

ОПРЕДЕЛЯНЕ БРОЯ НА КОРЕНИТЕ НА ЕДИН КЛАС ПАРАМЕТРИЧНИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ТРЕТА СТЕПЕН

Росен Николаев, Танка Милкова
Икономически университет – Варна

Резюме. Статията е посветена на методика за определяне броя на корените на един клас уравнения от трета степен с реален параметър, при които един от корените може да се намери непосредствено. Представен е и по-общ подход за изследване на кубични параметрични уравнения, който използва производни и графики на функции.

Keywords: parametric equation; cubic function; methodology

В много теми от кандидатстудентски изпити и методически разработки – напр. (Grozdev, 2007), (Grozdev et al., 2008), (Grozdev & Bajcheva, 2016), се срещат задачи с параметрични уравнения от трета степен, в които се търсят стойностите на реалния параметър, за които уравнението има:

- точно един реален корен;
- точно два различни реални корена;
- три различни реални корена.

Често подходът за решаване на подобни задачи се свежда до изследване графиката на кубична функция (използвайки производната на функцията) и съобразяване броя на пресечните ѝ точки с абсцисната ос.

Може да бъде отделен обаче един клас подобни задачи, при които лесно се открива корен (рационално или реално число, дори и зависещо от параметъра), вследствие на което кубичният многочлен може да бъде разложен на линеен и квадратен множител. Целта на авторите в настоящата разработка е изследване на такъв клас задачи.

Нека разгледаме кубично уравнение в следния общ вид:

$$(*) \quad x^3 + (a - k)x^2 + (b - ka)x - kb = 0.$$

Можем да поставим следните въпроси.

Каква е зависимостта между реалните параметри a , b и k , така че уравнението да има:

- (1) само един реален корен;
- (2) точно два различни реални корена;
- (3) три различни реални корена?

Лесно се открива, че $x = k$ е корен на уравнението и тогава то придобива вида:

$(x - k)(x^2 + ax + b) = 0$. За решаването на (1) е достатъчно да бъде изпълнено:

$$a^2 - 4b < 0 \cup \begin{cases} a^2 - 4b = 0 \\ k^2 + ak + b = 0. \end{cases}$$

Решаването на (2) се свежда до решаване на системите:

$$\begin{cases} a^2 - 4b = 0 \\ k^2 + ak + b \neq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a^2 - 4b > 0 \\ k^2 + ak + b = 0. \end{cases}$$

За решаването на (3) е достатъчно да бъде изпълнено:

$$\begin{cases} a^2 - 4b > 0 \\ k^2 + ak + b \neq 0. \end{cases}$$

За да демонстрираме предложената методика, ще представим две задачи с техните решения.

Задача 1. За кои стойности на реалния параметър a уравнението:

$$x^3 + (a - 2)x^2 - (3 + a)x - 2a + 6 = 0$$

има

- а) само един реален корен;
- б) точно два различни реални корена;
- в) три различни реални корена?

Решение: ако заместим с $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm a$ и т.н., лесно се вижда, че $x = 2$ е корен на даденото уравнение, тъй като

$$2^3 + (a - 2)4 - (3 + a)2 - 2a + 6 = 8 + 4a - 8 - 6 - 2a - 2a + 6 = 0$$

Тогава уравнението придобива вида: $(x - 2)(x^2 + ax + a - 3) = 0$.

За решенията на трите подусловия получаваме:

$$\text{а) } a^2 - 4(a - 3) < 0 \cup \begin{cases} a^2 - 4(a - 3) = 0 \\ 4 + 2a + a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset.$$

$$\text{б) } \begin{cases} a^2 - 4(a - 3) = 0 \\ 4 + 2a + a - 3 \neq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a^2 - 4(a - 3) > 0 \\ 4 + 2a + a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} a^2 - 4(a - 3) > 0 \\ 4 + 2a + a - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Лесно може да се провери, че в тази задача $k = 2$, $a = a$, $b = a - 3$, изхождайки от общия вид на задачата (*).

Сега ще разгледаме пример, в който k не е конкретно число, а зависи от параметъра a . Нека например $k = a$ и $b = a^2 + a$.

Задача 2. Дадено е уравнението

$$x^3 + ax - a^3 - a^2 = 0.$$

За кои стойности на параметъра $a \in \mathbb{R}$ уравнението има:

- а) само един реален корен;
- б) точно два различни реални корена;
- в) три различни реални корена?

