

ОЙЛЕР-ВЕН ДИАГРАМИ ИЛИ MZ-КАРТИ В НАЧАЛНАТА УЧИЛИЩНА МАТЕМАТИКА

¹Здравко Лалчев, ²Маргарита Върбанова,
³Ирина Вутова, ⁴Иван Душков

^{1,3,4}Софийски университет „Св. Климент Охридски“

²Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

Резюме. Предметът на статията е построяване на математически модели на проблемни ситуации, породени от адитивни операции (обединяване, пресичане и допълване) с крайни множества в началната училищна математика. Направен е сравнителен анализ на два методически подхода за моделиране и решаване на задачи от адитивни операции с множества и естествени числа. Става дума за добилия вече известност метод на „Ойлер-Вен диаграмите“ и за иновативния метод на „MZ-картите“. Прокарана е идеята, че решението може да бъде намерено по-лесно, ако при съставяне на математически модел на задачата двата подхода се допълват.

Keywords: primary school mathematics, MZ-card, Euler-Venn diagram, mathematical model

1. Предварителни бележки

В началната училищна математика има цели класове от задачи, в които „участват“ адитивни операции с множества и съответни операции с естествени числа. Става дума за практически задачи, в които се работи с числови данни, изразяващи количествени характеристики на крайни множества, получени в резултат на операциите обединяване, пресичане и допълване на „застъпващи се“ множества, т.е. множества с непразни сечения. Подобни задачи се считат за трудни и същите са по-скоро изключение, отколкото традиционни за редовните часове по математика. Но за сметка на това са често срещана тема в математическите състезания. Според нас причината за „слабото“ присъствие на темата за адитивните операции с множества и числа в учебния час се крие не толкова в „природната“ трудност на задачите, колкото в недобре разработена дидактическа технология за тяхното изучаване. Преподаватели, които се занимават с подготовката на ученици за математически състезания, обикновено „визуализират“ проблемната ситуация с диаграми на Ойлер-Вен, придружени със съответните числа, и така решението се „получава“. Ученикът вижда, че чрез кръговете решението на задачата „става“ много лесно, но той самият не го разбира. Причината за неразбирането идва от

това, че решението не е подготвено предварително, а изведнъж получено. Затова то изглежда изкуствено и както при фокусите – като „заек, изваден от шапка“. Инцидентното появяване на диаграмите на Ойлер-Вен в учебниците по математика за началните класове ги прави неестествени и същите изглеждат като „паднали от небето“. Недоброто познаване от ученика на този дидактически инструмент не позволява ефективното му използване с цел моделиране при решаване на задачи. Често пъти ученикът, неудовлетворен от решението на задачата, си задава въпроса „А няма ли друг начин за решаване на задачата?“.

Посочените по-горе факти и обстоятелства ни дават основание в тази статия да насочим вниманието си към методите за представяне и решаване на задачи с адитивен характер от множества и числа в началната училищна математика. За тази цел ще направим анализ от математическа и дидактическа гледна точка на проблемни ситуации, които могат да бъдат моделирани, най-общо казано, чрез адитивни действия с крайни множества и естествени числа. Методът на Ойлер-Вен диаграмите за представяне на проблемни ситуации, свързани с адитивни действия с множества и числа, е ценен с това, че дава възможност да се очертаят в явен вид **елементарните класове**, описващи ситуацията, и по този начин да се разкрие адитивната същност на математическата задача.

След разработване на идеята за решаване на аритметичните задачи чрез тяхното моделиране по метода на MZ-картите ние си поставихме въпроса дали методът на математическите карти не е приложим и при адитивните задачи от множества и числа. Оказа се, че двата метода – методът на Ойлер-Вен диаграмите и методът на MZ-картите, могат успешно да се допълват при изграждане на математическия модел на задачата. С помощта на метода на Ойлер-Вен диаграми се визуализират много добре множествата и съответните **класове**, докато с метода на MZ-картите се „визуализират“ **числата** и адитивните операции с тях. От математическа гледна точка, двата метода са взаимозаменяеми, но и двата, приложени заедно при една съща задача, представят пълна и ясна картина на задачата и нейното решение.

В настоящата статия представяме и двата подхода в сравнителен план. В следващите редове се описват математически модели на проблемни ситуации, пораждани от крайни множества и адитивните операции обединяване, пресичане и допълване с тях, както и модели за съответните им естествени числа и адитивните операции събиране и изваждане на тези числа.

2. Кратък преглед на основни теоретико-множествени понятия

В началото ще уточним означенията на понятията, които ще използваме в теоретичния анализ за описване на ситуацияите, и ще представим инструментариума на метода на Ойлер-Вен диаграмите.

Както обикновено, множествата ще означаваме с някои от главните букви от латинската азбука, например с A, B, C, D и т.н., а тяхната числова мощ-

ност (брой на елементите) – съответно с $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$ и т. н. Универсалното (пълното) множество ще означаваме с I , а празното множество – с $\emptyset$. Допълнението на множество A ще означаваме с буквата A , допълнена с горна черта, т. е. $\bar{A}$. Сечението на множествата A и B ще означаваме с AB , а обединението – с $A \cup B$.

Известно е, че ако множествата A и B са класове ($AB = \emptyset$ и $A \cup B = I$), на които се разбива пълното (универсалното) множество I (за конкретната ситуация) и $|A|$, $|B|$, $|I|$, са съответните мощности (естествени числа), то $|A| + |B| = |I|$.

Ето защо при математически анализ на проблемна ситуация и при построяване на математическия модел на ситуацията ще се интересуваме от **класовете**, на които се разбиват отделните множества (признаци) и пораждащи ситуацията при тяхното пресичане, както и от **елементарните класове**, на които се разбива универсалното (пълното) множество, описващо ситуацията като цяло. Въз основа на данните за мощността (броя) на отделните класове може да бъде съставено **равенство за мощността** (броя) на универсалното (пълното) множество като сбор на мощностите на класовете.

3. Класификация на задачите от адитивни операции с множества и числа

За целите на нашето изследване задачите от адитивни операции с множества и числа ще бъдат класифицирани по **броя на определящите признаци** на проблемната ситуация, описана в задачите. Това означава, че в първата група ще попаднат задачите, в чиито проблемни ситуации има един определящ признак, във втората група ще попаднат задачите, в чиито проблемни ситуации има два определящи признака, в трета група ще попаднат задачите, в чиито проблемни ситуации има три определящи признака, и т.н. Тази класификация ще представим с конкретни задачи.

3.1. Проблемни ситуации с един определящ признак

Като примери на задачи, в които проблемните ситуации имат само по един определящ признак, предлагаме следните две задачи.

Задача 1. *Контролна работа, проведена с ученици, съдържа само една задача. При проверката се оказало, че задачата е решена от 18 ученици и не е решена от 11. Колко учени са участвали в контролната работа?*

Задача 2. *В един клас има 30 ученици, 13 от тях са тъмнокоси. Колко ученици нямат тъмна коса?*

В задача 1 пълното множество I (на проблемната ситуация) е множеството на всички ученици, които са правили контролната работа. А множеството на учениците, решили задачата (множеството A), е определящ признак на ситуацията.

В задача 2 пълното множество I (на проблемната ситуация) е множеството на всички ученици в класа, а множеството на тъмнокосите ученици (множеството A) е определящ признак на ситуацията.

3.2. Проблемни ситуации с два определящи признака

Като примери на задачи, в които проблемните ситуации имат по два определящи признака, предлагаме следните две задачи.

Задача 3. *На ученическо състезание по математика били предложени две задачи. При проверката се оказало, че първата задача е решена от 22 ученици, а втората от 30 ученици. Също така и двете задачи били решени от 12 ученици, а трима не решили нито една от задачите. Колко ученици са участвали в състезанието?*

Задача 4. *В клас от 30 ученици отличниците са 17 и 18 ученици са спортисти, а петима от учениците са нито отличници, нито спортисти. Колко от спортистите са отличници?*

При задача 3 пълното множество I (на проблемната ситуация) е множеството на всички ученици, участвали в състезанието. Множеството на учениците, решили първата задача, е множеството A , а множеството на учениците, решили втората задача, е множеството B . Тези две множества са определящи признаци на ситуацията.

При задача 4 пълното множество I (на проблемната ситуация) е множеството на всички ученици в класа, а множеството на отличниците (множеството A) и множеството на учениците спортисти (множеството B) са определящи признаци на ситуацията.

3.3. Проблемни ситуации с три определящи признака

Като примери на задачи, в които проблемните ситуации имат по три определящи признака, може да се разгледат следните две задачи.

