline{A_1 P_4} = -k_4 : k_1.$$

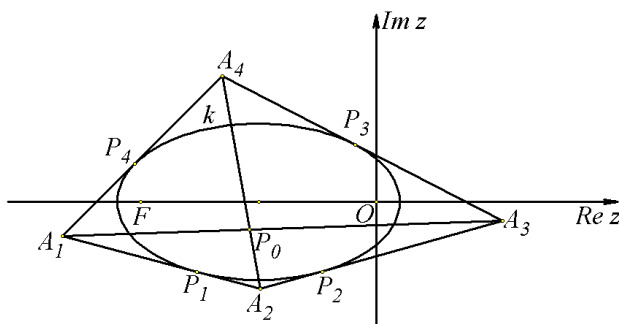
Ако един полином $P(z)$ от степен $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има k_j кратен корен във върха A_j ($j=1,2,3,4$) на $A_1 A_2 A_3 A_4$, то производната на $P(z)$ има корени в точката $P_0 = A_1 A_3 \cap A_2 A_4$ и във фокусите на елипсата k .

Нека елипсата k има за фокус точката O , фокален параметър p и числен ексцентрицитет e . Спрямо Гаусовата координатна система K_0 от фиг. 1, както е показано в (Nenkov, 1998), афиксите p_j и a_j на точките P_j и A_j ($j=1,2,3,4$) се изразяват съответно с формулите

$$(2) \quad p_1 = \frac{2p}{et_1^2 + 2t_1 + e}, \quad p_2 = \frac{2p}{et_2^2 + 2t_2 + e}, \quad p_3 = \frac{2p}{et_3^2 + 2t_3 + e}, \quad p_4 = \frac{2p}{et_4^2 + 2t_4 + e}.$$

$$(3) \quad a_1 = \frac{2p}{et_4 t_1 + t_4 + t_1 + e}, \quad a_2 = \frac{2p}{et_1 t_2 + t_1 + t_2 + e}, \quad a_3 = \frac{2p}{et_2 t_3 + t_2 + t_3 + e}, \quad a_4 = \frac{2p}{et_3 t_4 + t_3 + t_4 + e},$$

където $|t_1| = |t_2| = |t_3| = |t_4| = 1$.



Фигура 1

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини, така че да бъдат изпълнени равенствата (1). Тъй като простото отношение на произволни три точки A_k , A_l и P_j от една права се изразява с равенството $\frac{\overline{A_k P_j}}{\overline{A_l P_j}} = \frac{a_k - p_j}{a_l - p_j}$, от (2) и (3) след не сложни пресмятания се получават равенствата

$$(4) \quad \frac{\overline{A_1 P_1}}{\overline{A_2 P_1}} = \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{\overline{A_2 P_2}}{\overline{A_3 P_2}} = \frac{t_1 - t_2}{t_3 - t_2} \cdot \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{\overline{A_3 P_3}}{\overline{A_4 P_3}} = \frac{t_2 - t_3}{t_4 - t_3} \cdot \frac{a_3}{a_4}, \quad \frac{\overline{A_4 P_4}}{\overline{A_1 P_4}} = \frac{t_3 - t_4}{t_1 - t_4} \cdot \frac{a_4}{a_1}.$$

От равенствата (4) получаваме

$$(5) \quad a_2 = -\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot a_1, \quad a_3 = -\frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot a_1, \quad a_4 = -\frac{k_4}{k_1} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_3} \cdot a_1.$$

От равенствата (5) следва

$$(6) \quad k_1 a_2 a_3 a_4 + k_2 a_3 a_4 a_1 + k_3 a_4 a_1 a_2 + k_4 a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Сега да разгледаме нормирания полином $P_0(z)$ от степен $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти, който има k_j кратен корен във върха A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) на $A_1 A_2 A_3 A_4$. От лема 2 и равенството (6) следва, че коефициентът пред z има стойност, равна на 0. Затова производната $P'_0(z)$ има корен $z = 0$. Това всъщност на геометричен език означава, че $P'_0(z)$ има корен във фокуса O на елипсата k . Следователно според лема 1 и бележката към нея се получава, че производната $P'(z)$ на произволен полином $P(z)$ със свойствата на $P_0(z)$ има корен в точката O .

