Educational Research
Научно-методически статии

ОБЩ ПОДХОД ЗА УСТАНОВЯВАНЕ НА ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ РАДИУСИ НА ДОПИРАЩИ СЕ ОКРЪЖНОСТИ

[1]Сава Гроздев, [2]Веселин Ненков
[1]Висше училище по застраховане и финанси
[2]Технически колеж – Ловеч

Резюме. Разгледана е една обща идея за намиране на зависимости между радиусите на допиращи се окръжности в равнината на даден триъгълник. В основата си тази идея съдържа формулата на Ойлер за разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжност на триъгълника и други връзки между радиусите на тези окръжности. Основните резултати са обединени във формулировката и доказателството на съответна лема.
Keywords: triangle, circle, circum-circle, in-circle, Sangaku

1. Увод. Много геометрични задачи в равнината на даден триъгълник са свързани с комбинации от окръжности. Такива комбинации често се съдържат в японските теореми „Сангаку“. Някои от тези теореми, публикувани в рубриката „Задачата на броя“ на списание „Математика и информатика“, са следните четири:

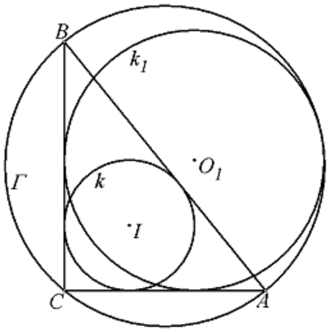
Теорема 1. *В окръжност* Γ *е вписан правоъгълен триъгълник. Окръжността* k_1 *с радиус* r_1 *се допира до катетите на триъгълника и вътрешно до* Γ *. Ако вписаната в триъгълника окръжност има радиус* r *, то е изпълнено равенството* $r_1 = 2.r$ (фиг. 1). (Табов, 1990, 1990 а).

Теорема 2. *Триъгълник* ABC $(BC < BA)$ *е вписан в окръжност* Γ *. Точката* C' *е от страната* CA *и* $BC' = BC$*. Окръжността* k_1 *с радиус* r_1 *се допира до раменете на* $\Delta BC'A$ *и вътрешно до* Γ *. Ако вписаната в* $\Delta BC'A$ *окръжност* k_2 *има радиус* r_2*, то е изпълнено равенството* $r_1 = 2.r_2$ (фиг. 2). (Табов, 1998), (Михайлов, 1999).

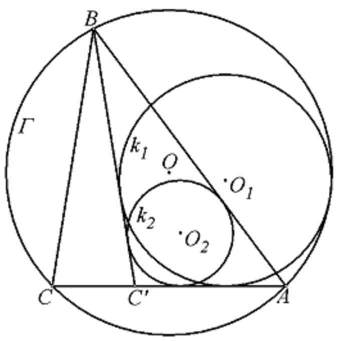
Теорема 3. *Окръжността* Γ_c *минава през върховете* A *и* B *на* ΔABC *така, че върхът* C *да лежи вътре в* Γ_c*. Точката* M *е средата на* AB*, а точката* N *е средата на дъгата* $\overset{\frown}{AB}$*. Окръжността* k' *с радиус* x *се допира до страните* AC *и* BC *на* ΔABC *и вътрешно до* Γ_c*. Ако* $BC = a$*,* $CA = b$*,* $AB = c$*,* $p = \frac{a+b+c}{2}$*,* $MN = d$ *, а вписаната в* ΔABC *окръжност* k *има радиус*

r, *то е изпълнено равенството* $x = r + \frac{2d(p-a)(p-b)}{cp}$ (фиг. 3). (Табов, 1999), (Цеков, 2000).