Задача 5. *На ученическо състезание били дадени три задачи. При проверката се оказало, че първата задача била решена от 21 ученици, втората – от 25 ученици, и третата – от 19 ученици. Също така първата и втората задача били решени от 13 ученици, първата и третата – от 7 ученици, втората и третата – от 9 ученици. Трите задачи били решени от трима ученици, а четирима не са решили нито една от задачите. Колко ученици са участвали в състезанието?*

Задача 6. *При анкета на 32 делегати на една конференция се оказало, че 22 владеят френски език, 21 – немски, 8 – испански, и 1 не владее нито един от трите езика. Френски и немски владеят 13 делегати, немски и испански – 6, френски и испански – 5. Колко делегати на конференцията владеят и трите езика?*

В случая в задача 5 пълното множество I (на проблемната ситуация) е множеството на всички състезатели (ученици, участвали в състезанието), а множеството на учениците, решили първата задача (множеството A), множеството на учениците, решили втората задача (множеството B), и множеството на учениците, решили третата задача (множеството C), са определящи признаци за ситуацията.

В задача 6 пълното множество I (на проблемната ситуация) е множеството на всички делегати на конференцията, а множеството на делегатите, които знаят френски (множество A) учениците, решили първата задача (множество A), множеството на делегатите, които знаят немски и (множество B) и множеството на делегатите, които знаят испански (множество C), са определящи признаци за ситуацията.

4. Математико-дидактически модели на проблемни ситуации, описващи адитивни операции с множества и числа

4.1. Проблемна ситуация с един определящ признак

Нека множеството A е представител на определящ признак за дадена проблемна ситуация. Тогава универсалното множество I се разбива на два класа – множествата A и $\bar{A}$. (Действително, обединението на A и $\bar{A}$ е универсалното множество I и сечението на A и $\bar{A}$ е празното множество $\emptyset$).

Тогава за числата $|A|$, $|\bar{A}|$, $|I|$ е вярно равенството

$$(1) |A| + |\bar{A}| = |I|.$$

Ойлер-Вен диаграма. Тъй като проблемната ситуация е определена само от множеството A , то Ойлер-Вен диаграмата на ситуацията се състои от един правоъгълник (модел на универсалното множество I) и един „кръг“ (модел на множеството A), разположен във вътрешността на правоъгълника I . Частта от правоъгълника, която е извън „кръга“ A , отговаря на допълнението $\bar{A}$ (Диаграмата е представена на сх. EV1.).

Коментар. Проблемната ситуация, породена от един признак, може да бъде представена с повече от една топологично еквивалентни диаграми. На схема EV1a е предложена втора Ойлер-Вен диаграма на същата ситуация.

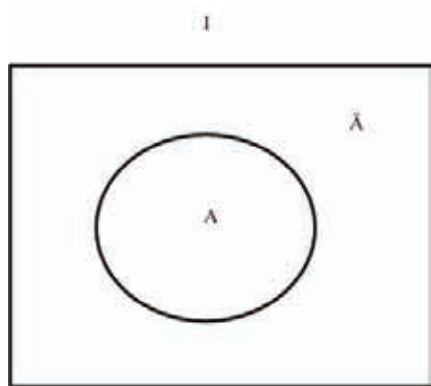


Схема EV1

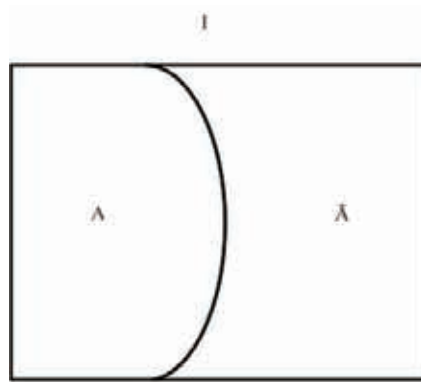


Схема EV1a

MZ-карта. Като се има предвид равенството (1), от аритметична гледна точка следва, че всеки две от трите числа $|A|$, $|\bar{A}|$ и $|I|$ еднозначно определят

ситуацията, т.е. ако са известни две от трите числа, то третото е еднозначно определено.

Тъй като аритметичната ситуация е определена от посоченото равенство, то картата на задачата е съставена от една MZ-диаграма, на която числата $|A|$, $|\bar{A}|$ и $|I|$ са моделирани с квадратчета (сх. MZ1).

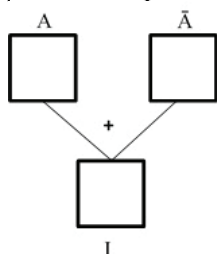


Схема MZ1

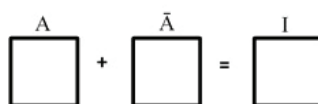


Схема MZ1a

(За удобство квадратчетата за числата $|A|$, $|\bar{A}|$ и $|I|$ ще представяме на „една линия“, както е показано на схема MZ1a.)

4.2. Проблемна ситуация с два определящи признака

Нека множествата A и B са определящи за дадена проблемна ситуация.

Тогава универсалното множество I се разбива на четири класа – сеченията AB , $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ и $\bar{A}\bar{B}$.

(Действително, обединението на множествата AB , $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ и $\bar{A}\bar{B}$ е универсалното множество I и сечението на всяка двойка от тях е празното множество.)

За числата $|AB|$, $|A\bar{B}|$, $|\bar{A}B|$, $|\bar{A}\bar{B}|$ и $|I|$ е вярно равенството

$$(2) |AB| + |A\bar{B}| + |\bar{A}B| + |\bar{A}\bar{B}| = |I|.$$

Тъй като сеченията AB и $A\bar{B}$ са класове за множеството A , сеченията AB и $\bar{A}B$ са класове за множеството B , сеченията $A\bar{B}$ и $\bar{A}\bar{B}$ са класове за множеството $\bar{A}$, сеченията $\bar{A}\bar{B}$ и $A\bar{B}$ са класове за множеството $\bar{B}$, то също така са верни и следните равенства:

$$(3) |A| = |AB| + |A\bar{B}|;$$

$$(4) |B| = |AB| + |\bar{A}B|;$$

$$(5) |\bar{A}| = |\bar{A}\bar{B}| + |\bar{A}B|;$$

$$(6) |\bar{B}| = |\bar{A}\bar{B}| + |A\bar{B}|.$$

Ойлер-Вен диаграма. След като проблемната ситуация е определена само от множествата A и B , то Ойлер-Вен диаграмата на ситуацията се състои от един правоъгълник (за универсалното множество I) и два „кръга“ (за множеството A и за множеството B), разположени във вътрешността на правоъгълника I . (Диаграмата е представена на сх. EV2.)

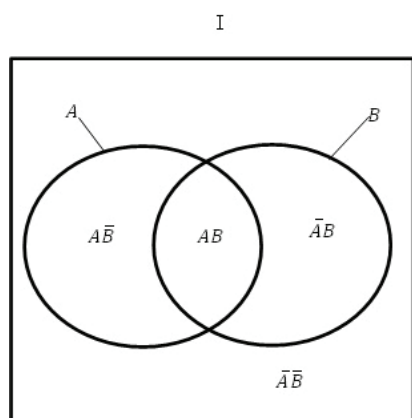


Схема EV2

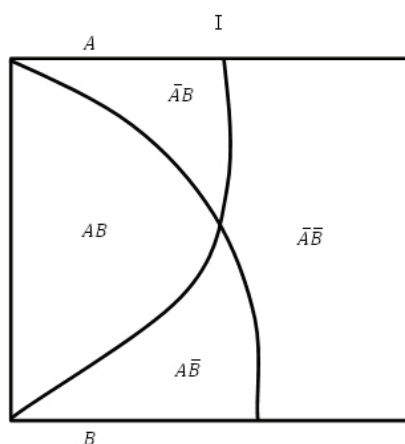


Схема EV2₁

Коментар 1. Проблемната ситуация, породена от два признака, също може да бъде представена с повече от една топологично еквивалентни диаграми. На схема EV2₁ е предложена втора Ойлер-Вен диаграма на същата ситуация.

Коментар 2. От схема EV2 се вижда, че когато „кръговете“ моделират множествата A и B, то „централната луничка“ отговаря на сечението AB, „лявата луничка“ – на сечението $A\bar{B}$, „дясната луничка“ – на сечението $\bar{A}B$, и „външната“ част за кръговете – на сечението $\bar{A}\bar{B}$.

Ако с „кръговете“ в правоъгълника се моделират множествата A и $\bar{B}$ (допълнението на B), то проблемната ситуация, може да бъде представена с Ойлер-Вен диаграма, схема EV2a. От диаграмата се вижда, че „централната луничка“ отговаря на сечението $A\bar{B}$, „лявата луничка“ – на сечението AB, „дясната луничка“ – на сечението $\bar{A}\bar{B}$, и „външната“ част за кръговете – на сечението $\bar{A}B$.

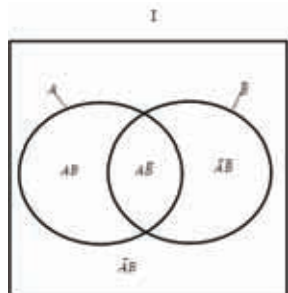


Схема EV2a

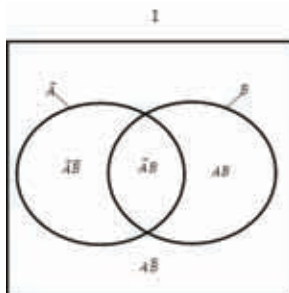


Схема EV2b

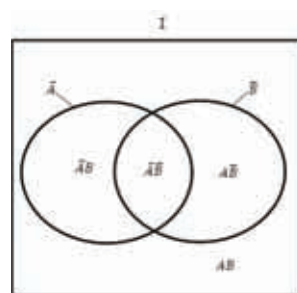


Схема EV2в

Ако „кръговете“ в правоъгълника моделират множествата $\bar{A}$ (допълнението на A) и B , то проблемната ситуация също може да бъде представена с Ойлер-Вен диаграма – сх. EV2б. От диаграмата се вижда, че „централната луничка“ отговаря на сечението $\bar{A}\bar{B}$, „лявата луничка“ – на сечението $\bar{A}B$, „дясната луничка“ – на сечението $A\bar{B}$, и „външната“ част за кръговете – на сечението AB .