Решение: имайки предвид начина на конструиране на задачата, е ясно, че $x = a$ е корен на даденото уравнение и след разлагане то придобива вида:

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) + a(x - a) = 0, \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2 + a) = 0.$$

За решенията на трите подусловия получаваме:

$$\begin{aligned} \text{а) } a^2 - 4a^2 - 4a < 0 \cup \left| \begin{array}{l} a^2 - 4a^2 - 4a = 0 \\ a^2 + a^2 + a^2 + a = 0 \end{array} \right| &\Leftrightarrow 3a^2 + 4a > 0 \cup \left| \begin{array}{l} 3a^2 + 4a = 0 \\ 3a^2 + a = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(3a + 4) > 0 \cup \left| \begin{array}{l} a = 0 \cup a = -\frac{4}{3} \\ a = 0 \cup a = -\frac{1}{3} \end{array} \right| &\Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (0; +\infty) \cup a = 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup [0; +\infty) \\ \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (0; +\infty) \cup a = 0 &\Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup [0; +\infty). \\ \text{б) } \left| \begin{array}{l} a^2 - 4a^2 - 4a = 0 \\ a^2 + a^2 + a^2 + a \neq 0 \end{array} \right| \cup \left| \begin{array}{l} a^2 - 4a^2 - 4a > 0 \\ a^2 + a^2 + a^2 + a = 0 \end{array} \right| &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3a^2 + 4a = 0 \\ 3a^2 + a \neq 0 \end{array} \right| \cup \left| \begin{array}{l} 3a^2 + 4a < 0 \\ 3a^2 + a = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 0 \cup a = -\frac{4}{3} \\ a \neq 0, \quad a \neq -\frac{1}{3} \end{array} \right| \cup \left| \begin{array}{l} a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right) \\ a = 0 \cup a = -\frac{1}{3} \end{array} \right| &\Rightarrow a \in \left\{-\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right\}. \\ \text{в) } \left| \begin{array}{l} a^2 - 4a^2 - 4a > 0 \\ a^2 + a^2 + a^2 + a \neq 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3a^2 + 4a < 0 \\ 3a^2 + a \neq 0 \end{array} \right| &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right) \\ a \neq 0; -\frac{1}{3} \end{array} \right| \Rightarrow a \in \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right). \end{aligned}$$

В следващото изложение ще представим още един начин за решаване на подобен тип задачи, който е достъпен за по-големи ученици, притежаващи знания за графика на функция и изследване изменението на функция с помощта на производни.

Да разгледаме общия вид на кубично уравнение: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Означаваме $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Търсим отговор на трите въпроса:

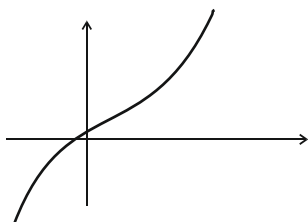
а) уравнението да има точно един реален корен;

б) уравнението да има точно два реални корена;

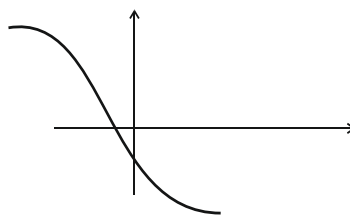
в) уравнението да има три различни реални корена.

Ако обвържем трите въпроса с графиката на кубичната функция $f(x)$, то можем да изложим за тях следните основни положения:

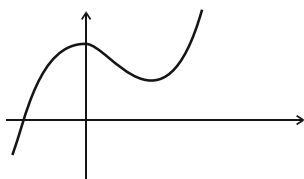
а) функцията е монотонна (фиг. 1а) и 1б)) или има локални екстремуми $f_{\min}(x) = m$, $f_{\max}(x) = M$, като $m \cdot M > 0$ (с други думи, локалният максимум и локалният минимум имат еднакви знаци) (фиг. 1в), 1в') и 1г), 1г')).



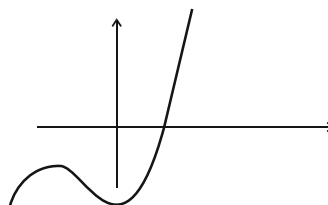
Фигура 1а)



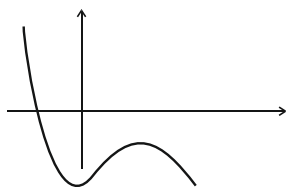
Фигура 1б)



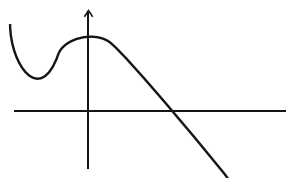
Фигура 1в)



Фигура 1г)



Фигура 1в')



Фигура 1г')

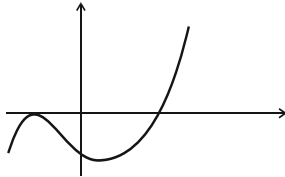
Както знаем, ако функцията (и конкретно кубичната) е монотонна, то производната ѝ има постоянен знак, а ако функцията има екстремуми, то те се

получават за тези стойности на променливата x , които са корени (различни) на нейната производна.

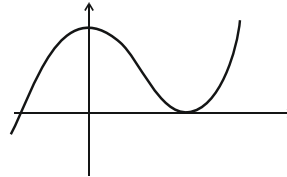
б) уравнението има точно два различни реални корена, ако има двукратен (но не и трикратен) корен, т.е. има екстремум, който е равен на нула. С други думи (фиг. 2а), а), б), б')):

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ D_{f'} > 0 \end{array} \right| \cup \left| \begin{array}{l} D_{f'} > 0 \\ f(x_1)f(x_2) = 0, \end{array} \right.$$

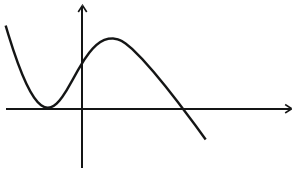
където x_1 и x_2 са корени на уравнението $f'(x) = 0$.