Аналогично, ако разгледаме координатна система с център в другия фокус F на k , получаваме, че $P'(z)$ има корен и в точката F . По този начин доказахме частта от теоремата, отнасяща се до елипсата k .

Остава да докажем теоремата за точката P_0 . Нека нормираният полином $P_0(z)$ се представя във вида:

$$P(z) = (z - a_1)^{k_1} (z - a_2)^{k_2} (z - a_3)^{k_3} (z - a_4)^{k_4}.$$

Тогава за неговата производна имаме

$$P'(z) = (z - a_1)^{k_1-1} (z - a_2)^{k_2-1} (z - a_3)^{k_3-1} (z - a_4)^{k_4-1} U(z),$$

където

$$(7) \quad U(z) = k_1 (z - a_2)(z - a_3)(z - a_4) + k_2 (z - a_3)(z - a_4)(z - a_1) + k_3 (z - a_4)(z - a_1)(z - a_2) + k_4 (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3).$$

Тъй като $\overline{A_3 P_0} : \overline{A_1 P_0} = -k_3 : k_1$ и $\overline{A_4 P_0} : \overline{A_2 P_0} = -k_4 : k_2$, то $\overline{OP_0} = \frac{k_3 \overrightarrow{OA_1} + k_1 \overrightarrow{OA_3}}{k_3 + k_1}$ и $\overline{OP_0} = \frac{k_4 \overrightarrow{OA_2} + k_2 \overrightarrow{OA_4}}{k_4 + k_2}$. Като използваме (5) за афикса на p_0 получаваме следващите две равенства:

$$(8) \quad p_0 = \frac{k_3(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)}{(t_3 - t_2)(k_3 + k_1)} a_1, \quad p_0 = \frac{k_2 k_4(t_4 - t_1)(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)}{k_1(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)(k_2 + k_4)} a_1.$$

Като приравним стойностите на p_0 от (8), получаваме зависимостта

$$(9) \quad \begin{aligned} & (k_1 k_2 k_3 + k_2 k_3 k_4 + k_3 k_4 k_1 + k_4 k_1 k_2)(t_3 t_1 + t_4 t_2) = \\ & = k_3 k_1(k_4 + k_2)(t_2 t_3 + t_4 t_1) + k_4 k_2(k_3 + k_1)(t_1 t_2 + t_3 t_4). \end{aligned}$$

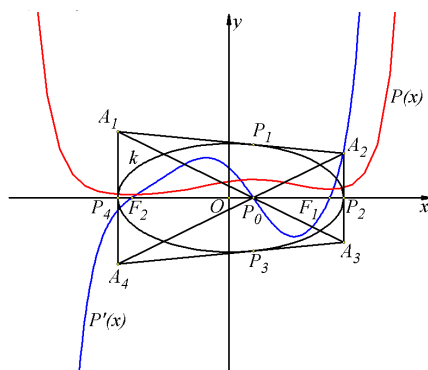
От (7) и (8) имаме

$$\begin{aligned} U(p_0) &= \frac{k_3 \left[k_1(t_2 - t_3) - k_3(t_4 - t_1) \right]^2 (t_1 - t_2 + t_3 - t_4) a_1^3}{k_1^2 (k_3 + k_1)^3 (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_4)} \times \\ & \times \left[(k_1 k_2 k_3 + k_2 k_3 k_4 + k_3 k_4 k_1 + k_4 k_1 k_2)(t_3 t_1 + t_4 t_2) - \right. \\ & \left. - k_3 k_1(k_4 + k_2)(t_2 t_3 + t_4 t_1) + k_4 k_2(k_3 + k_1)(t_1 t_2 + t_3 t_4) \right]. \end{aligned}$$

Оттук и равенството (9) следва, че $U(p_0) = 0$, което означава, че p_0 е корен на $P'_0(z)$. С това е доказано твърдението на теоремата и за пресечната точка на диагоналите на $A_1 A_2 A_3 A_4$.