Ако „кръговете“ в правоъгълника моделират множествата $\bar{A}$ (допълнението на A) и $\bar{B}$ (допълнението на B), то проблемната ситуация може да бъде представена с Ойлер-Вен диаграма (EV сх. 2в). От диаграмата се вижда, че „централната луничка“ отговаря на сечението $\bar{A}\bar{B}$, „лявата луничка“ – на сечението $\bar{A}B$, „дясната луничка“ – на сечението $A\bar{B}$, и „външната“ част за кръговете – на сечението AB .

В резултат на съставените Ойлер-Вен диаграми и съответните числови равенства (2), (3), (4), (5) и (6) се достига до следните по-важни обобщени изводи:

1. Когато в задачата са известни три от числата $|A|$, $|B|$, $|AB|$, $|I|$ и се търси четвъртото, е удобно да се използва диаграмата от сх. EV2.
2. Когато в задачата са известни три от числата $|A|$, $|\bar{B}|$, $|A\bar{B}|$, $|I|$ и се търси четвъртото, е удобно да се използва диаграмата от сх. EV2а.
3. Когато в задачата са известни три от числата $|\bar{A}|$, $|B|$, $|\bar{A}B|$, $|I|$ и се търси четвъртото, е удобно да се използва диаграмата от сх. EV2б.
4. Когато в задачата са известни три от числата $|\bar{A}|$, $|\bar{B}|$, $|\bar{A}\bar{B}|$, $|I|$ и се търси четвъртото, е удобно да се използва диаграмата от сх. EV2в.

MZ-карта. Равенството (2) $|AB| + |A\bar{B}| + |\bar{A}B| + |\bar{A}\bar{B}| = |I|$, от аритметична гледна точка, еднозначно определя ситуацията, т.е. всеки четири от петте числа еднозначно определят ситуацията – ако са известни четири от тях, то петото е еднозначно определено. Освен това равенство ситуацията се „допълва“ и от още четири равенства.

За да може всички задачи компонети да бъдат отразени на MZ-картата, основното равенство (2) представяме, като разполагаме квадратчетата на „една линия“, а допълнителните „връзки“ – чрез М-диаграми от двете страни на линията, както е показано на схема MZ2.

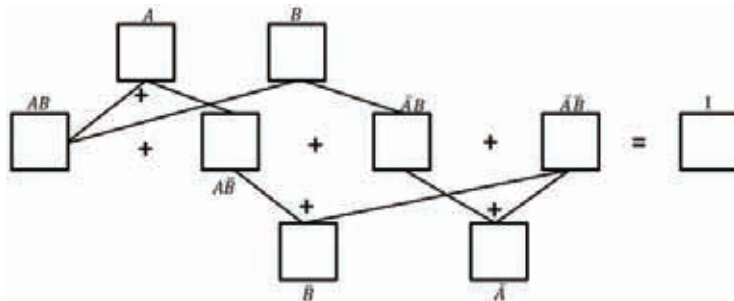


Схема MZ2

4.3. Проблемна ситуация с три определящи признака

Нека множествата A , B и C са определящи за дадена проблемна ситуация.

В този случай универсалното множество I се разбива на осем класа – сеченията ABC , $AB\bar{C}$, $A\bar{B}C$, $\bar{A}BC$, $AB\bar{\bar{C}}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}C$. Действително, обединението на множествата ABC , $AB\bar{C}$, $A\bar{B}C$, $\bar{A}BC$, $AB\bar{\bar{C}}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}C$ е универсалното множество I и сечението на всяка двойка от тях е празното множество $\emptyset$.

Тогава за числата $|ABC|$, $|AB\bar{C}|$, $|A\bar{B}C|$, $|\bar{A}BC|$, $|AB\bar{\bar{C}}|$, $|A\bar{B}\bar{C}|$, $|\bar{A}B\bar{C}|$, $|\bar{A}\bar{B}C|$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ е вярно равенството

$$(7) |ABC| + |AB\bar{C}| + |A\bar{B}C| + |\bar{A}BC| + |AB\bar{\bar{C}}| + |A\bar{B}\bar{C}| + |\bar{A}B\bar{C}| + |\bar{A}\bar{B}C| = |I|.$$

Това означава, че от аритметична гледна, точка всеки 8 от деветте числа $|ABC|$, $|AB\bar{C}|$, $|A\bar{B}C|$, $|\bar{A}BC|$, $|AB\bar{\bar{C}}|$, $|A\bar{B}\bar{C}|$, $|\bar{A}B\bar{C}|$, $|\bar{A}\bar{B}C|$, $|I|$ определят ситуацията напълно.

Към аритметичния модел на ситуацията могат да бъдат добавени и 6 равенства, свързани с множествата A , B , C , $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Тъй като сеченията ABC , $AB\bar{C}$, $A\bar{B}C$ са класове за множеството A , сеченията ABC , $AB\bar{C}$, $\bar{A}BC$ и $\bar{A}\bar{B}C$ са класове за множеството B , сеченията ABC , $AB\bar{C}$, $\bar{A}BC$ и $\bar{A}\bar{B}C$ са класове за множеството C , то са верни и следните равенства:

$$(8) |ABC| + |AB\bar{C}| + |A\bar{B}C| + |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| = |A|;$$

$$(9) |ABC| + |AB\bar{C}| + |\bar{A}BC| + |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| = |B|;$$

$$(10) |ABC| + |AB\bar{C}| + |\bar{A}BC| + |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| = |C|.$$

Аналогични равенства важат и за мощностите на множества $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$.

Също така към аритметичния модел на ситуацията могат да бъдат причислени и 12 равенства, свързани с множествата AB , AC , BC , $A\bar{B}$, $A\bar{C}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}C$, $\bar{B}C$, $\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}$, $\bar{B}\bar{C}$. Тъй като сеченията ABC и $AB\bar{C}$ са класове за множеството AB , сеченията ABC и $A\bar{B}C$ са класове за множеството AC , сеченията ABC и $\bar{A}BC$ са класове за множеството BC , то по тази причина са верни равенствата:

$$(11) |ABC| + |AB\bar{C}| = |AB|;$$

$$(12) |ABC| + |\bar{A}BC| = |BC|;$$

$$(13) |ABC| + |A\bar{B}C| = |AC|.$$

Аналогични равенства са в сила и за мощностите на сеченията $A\bar{B}$, $A\bar{C}$, $\bar{A}B$ и т.н.

Ойлер-Вен диаграма. Тъй като проблемната ситуация е определена от три множества A , B и C , то Ойлер-Вен диаграмата на ситуацията се състои от един правоъгълник (за универсалното множество I) и три „кръга“ (за множеството A , за множеството B и за множеството C), разположени във вътрешността на правоъгълника I (диаграмата е на сх. EV3).

Коментар 1. Проблемната ситуация, породена от три признака, може да бъде представена с повече от една топологично еквивалентни диаграми. На схема EV3₁ е предложена втора Ойлер-Вен диаграма на същата

ситуация.

Коментар 2. Както ситуацията с две определящи множества, така и ситуацията с три определящи множества може да бъде представена чрез различни диаграми. Това дава възможност за поставяне в „центъра“ на диаграмата на сечението, чиято мощност е известна. Това, от своя страна, улеснява съставянето и решаването на математическия модел (сх. EV3a).