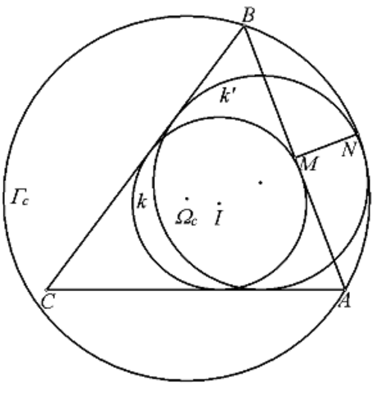
Теорема 4. *Точките* A, B, C *и* D *лежат в този ред на окръжност* $\Gamma(O,r)$, *а* E *е пресечната точка на* AC *и* BD. *Окръжността* $k_1(O_1,r_1)$ *е вписана в* ΔABE, *а окръжността* $k_2(O_2,r_2)$ *е вписана в* ΔCDE. *Ако окръжността* $k_3(O_3,r_3)$ *се допира до отсечките* AE *и* BE *и до дъгата* $\overset{\frown}{AB}$, *а окръжността* $k_4(O_4,r_4)$ *се допира до отсечките* CE *и* DE *и до дъгата* $\overset{\frown}{CD}$, *то е изпълнено равенството* $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ (фиг. 4). (Табов, 1999 а), (Антонов, 2000).



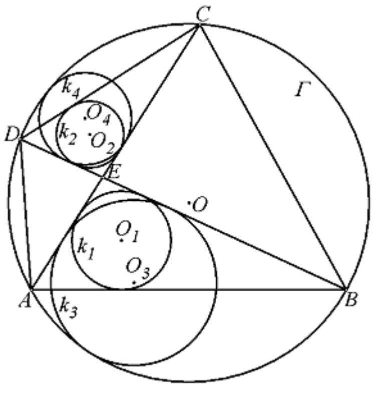
Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

Ако направим известен анализ на конфигурациите от окръжности, които се съдържат във формулираните японски теореми, ще установим, че във всяка тях участва по една окръжност, която минава през поне два върха на триъгълник, и една окръжност, която се допира поне до две от страните на същия триъгълник. Окръжност, която минава през два върха на ΔABC, ще наричаме *полуописана* за ΔABC, а окръжност, която се допира до две от правите BC, CA и AB, ще наричаме *полувписана* за ΔABC. Всяка от горните теореми се отнася до полувписани и полуописани окръжности и изисква определена изобретателност, за да се открие съответното ѝ доказателство. Оказва се обаче, че съществува обща идея, която може да се използва при доказване на зависимости между радиуси на окръжности от вида, в който присъстват във формулираните теореми „Сангаку“. Тази идея се съдържа в една основна лема, която дава възможност не само да докажем формулираните четири теореми, но и да покажем интересни обобщения на някои от тях. От своя страна, тези обобщения позволяват да се получат други интересни частни случаи.

Преди да формулираме и докажем въпросната лема, ще се уговорим, че за елементите на даден ΔABC ще използваме стандартните означения за неговите елементи, т.е. $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$, R – радиус на описаната окръжност, r – радиус на вписаната окръжност, r_a, r_b, r_c – радиуси на външновписаните окръжности, допиращи се съответно до страните BC, CA, AB. Освен това центровете на описаната окръжност Γ и на вписаната окръжност k на ΔABC ще означаваме съответно с O и I.

2. Основна помощна теорема. Едно общо твърдение, което свързва радиусите на допиращи се полувписани и полуописани окръжности за даден ΔABC, ще докажем в следващата лема. Тази лема се намира в основата на всички следващи доказателства и я формулираме по следния начин:

Лема. *Окръжност $\Gamma_c(\Omega_c, R_c)$ минава през върховете A и B на даден триъгълник ABC, описаната окръжност на който има за център точката O. Ако окръжността $k_c(O_c, \rho_c)$ се допира до правите AC и BC и до $\Gamma_c(\Omega_c, R_c)$, то е изпълнено равенството:*

$$(*)\quad \begin{aligned}&\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\rho_c^2 -\\ &-\varepsilon'\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(r\cos^2\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}T\right)+2\varepsilon'\varepsilon'' R_c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]\rho_c +\\ &+r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(r\cos\gamma - T\right)=0,\end{aligned}$$