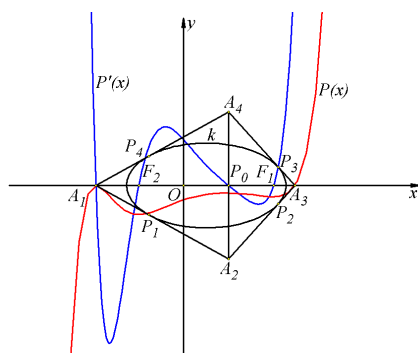
Полиномът $P'(z)$ има $k_j - 1$ кратен корен във върха A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) (Genov, Mihovski & Mollov, 1991), а останалите три корена се описват от току-що доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.

Доказаната теорема е обобщение на съответния резултат за успоредници, описан в (Grozdev & Nenkov, 2019).



Фигура 2

Ако $P(z) = P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на доказаната теорема. На фиг. 2 е представен полином $P(x)$ с корени във върховете на трапец, симетричен относно абсцисната ос. Той има трикратни комплексно спрегнати корени в точките A_1 и A_4 и двукратни комплексно спрегнати корени в точките A_2 и A_3 . На фиг. 3 е представен полином $P(x)$ с корени във върховете на делтоид, симетричен относно абсцисната ос. Той има двукратен реален корен в точката A_1 , прост реален корен в точката A_3 и трикратни комплексно спрегнати корени в точките A_2 и A_4 .



Фигура 3

ЛИТЕРАТУРА

- Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник, *Математика и информатика*, 5, 54 – 59
- Гроздев, С. & В. Ненков. (2018 а). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник, *Математика и информатика*, 3, 283 – 293.

- Гроздев, С. & В. Ненков. (2018 b). Полиноми с кратни корени във върховете на триъгълник, *Математика и информатика*, 4, 352 – 359.
- Гроздев, С. & В. Ненков. (2019). Полиноми с кратни корени във върховете на правоъгълник, *Математика и информатика*, 4, 2019, 435 – 443.

REFERENCES

- Nenkov, V. (1998). Conic sections, inscribed in a triangle, *Mathematics and informatics*, 5, 54 – 59.
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2018 a). Polynomials of fourth degree with roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics*, 3, 283 – 293.
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2018 b). Polynomials with multiple roots in the vertices of a triangle, *Mathematics and informatics*, 4, 352 – 359.
- Grozdev, S. & V. Nenkov. (2019). Polynomials with multiple roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics*, 4, 435 – 443.

ON THE POLYNOMIALS WITH ROOTS IN THE VERTICES OF A CLASS OF CONVEX QUADRILATERALS

Abstract. A geometrical relation is derived for the roots of polynomials of complex variable with multiple roots in the vertices of a convex quadrilateral and the roots of the corresponding derivatives. As an application some polynomials of real variable and with real coefficients are considered.

Keywords: polynomial; derivative a polynomial; polynomial roots; convex quadrilateral; ellipse; focus

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

Researcher ID: AAG-4146-2020

ORCID 0000-0002-1748-7324

University of Finance, Business Entrepreneurship
1, Gusla St.

1618 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Prof. Dr. Veselin Nenkov**

Researcher ID: AAB-5776-2019

Department of Mathematics and Physics

Faculty of Engineering

Nikola Vaptsarov Naval Academy

73, Vasil Drumev St.

Varna, Bulgaria

E-mail: v.nenkov@nvna.eu

E-mail: vnenkov@mail.bg