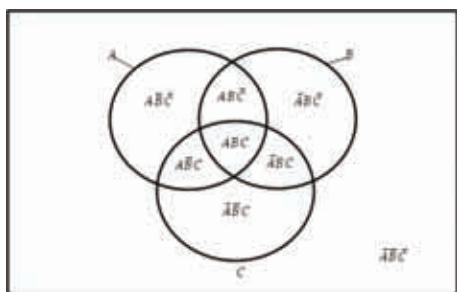


Схема EV3

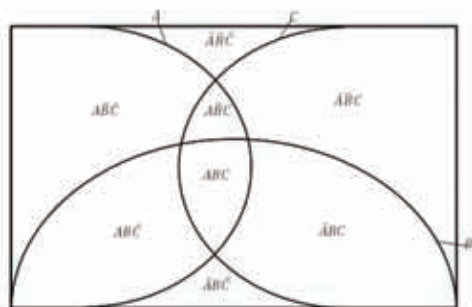


Схема EV3₁

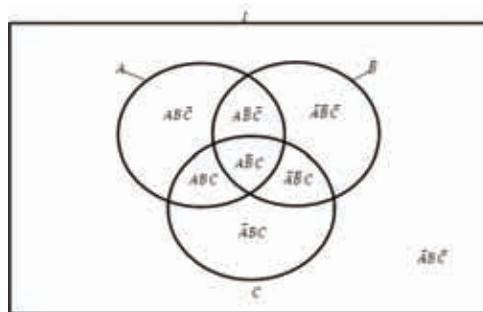
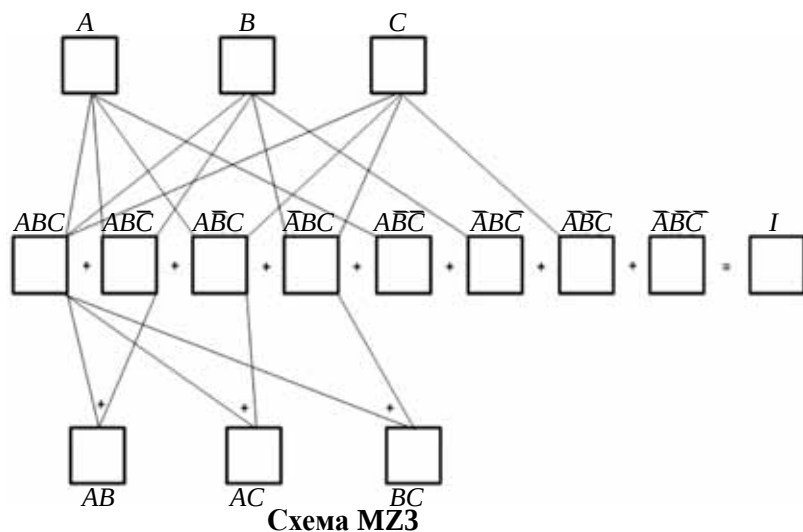


Схема EV3a

MZ-карта. От аритметична гледна точка, от равенството

$$(7) |ABC| + |AB\bar{C}| + |A\bar{B}C| + |\bar{A}BC| + |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| + |\bar{A}B\bar{C}| + |A\bar{B}C| + |\bar{A}BC| = |I|$$

следва, че всеки 8 от деветте числа $|ABC|$, $|AB\bar{C}|$, $|A\bar{B}C|$, $|\bar{A}BC|$, $|\bar{A}\bar{B}\bar{C}|$, $|\bar{A}B\bar{C}|$, $|A\bar{B}C|$, $|\bar{A}BC|$, $|I|$ определят ситуацията напълно, т.е. ако са известни 8 от тях, то деветото е еднозначно определено. Но трябва да отбележим, че освен това равенство ситуацията се „допълва“ и от още 18 равенства.



За да може всички задачи компоненти да бъдат отразени на MZ-картата, основното равенство (7) представяме, като разполагаме квадратчетата на „една линия“, а допълнителните „връзки“ представяме чрез MZ-диаграми от двете страни на линията на „два етажа“, както е показано на схема MZ3.

4.4. Проблемна ситуация с четири определящи признака

Нека множествата A, B, C и D са определящи за дадена проблемна ситуация.

В този случай универсалното множество I се разбива на шестнадесет класа – сеченията $ABCD$, $ABC\bar{D}$, $AB\bar{C}D$, $A\bar{B}CD$, $\bar{A}BCD$, $\bar{A}B\bar{C}D$, $\bar{A}\bar{B}CD$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$, $\bar{A}BC\bar{D}$, $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$, $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $A\bar{B}CD$, $A\bar{B}\bar{C}D$, $A\bar{B}C\bar{D}$, $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$.

Ойлер-Вен диаграма.

Ойлер-Вен диаграмата на ситуацията се състои от един правоъгълник (за универсалното множество I) и четири „затворени линии“ (за множеството A, за множеството B, за множеството C и за множеството D), разположени във вътрешността на правоъгълника I (сх. EV4).

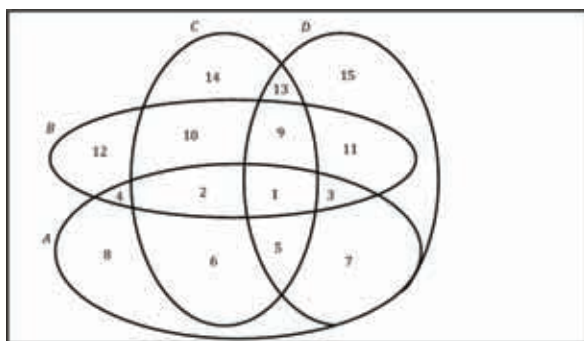


Схема EV4

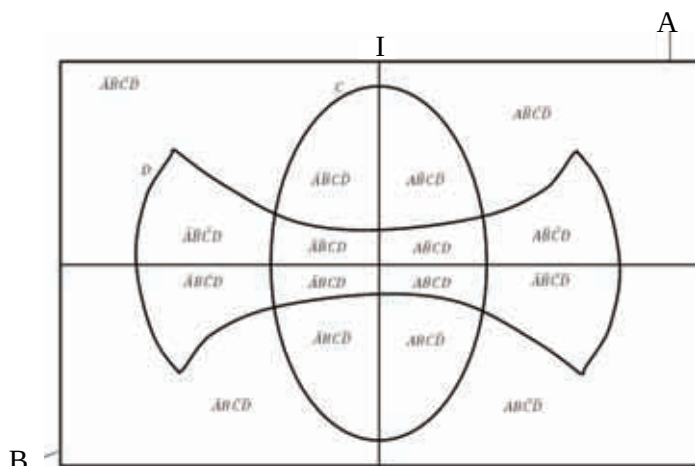


Схема EV4₁

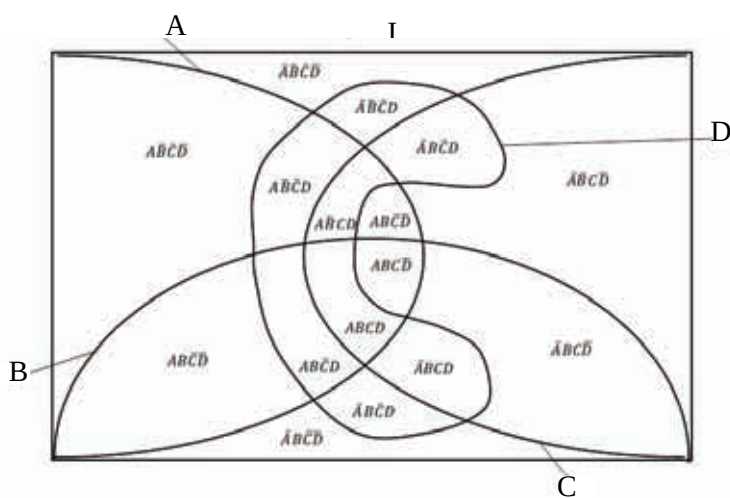


Схема EV4₂

Коментар. Проблемната ситуация, породена от четири признака, може да бъде представена с повече от една диаграми, топологично еквивалентни. На схема EV4₁ е показана Ойлер-Вен диаграма от четири признака с формата на „папионка“, а на схема EV4₂ е показана Ойлер-Вен диаграма от четири признака с формата на „бъбрек“.

MZ-диаграма. В общия случай задачата, в която проблемната ситуация е определена от четири множества, е твърде сложна поради големия брой задачи

компоненти. На практика, много от задачите, в които участват четири множества и са предназначени за ученици от началните класове, представят частни случаи, при които само част от сеченията на множествата не са празни. В тези случаи Ойлер-Вен диаграмите и MZ-картите, макар и сложни, не са толкова трудни, защото връзките между компонентите са лесно обозрими. Например показаните Ойлер-Вен диаграма (сх. EV4.1) и MZ-карта (сх. MZ4) са на задача, чиято проблемна ситуация е определена от четири множества A, B, C, D и при която само сеченията AB, BC и CD не са празни. (Със знака !A означаваме „само A“, т.е. множеството от елементите на A, които принадлежат само на A.)

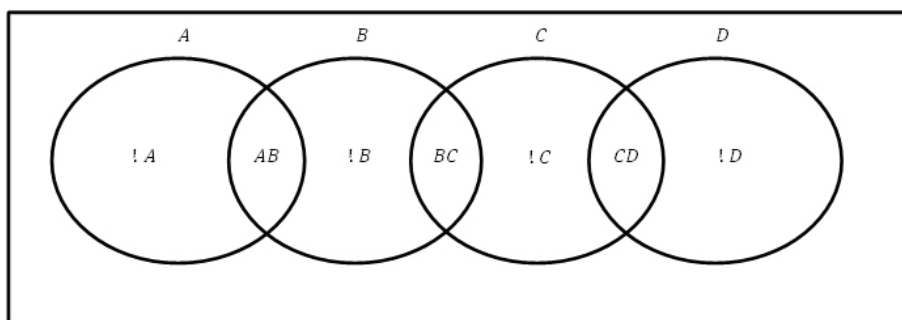


Схема EV4.1

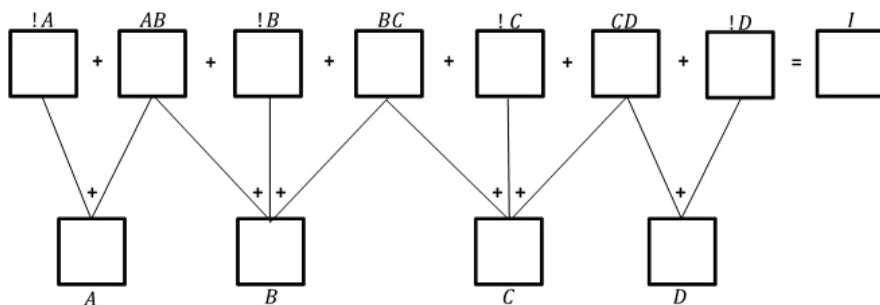


Схема MZ4

5. Приложения на Ойлер-Вен диаграми и MZ-карти в сравнителен план (в случаите до три определящи признака)

В тази точка ще направим конкретни приложения на двата подхода. За целта ще предложим паралелно модели, направени посредством Ойлер-Вен диаграма и посредством MZ-карта, както и решения на задачите, формулирани в точка 3.