където

1) $T=\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{16R_c^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}-r^2\sin^2\gamma}$ *;*

2) $\varepsilon_1=1$*, когато* O *и* Ω_c *лежат в една полуравнина спрямо* AB *или когато* O *лежи на* AB *, или когато* $\Omega_c\equiv O$*;*

3) $\varepsilon_1=-1$*, когато* O *и* Ω_c *лежат в различни полуравнини спрямо* AB*;*

4) $\varepsilon_2=1$*, когато* $\gamma<\frac{\pi}{2}$ *или когато* $\gamma=\frac{\pi}{2}$ *и* Ω_c *и* C *са в една и съща полуравнина спрямо* AB *, или когато* $\Omega_c\equiv O$*;*

5) $\varepsilon_2=-1$*, когато* $\gamma>\frac{\pi}{2}$ *или когато* $\gamma=\frac{\pi}{2}$ *и* Ω_c *и* C *са в различни полуравнини спрямо* AB*;*

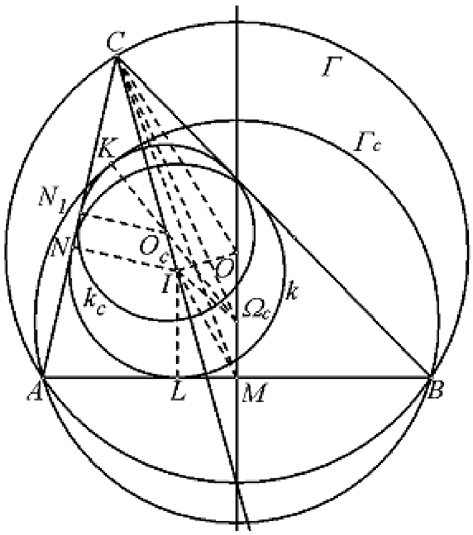
6) $\varepsilon'=1$*, когато* k_c *лежи в* $\measuredangle ACB$*;*

7) $\varepsilon'=-1$*, когато* k_c *лежи в ъгъла, противоположен на* $\measuredangle ACB$*;*

8) $\varepsilon''=1$*, когато* k_c *се допира външно до* Γ_c*;*

9) $\varepsilon''=-1$*, когато* k_c *се допира вътрешно до* Γ_c.

Доказателство. Ще използваме означенията от фиг. 5. Когато $L\equiv M$, т.е. когато $AC=BC$, разсъжденията са прости, а и твърдението в този случай следва от съображения за непрекъснатост в общия случай, когато $L\neq M$. Затова по-нататък ще предполагаме, че $L\neq M$.



Фигура 5

Доказателството ще проведем в следната последователност:

1) От правоъгълните триъгълници AIL, CIN и CO_1N_1 се получават съответно следващите три равенства:

$$(1)\qquad AI=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ CI=\frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}},\ CO_c=\frac{\rho_c}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

2) От правоъгълните триъгълници AMO и $AM\Omega_c$ и синусовата теорема за ΔABC получаваме съответно следващите две равенства:

$$(2)\qquad OM^2=R^2-\frac{c^2}{4}=R^2\cos\gamma,\ \Omega_cM^2=R_c^2-\frac{c^2}{4}=R_c^2-R^2\sin^2\gamma.$$

3) Тъй като $ML=\frac{|a-b|}{2}$, от правоъгълния триъгълник MIL получаваме

$$(3)\qquad IM^2=\frac{(a-b)^2}{4}+r^2.$$

4) Нека $\Omega_c\neq M$ и $\measuredangle IM\Omega_c=\psi$. Ако $O\neq M$, то $\measuredangle IMO=\psi$, когато O и Ω_c са от една и съща страна на M или $\Omega_c\equiv O$ и $\measuredangle IMO=\pi-\psi$, когато O и Ω_c са от различни страни на M. От косинусовата теорема за ΔIOM имаме $IO^2=IM^2+OM^2-2.\varepsilon_1.OM.IM.\cos\psi$, където $\varepsilon_1=1$, ако $\measuredangle IMO=\psi$ и $\varepsilon_1=-1$, ако $\measuredangle IMO=\pi-\psi$. Сега, след заместване в последното равенство на (3), на второто равенство от (2) и използване на формулата на Ойлер $OI^2=R^2-2Rr$, формулите