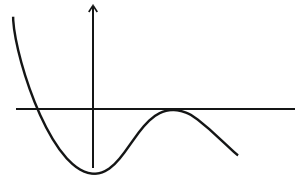
Фигура 2а)



Фигура 2б)



Фигура 2а')

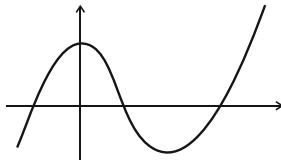


Фигура 2б')

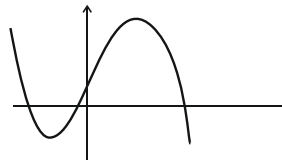
в) уравнението има три различни реални корена, ако $f(x)$ има два екстремума, които имат различни знаци, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} D_{f'} > 0 \\ f(x_1)f(x_2) < 0, \end{array} \right.$$

където x_1 и x_2 са корени на уравнението $f'(x) = 0$ (фиг. 3а) и 3б)).



Фигура 3а)



Фигура 3б)

Ще демонстрираме този подход за решаването на уравнение от трета степен, при което предходният метод е неприложим поради трудното откриване на корен.

Задача 3. Дадено е уравнението $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 1 = 0$, където a е реален параметър. За кои стойности на a уравнението има:

- а) точно един реален корен;
- б) точно два различни реални корена;
- в) три различни реални корена?

Решение: $f'(x) = 3x^2 - 12ax = 3x(x - 4a) = 0$.

При $a = 0$ функцията $f(x)$ е монотонно растяща и уравнението $f(x) = 0$ има само един реален корен.

Нека $a \neq 0$. Тогава уравнението $f'(x) = 0$ има два различни реални корена:

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 4a;$$

$$x_1 + x_2 = 4a, x_1 x_2 = 0;$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 16a^2;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 4a \cdot 16a^2 = 64a^3;$$

$$\begin{aligned} f(x_1)f(x_2) &= (x_1^3 - 6ax_1^2 + 1)(x_2^3 - 6ax_2^2 + 1) = \\ &= (x_1 x_2)^3 - 6a(x_1 x_2)^2(x_1 + x_2) + x_1^3 + x_2^3 + 36a^2(x_1 x_2)^2 - 6a(x_1^2 + x_2^2) + 1 = \\ &= 64a^3 - 6a \cdot 16a^2 + 1 = 1 - 32a^3. \end{aligned}$$

За решенията на трите подусловия получаваме:

$$\text{а) } a = 0 \cup 1 - 32a^3 > 0 \Leftrightarrow a = 0 \cup a < \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\right).$$

$$\text{б) } a \neq 0 \text{ и } f(x_1)f(x_2) = 0 \Leftrightarrow 1 - 32a^3 = 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}.$$

$$\text{в) } a \neq 0 \text{ и } f(x_1)f(x_2) < 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ и } 1 - 32a^3 < 0 \Rightarrow a \in \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}; +\infty\right).$$

Изводът, който може да се направи, е, че първият изложен подход е по-кратък и разбираем, но той е приложим, ако може лесно да бъде открит корен на уравнението. Ако такъв не може да бъде намерен, е приложим вторият подход.

Следващите задачи предлагаме на читателя за самостоятелна работа.

В зависимост от стойностите на реалния параметър a да се определи броят на различните реални корени на уравнението:

$$x^3 + (a+1)x^2 + x + 1 - a = 0;$$

$$x^3 + (2a-1)x^2 + (1-a)^2 a = 0;$$

$$ax^3 - (1+a)x^2 + 1 = 0;$$

$$x^3 + a^2x - 2a^3 = 0;$$

$$x^3 + 6x^2 + a = 0.$$

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, 295 pages (ISBN 978-954-92139-1-1).
- Grozdev, S., Ts. Bajcheva, P. Piperkov & K. Kirilova-Lupanova (2008). *School-leaving examination in Mathematics*, V. Tirnovo: Abagar, 108 pages (ISBN 978-954-427-782-6). (In Bulgarian).
- Grozdev, S. & Ts. Bajcheva (2016). *University entering exams in Mathematics*. Sofia: Mathematics Plus, 72 pages (ISSN 0861-8321). (In Bulgarian).

DETERMINING THE NUMBER OF THE ROOTS OF A CLASS OF THIRD ORDER PARAMETRIC ALGEBRAIC EQUATIONS

Abstract. The article is devoted to a methodology of determining the number of the roots of a class of cubic algebraic equations with real parameters in which one of the roots can be determined directly. A more general approach is presented too using derivatives and graphical representations of functions.

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof.; Dr. Tanka Milkova, Assoc. Prof.**

University of Economics – Varna
77, “Kniaz Boris I” Blvd.
9002 Varna, Bulgaria

E-mail: : nikolaev_rosen@ue-varna.bg ; tankamilkova@ue-varna.bg