Задача 1. Контролна работа, проведена с ученици, съдържа само една задача. При проверката се оказало, че задачата е решена от 18 ученици и не е решена от 11. Колко ученици са участвали в контролната работа?

Решение

Нека I е множеството на всички ученици, участвали на контролното.

Нека A е множеството на учениците, които са решили задачата. Тогава $\bar{A}$ е множеството на учениците, които не са решили задачата.

След въведените означения задачата може да бъде представена кратко по следния начин.

Дадено: $|A| = 18$, $|\bar{A}| = 11$.

Да се намери: $|I|$.

Ойлер-Вен диаграмата на задачата е представена на схема EV5.

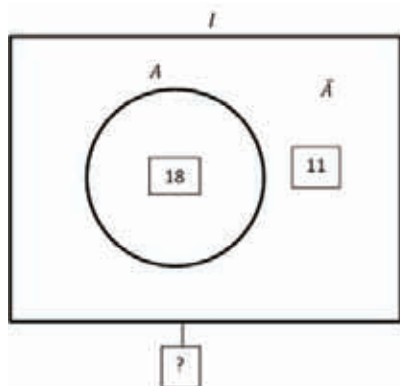


Схема EV5

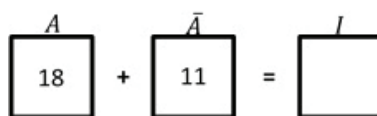


Схема MZ5

MZ-картата на задачата е представена на схема MZ5.

Аритметичният модел на задачата е съставен само от една елементарна задача компонента, която е права задача от събиране, т.е.

$$18 + 11 = \square$$

За да намерим числото $|I|$, достатъчно е да намерим сбора на числата 18 и 11, т.е. $18 + 11 = 29$.

Отговор. 29 ученици са участвали в контролната работа.

Задача 2. В един клас има 30 ученици, 13 от тях са тъмнокоси. Колко ученици нямат тъмна коса?

Решение

Нека I е множеството на всички ученици в класа.

Нека A е множеството на тъмнокосите ученици.

Тогава $\bar{A}$ е множеството на учениците, които не са тъмнокоси.

След въведените означения задачата може да бъде записана накратко така.

Дадено: $|I| = 30$, $|A| = 13$.

Да се намери: $|\bar{A}|$.

Ойлер-Вен диаграмата на задачата е представена на схема EV6.

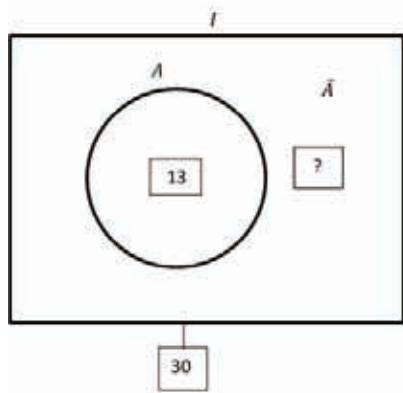


Схема EV6

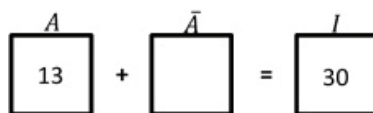


Схема MZ6

MZ-картата на задачата е представена на схема MZ6.

Аритметичният модел на задачата е съставен само от една елементарна задача компонента, която е обратна задача от събиране, т.е.

$$13 + \square = 30.$$

За да намерим числото $|\bar{A}|$, достатъчно е да решим уравнението $13 + x = 30$, т.е.

$$x = 30 - 13.$$

Отговор. 17 ученици нямат тъмна коса.

Задача 3. На ученическо състезание по математика били предложени две задачи. При проверката се оказало, че първата задача е решена от 22 ученици, а втората – от 30 ученици. Също така и двете задачи били решени от 12 ученици, а трима не решили нито една от задачите. Колко ученици са участвали в състезанието?

Решение

Нека I е множеството на всички ученици, участвали в състезанието.

Нека A е множеството на учениците, решили първата задача.

Нека B е множеството на учениците, решили втората задача.

Тогава AB е множеството на учениците, решили и двете задачи, и $\bar{A}\bar{B}$ е множеството на учениците, не решили нито една задача.

След въведените означения задачата може да бъде записана накратко по следния начин.

Дадено: $|A| = 22$, $|B| = 30$, $|AB| = 12$, $|\bar{A}\bar{B}| = 3$.

Да се намери: $|I|$.

Като вземем предвид числовите данни от условието, построяваме Ойлер-Вен диаграмата (сх. 5.3а) и MZ-картата (сх. MZ7) на задачата. На Ойлер-Вен диаграмата ясно личат класовете, от които е съставена ситуацията, а на MZ-картата са показани аритметичните „връзки“ между техните мощности (числа).

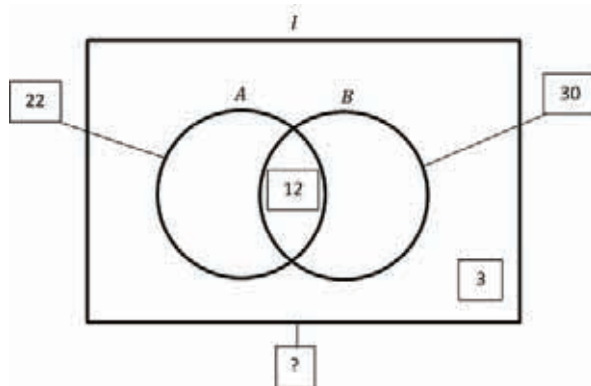


Схема EV7

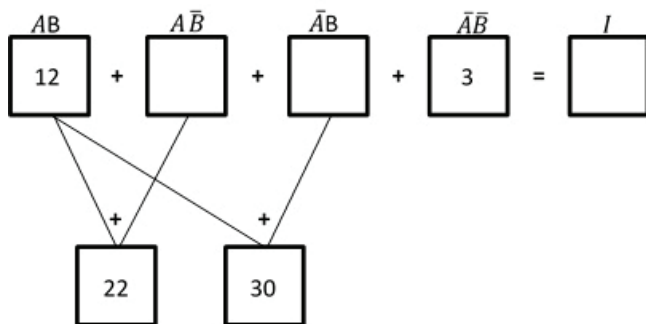


Схема MZ7

От MZ-картата се вижда, че аритметичният модел на задачата е съставен от три задачи компоненти:

1) $12 + \square = 22$; 2) $12 + \square = 30$; 3) $12 + \square + \square + 3 = \square$.

За да намерим числото $|I|$, е необходимо (и достатъчно) да решим последователно задачите 1), 2) и 3). Като вземем предвид, че в първото квадратче на всяко от трите равенства се намира числото 12, можем да пристъпим

към „попълване“ на MZ-картата (сх. MZ8), както и на Ойлер-Вен диаграмата (сх. EV8) на решението на задачата.

1) Отначало решаваме уравнението $12 + x = 22$ и полученото решение ($x = 10$) нанасяме в квадратчето на $\bar{A}\bar{B}$.

2) След това решаваме уравнението $12 + y = 30$ и полученото решение ($y = 18$) нанасяме в квадратчето на $\bar{A}B$.