$$(4)\qquad (p-a)(p-b)=r^2ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2},$$

$$(5)\qquad r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

получаваме последователно равенствата:

$$IM.\cos\psi=\varepsilon_1\frac{OM^2+IM^2-OI^2}{2.OM}=\varepsilon_1\frac{-(p-a)(p-b)+r^2+2Rr}{2R|\cos\gamma|}=\varepsilon_1\frac{-r^2ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}+r^2+2Rr}{2R|\cos\gamma|}=$$

$$=\varepsilon_1\frac{-r^2\sin\frac{\gamma}{2}+2Rr\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2R|\cos\gamma|\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\varepsilon_1\frac{-r^2\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{r^2}{2\sin\frac{\gamma}{2}}}{2R|\cos\gamma|\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\varepsilon_1\frac{r^2\left(1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}{4R|\cos\gamma|\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\varepsilon_1\frac{r^2\cos\gamma}{r|\cos\gamma|}=\varepsilon_1\varepsilon_2r,$$

където $\varepsilon_2 = 1$, когато $\gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\varepsilon_2 = -1$, когато $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Ако $O \equiv M$, то $\psi = \frac{\pi}{2} - \measuredangle AMI$, когато Ω_c и C са в една и съща полуравнина спрямо AB, и $\psi = \frac{\pi}{2} - \measuredangle AMI$, когато Ω_c и C са в различни полуравнини спрямо AB.

От синусовата теорема за ΔAMI получаваме равенството $\frac{\sin\measuredangle AMI}{AI} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{IM}$, което, комбинирано с първото равенство (1), води до $IM\cos\psi = \varepsilon_2 r$. В този случай полагаме $\varepsilon_1 = 1$. Така получаваме, че при произволно положение на O в равнината на ΔABC е изпълнено равенството

(6) $IM\cos\psi = \varepsilon_1\varepsilon_2 r$.

5) Ако $\Omega_c \neq M$, то от (3), (6), второто равенство от (2) и косинусовата теорема за $\Delta I\Omega_c M$ се получава равенството

$$(7)\quad I\Omega_c^2 = r^2 + R_c^2 - (p-a)(p-b) - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 r\sqrt{R_c^2 - R^2\sin^2\gamma}\ .$$

Ако $\Omega_c \equiv M$, то $R_c = \frac{c}{2}$ и подкоренната величина в (7) е равна на нула. Освен това от правоъгълния триъгълник ILM и (3) следва $I\Omega_c^2 = IM^2 = IL^2 + ML^2 = r^2 + \frac{(a-b)^2}{4}$.

От друга страна, $R_c^2 - (p-a)(p-b) = \frac{c^2}{4} - (p-a)(p-b) = \frac{(a-b)^2}{4}$.

Следователно равенството (7) е в сила и когато $\Omega_c \equiv M$. Това означава, че равенството (7) е изпълнено при всички положения на Ω_c в равнината на ΔABC.

6) Нека $\Omega_c \neq M$ и $\measuredangle CM\Omega_c = \vartheta$. Ако $O \neq M$, то $\measuredangle CMO = \vartheta$, когато O и Ω_c са от една и съща страна на M, или $\Omega_c \equiv O$ и $\measuredangle CMO = \pi - \vartheta$, когато O и Ω_c са от различни страни на M. От косинусовата теорема за ΔCMO имаме $CO^2 = CM^2 + OM^2 - 2.\varepsilon_1.OM.CM.\cos\vartheta$, където $\varepsilon_1 = 1$, ако $\measuredangle CMO = \vartheta$ и $\varepsilon_1 = -1$, ако $\measuredangle CMO = \pi - \vartheta$. Сега, след заместване в последното равенство на първото равенство от (2) и използване на известните формули