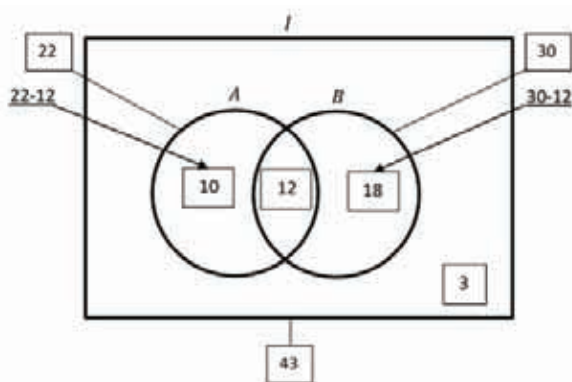


Схема EV8

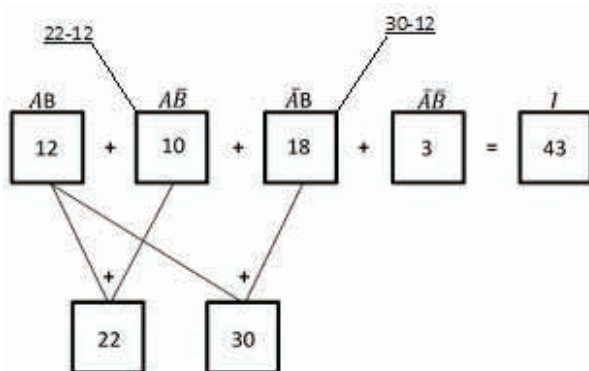


Схема MZ8

3) Накрая намираме сбора на числата 12, 10, 18 и 3, т.е

$$12 + 10 + 18 + 3$$

и отговора (43) записваме в квадратчето на I , с което задачата е решена.

Отговор. 43 ученици участвали в състезанието.

Задача 4. В клас от 30 ученици – 17 са отличници и 18 ученици са спортисти, а петима от учениците не са отличници и не са спортисти. Колко от спортистите са отличници?

Решение

Нека I е множеството на всички ученици в класа.

Нека A е множеството на отличниците.

Нека B е множеството на спортистите.

Тогава AB е множеството на спортистите, които са отличници, и $\bar{A}\bar{B}$ е множеството на учениците, които не са отличници и не са спортисти.

След направените означения задачата може да бъде записана накратко по следния начин.

Дадено: $|I| = 30$, $|A| = 17$, $|B| = 18$, $|\bar{A}\bar{B}| = 5$.

Да се намери: $|AB|$.

Като вземем предвид данните от условието на задачата, построяваме Ойлер-Вен диаграмата (сх. EV9) и MZ-картата (сх. MZ9) на задачата. На Ойлер-Вен диаграмата ясно личат класовете, от които е съставена ситуацията, а на MZ-картата са показани аритметичните „връзки“ между техните мощности (числа).

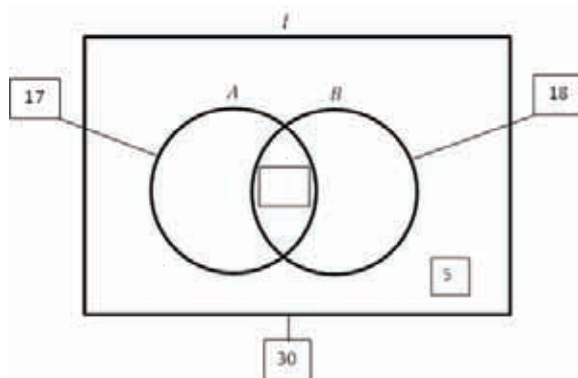


Схема EV9

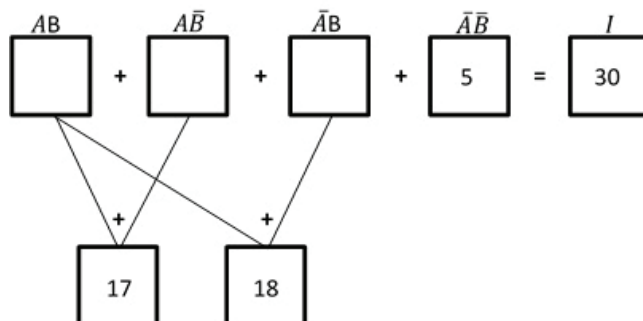


Схема MZ9

От MZ-картата се вижда, че задачата е съставена от три задачи компоненти:

$$1) \square + \square = 17; \quad 2) \square + \square = 18; \quad 3) \square + \square + \square + 5 = 30.$$

Тъй като всички задачи компоненти са неопределени, то за да съставим аритметичен модел на задачата, е необходимо да означим с x числото $|AB|$. Това означава, че запълваме с x първото квадратче на MZ-картата (или „централното прозорче“) на Ойлер-Вен диаграмата. Тогава равенствата имат вида:

$$1) x + \square = 17, \quad 2) x + \square = 18, \quad 3) x + \square + \square + 5 = 30.$$

Като имаме предвид, че в първото квадратче на всяко от трите равенства се намира числото x , можем да пристъпим към „попълване“ на MZ-картата (сх. MZ10), както и на Ойлер-Вен диаграмата (сх. EV10) на решението на задачата.

1) От първото равенство изразяваме второто събираемо ($\square = 17 - x$) и записваме израза в квадратчето на $A\bar{B}$.

2) От второто равенство изразяваме второто събираемо ($\square = 18 - x$) и записваме израза в квадратчето на $\bar{A}B$.

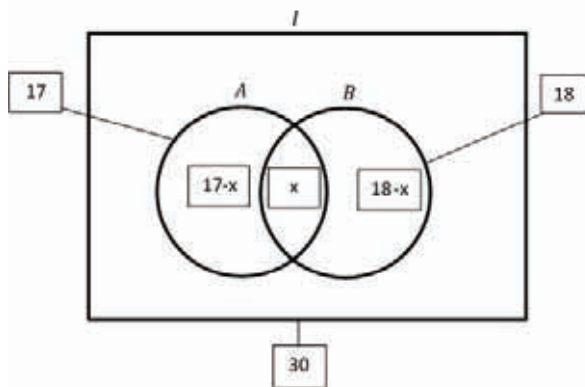


Схема EV10

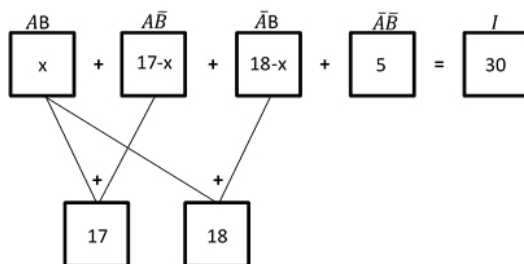


Схема MZ10

3) Получаваме уравнението $x + 17 - x + 18 - x + 5 = 30$.

След кратки еквивалентни преобразувания достигаме до елементарното уравнение $40 - x = 30$.

От последното уравнение (с неизвестен умалител) намираме числото x ($x = 10$).

Отговор. 10 от спортистите са отличници.

Задача 5. На ученическо състезание били дадени три задачи. При проверката се оказало, че първата задача била решена от 21 ученици, втората – от 25 ученици, и третата – от 19 ученици. Също така първата и втората задача били решени от 13 ученици, първата и третата – от 7 ученици, втората и третата – от 9 ученици. Трите задачи били решени от трима ученици, а четирима не са решили нито една от задачите. Колко ученици са участвали в състезанието?

Решение

Нека I е множеството на всички ученици, участвали на състезанието.

Нека A е множеството на учениците, решили първата задача.

Нека B е множеството на учениците, решили втората задача.

Нека C е множеството на учениците, решили третата задача.

Тогава AB е множеството на учениците, решили първата и втората задача, AC е множеството на учениците, решили втората и третата задача, ABC е множеството на учениците, решили и трите задачи, и $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ е множеството на учениците, нерешили нито една задача.

След направените означения задачата може да бъде записана по-кратко по следния начин.

Дадено:

$$|A| = 21, |B| = 25, |C| = 19, |AB| = 13, |AC| = 7, |BC| = 9, |ABC| = 3, |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| = 4.$$

Да се намери: $|I|$.

Построяваме Ойлер-Вен диаграмата (сх. EV11) и MZ-картата (сх. MZ11) на задачата, като имаме предвид числовите данни от условието. Отново може да се каже, че на Ойлер-Вен диаграмата ясно личат класовете, от които е съставена ситуацията, а на MZ-картата са показани аритметичните „връзки“ между техните мощности (числа).

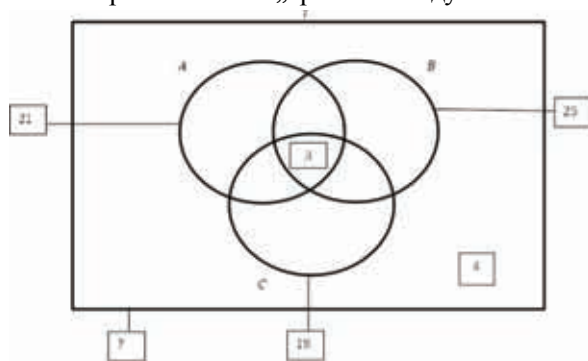


Схема EV11

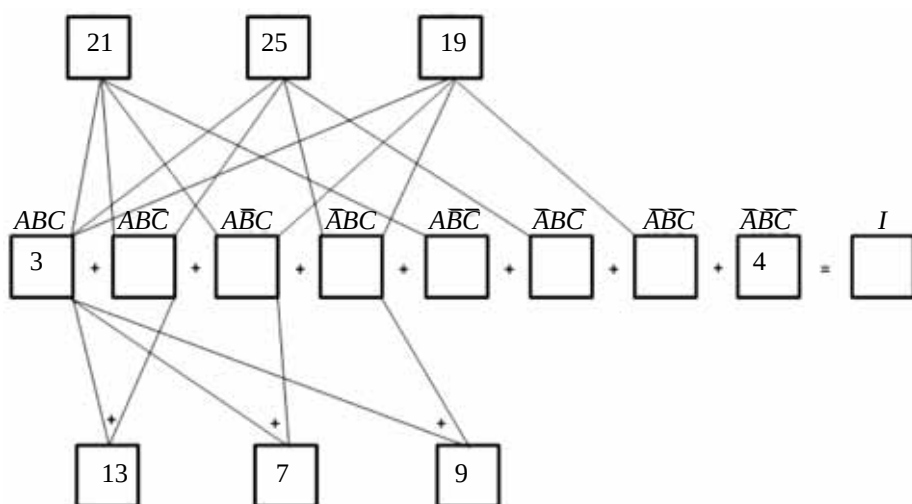


Схема MZ11

От MZ-картата се вижда, че аритметичният модел на задачата е съставен от седем задачи компоненти:

- 1) $3 + \square = 13$; 2) $3 + \square = 7$; 3) $3 + \square = 9$; 4) $3 + \square + \square + \square = 21$;
- 5) $3 + \square + \square + \square = 25$; 6) $3 + \square + \square + \square = 19$;
- 7) $3 + \square + \square + \square + \square + \square + \square + 4 = \square$.

За да намерим числото $|I|$, е необходимо (и достатъчно) да решим последователно задачите 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7). Като вземем предвид, че в първото квадратче на всяко от седемте равенства се намира числото 3 и въведем буквени означения на неизвестните числа, можем да пристъпим към „попълване“ на MZ-картата (сх. MZ12), както и на Ойлер-Вен диаграмата (сх. EV12) на решението на задачата.

1) Решаваме първото уравнение $3 + x = 13$ и решението ($x = 10$) записваме в квадратчето на $AB\bar{C}$.

2) Решаваме второто уравнение $3 + y = 7$ и решението ($y = 4$) записваме в квадратчето на $A\bar{B}C$.

3) Решаваме третото уравнение $3 + z = 9$ и решението ($z = 6$) записваме в квадратчето на $A\bar{B}C$.

4) Решаваме четвъртото уравнение $3 + 4 + 10 + a = 21$ и решението ($a = 4$) записваме в квадратчето на $A\bar{B}\bar{C}$.

5) Решаваме петото уравнение $3 + 10 + 6 + b = 25$ и решението ($b = 6$) записваме в квадратчето на $A\bar{B}\bar{C}$.

6) Решаваме шестото уравнение $3 + 4 + 6 + c = 19$ и решението ($c = 6$) записваме в квадратчето на $A\bar{B}C$.

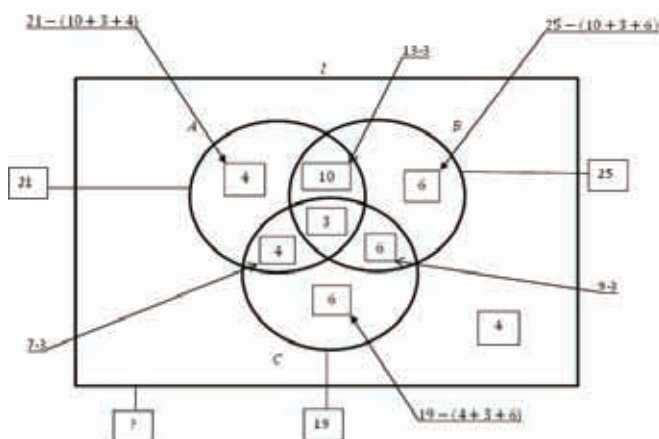


Схема EV12

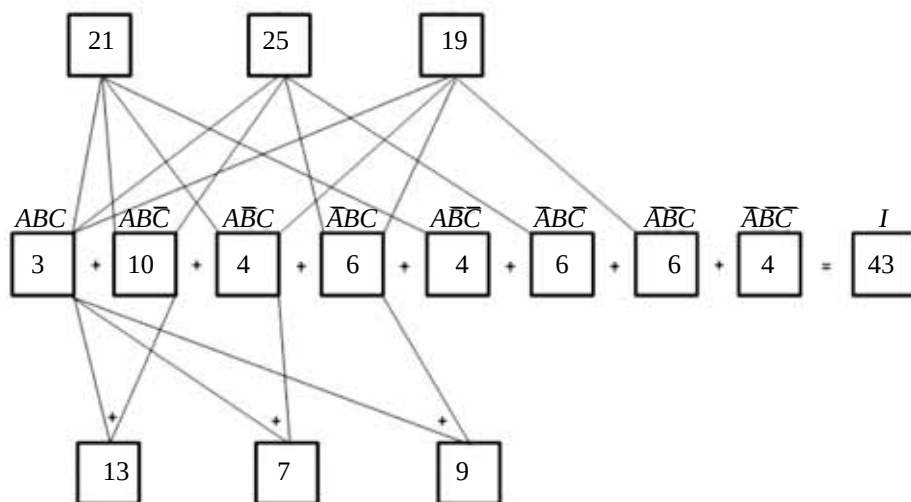


Схема MZ12

7) Намираме сбора на числата 3, 10, 6, 4, 4, 6, 6, 4, т.е.

$$3 + 10 + 6 + 4 + 4 + 6 + 6 + 4 = 43$$

и отговора (43) записваме в квадратчето на I, с което задачата е решена.

Отговор. 43 ученици са участвали в състезанието.

Задача 6. При анкета на 32 делегати на една конференция се оказало, че 22 владеят френски език, 21 – немски, 8 – испански, и 1 не владее нито един

от трите езика. Френски и немски владеят 13 делегати, немски и испански – 6, френски и испански – 5. Колко делегати на конференцията владеят и трите езика?

Решение

Нека I е множеството на всички делегати на конференцията.

Нека A е множеството на делегатите, които знаят френски.

Нека B е множеството на делегатите, които знаят немски.

Нека C е множеството на делегатите, които знаят испански.

Тогава AB е множеството на делегатите, които знаят френски и немски, AC е множеството на делегатите, които знаят френски и испански, BC е множеството на делегатите, които знаят немски и испански, ABC е множеството на делегатите, които знаят и трите езика и $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ е множеството на делегатите, които не владеят нито един от трите езика.

След въведените означения задачата може да бъде записана по-кратко.

Дадено:

$$|I| = 32, |A| = 22, |B| = 21, |C| = 8, |AB| = 13, |AC| = 6, |BC| = 5, |\bar{A}\bar{B}\bar{C}| = 1.$$

Да се намери: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Като вземем предвид данните от условието на задачата, построяваме Ойлер-Вен диаграмата (сх. EV13) и MZ-картата (сх. MZ13) на задачата. На Ойлер-Вен диаграмата ясно се виждат класовете, от които е съставена ситуацията, а на MZ-картата са представени аритметичните „връзки“ между техните мощности (числа).

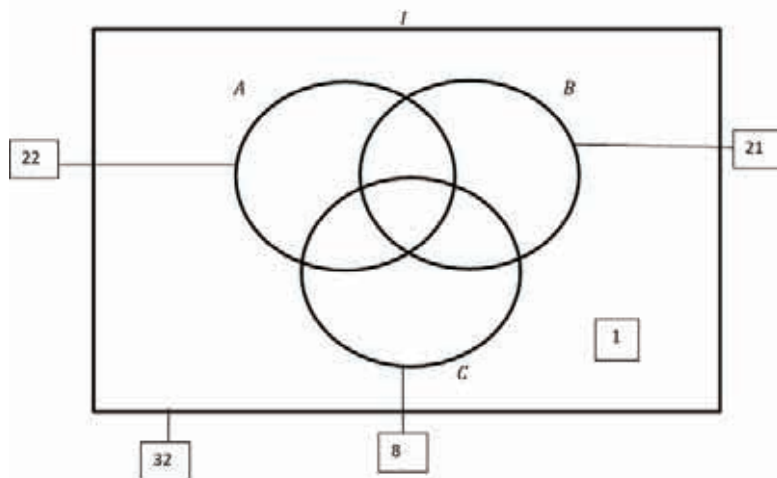


Схема EV13

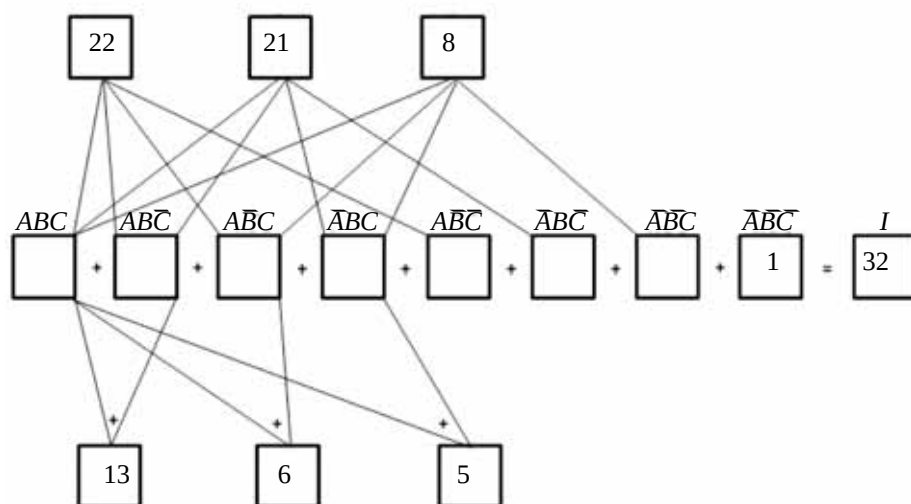


Схема MZ13

От MZ-картата става ясно, че аритметичният модел на задачата е съставен от седем задачи компоненти:

- 1) $\square + \square = 13$; 2) $\square + \square = 6$; 3) $\square + \square = 5$; 4) $\square + \square + \square + \square = 22$;
- 5) $\square + \square + \square + \square = 21$; 6) $\square + \square + \square + \square = 8$;
- 7) $\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + 1 = 32$.

Тъй като всички задачи компоненти са неопределени, то за да съставим аритметичен модел на задачата, е необходимо да означим с x числото $|ABC|$. Това означава, че запълваме с x първото квадратче на MZ-картата (или „централното прозорче“) на Ойлер-Вен диаграмата. След като в първото квадратче на всяко от седемте равенства се намира числото x , то можем да пристъпим към „попълване“ на MZ-картата (сх. MZ14), както и на Ойлер-Вен диаграмата (сх. EV14) на решението на задачата.

1) От първото равенство изразяваме второто събираемо ($\square = 13 - x$) и записваме израза в квадратчето на $ABC\bar{C}$.

2) От второто равенство изразяваме второто събираемо ($\square = 6 - x$) и записваме израза в квадратчето на $A\bar{B}C$.

3) От третото равенство изразяваме второто събираемо ($\square = 5 - x$) и записваме израза в квадратчето на $A\bar{B}C$.

4) От четвъртото равенство изразяваме неизвестното събираемо ($\square = 3 + x$) и записваме израза в квадратчето на $A\bar{B}C$.

5) От петото равенство изразяваме неизвестното събираемо ($\square = 3 + x$) и записваме израза в квадратчето на $\overline{A}B\overline{C}$.

6) От шестото равенство изразяваме неизвестното събираемо ($\square = x - 3$) и записваме израза в квадратчето на $\overline{A}\overline{B}C$.

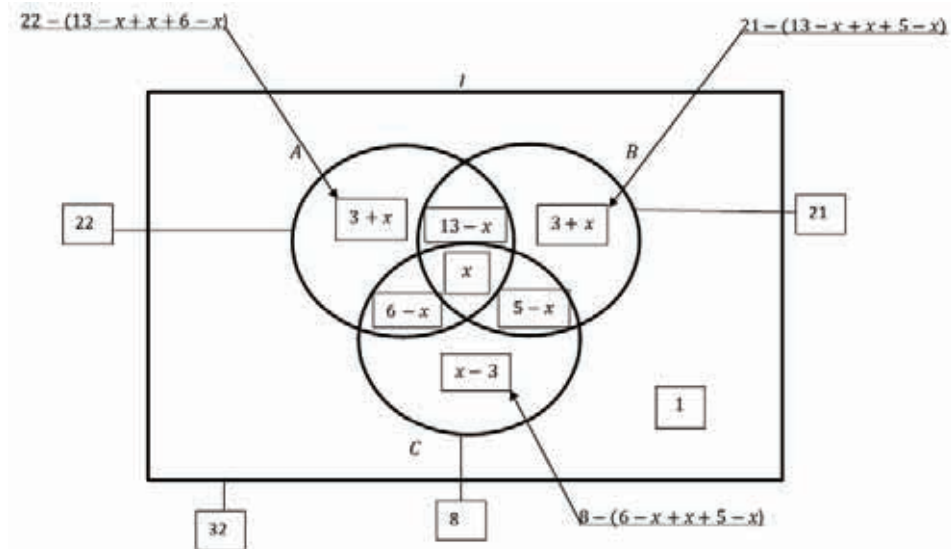


Схема EV14

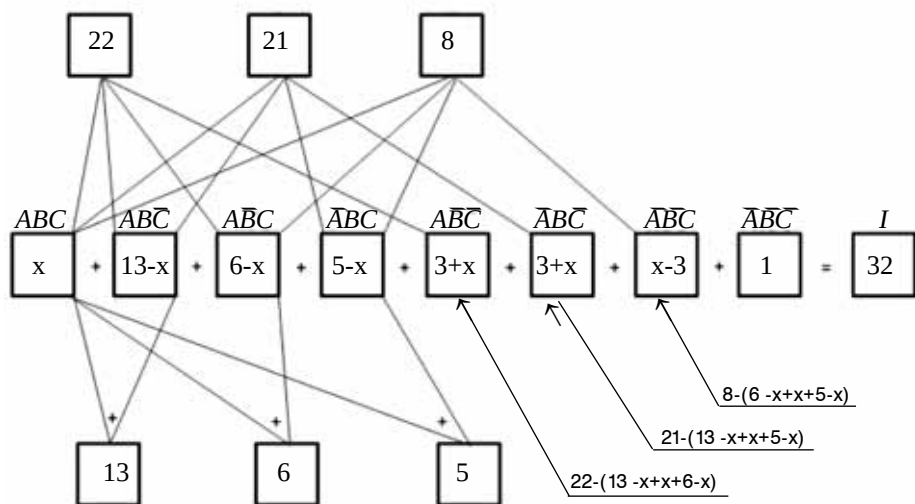


Схема MZ14

7) От полученото уравнение

$$x + 13 - x + 6 - x + 5 - x + 3 + x + 3 + x + x - 3 + 1 = 32$$

намираме неизвестното число x ($x = 4$), с което задачата е решена.

Отговор. 4 от делегатите владеят и трите езика.

6. Заключение и бележки

Нашият опит в подготовката на студенти – бъдещи начални учители, ни дава основание да твърдим, че паралелното прилагане на двата математико-дидактически подхода има важно място в обучението, и по-специално в първите етапи при изучаване на темата за задачите от адитивни операции с множества и числа в началната училищна математика. От една страна, EV-диаграмата представя и много точно визуализира адитивната структура на задачата, а от друга страна, MZ-картата моделира ясно и пълно структурата на задачата, а също и зависимостта между задачите компоненти на решението. Всичко това води до по-добро разбиране на задачата, до по-лесното откриване на задачите компоненти, а от там – и до бързо и вярно откриване пътя на решението на задачата.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Lalchev, Z. & Varbanova, M. (2014). Inversiyata – metod v nachalnata uchilishtna matematika. *Matematika i informatika*, 57 (3), 215 – 246 [Лалчев, З. & Върбанова, М. (2014). Инверсията – метод в началната училищна математика. *Математика и информатика*, 57 (3), 215 – 246].
- Lalchev, Z. & Varbanova, M. (2015). Sastavni aritmetichni zadachi. Strukturno-tehnologichen model i MZ-karta na zadachata. Tekstovi zadachi. *Matematika i informatika*, 58 (4), 343 – 374 [Лалчев, З. & Върбанова, М. (2015). Съставни аритметични задачи. Структурно-технологичен модел и MZ-карта на задачата. Текстови задачи. *Математика и информатика*, 58 (4), 343 – 374].
- Lalchev, Z. (2009). *Matematika v zadachi i metodi. Kniga 1. Za uchitelya v nachalnite klasove*. Sofia: Sv. Kliment Ohridski [Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга 1. За учителя в началните класове*. София: Св. Климент Охридски].
- Lalchev, Z. (2009). *Matematika v zadachi i metodi. Kniga 2. Za uchitelya v nachalnite klasove*. Sofia: Sv. Kliment Ohridski [Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга 2. За учителя в началните класове*. София: Св. Климент Охридски].
- Lalchev, Z., Varbanova, M. & Voutova, I. (2005). Equations or transformations in primary school mathematics?, *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Educations MEDCONF 2005*, pp. 355 – 364.

Varbanova, M. (2013). *Strukturno-funktsionalno modelirane v nachalnata uchilishtna matematika*, Plovdiv: Astarta [Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*, Пловдив: Астарта].

EULER-VENN DIAGRAMS OR MZ-CARDS IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

Abstract. The subject of the paper is the mathematical model construction of problem situations, caused by additive operations (union, intersection and supplement) with finite sets in primary school mathematics. A comparative analysis of two methodological approaches for modeling and solving problems for additive operations and natural numbers is done. It is about the already known „Euler-Venn diagram“ method and the innovative „MZ-card“ method. An idea is drawn that a solution could be found easier, if the two approaches complement one another in the construction of the mathematical model of the problem.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**

Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69 A, Shipchenski prohod Blvd.
1754 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Prof. Dr. Margarita Varbanova**

Faculty of Mathematics and Informatics
University of Veliko Tarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mvarbanova11@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**

Faculty of Mathematics and Informatics
Sofia University
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg

✉ **Dr. Ivan Doushkov, Assist. Prof.**

Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69 A, Shipchenski prohod Blvd.
1754 Sofia, Bulgaria
E-mail: i_dushkov@mail.bg