(8) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$,

(9) $CM^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$,

както в 4) получаваме равенството:

(10) $CM.\cos\vartheta = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 R\sin\alpha\sin\beta$,

където $\varepsilon_2 = 1$, когато $\gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\varepsilon_2 = -1$, когато $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Ако $O \equiv M$, то $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \measuredangle AMC$, когато Ω_c и C са в една и съща полуравнина спрямо AB, и $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \measuredangle AMC$, когато Ω_c и C са в различни полуравнини спрямо AB. От синусовата теорема за ΔAMC получаваме равенството $\frac{\sin\measuredangle AMC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{CM}$, което, комбинирано със синусовата теорема $AC = 2R\sin\beta$ за ΔABC, води до $CM\cos\vartheta = 2\varepsilon_2 R\sin\alpha\sin\beta$. В този случай полагаме $\varepsilon_1 = 1$ и отново се получава равенството (10). Следователно (10) е изпълнено при произволно положение на O в равнината на ΔABC.

7) Ако $\Omega_c \neq M$, то от (8), (9), (10), второто равенство от (2), синусовата теорема за ΔABC и косинусовата теорема за $\Delta C\Omega_c M$ се получава равенството

$$(11) \qquad C\Omega_c^2 = R_c^2 + 4R^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\sin\alpha\sin\beta\sqrt{R_c^2 - R^2\sin\gamma}\,.$$

Ако $\Omega_c \equiv M$, то $R_c = \frac{c}{2}$ и подкоренната величина в (7) е равна на нула. Освен това от (8), (9) и синусовата теорема за ΔABC следва $C\Omega_c^2 = CM^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = R_c^2 + 4R^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$. Следователно равенството (11) е в сила и когато $\Omega_c \equiv M$. Трябва да се отбележи и случаят, при който $\Omega_c \equiv C$. Това означава, че равенството (11) е изпълнено при всички положения на Ω_c в равнината на ΔABC.

8) Нека $\measuredangle IC\Omega_c = \varphi$. Тогава $\measuredangle O_cC\Omega_c = \varphi$, ако точката O_c лежи в $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle O_cC\Omega_c = \pi - \varphi$, ако точката O_c лежи в ъгъла, противоположен на $\measuredangle ACB$. От косинусовата теорема за триъгълниците $CI\Omega_c$ и $CO_1\Omega_c$ се получават съответно равенствата $I\Omega_c^2 = CI^2 + C\Omega_c^2 - 2.CI.C\Omega_c^2.\cos\varphi$ и $O_c\Omega_c^2 = CO_1^2 + C\Omega_c^2 - 2.\varepsilon'.CO_1.C\Omega_c\cos\varphi$, където $\varepsilon' = 1$, ако $\measuredangle O_cC\Omega_c = \varphi$ и $\varepsilon' = -1$, ако $\measuredangle O_cC\Omega_c = \pi - \varphi$. След елиминиране на $\cos\varphi$ от последните равенства получаваме

$$(12) \qquad CI.O_c\Omega_c^2 - \varepsilon'.CO_c.I\Omega_c^2 = \left(C\Omega_c^2 - \varepsilon'.CO_c.CI\right)\left(CI - \varepsilon'.CO_c\right).$$

9) Разстоянието между O_c и Ω_c се намира по формулата

(13) $\quad O_c\Omega_c = R_c + \varepsilon''.\rho_c$, където $\varepsilon'' = 1$, когато k_c се допира външно до Γ_c, и $\varepsilon'' = -1$, когато k_c се допира вътрешно до Γ_c.

Заместваме (1), (5), (7), (11) и (13) в (12) и след известни преобразувания получаваме равенството

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\rho_c^2-\varepsilon'\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(r\cos^2\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}T\right)+2\varepsilon'\varepsilon''R_c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\right]\rho_c+$$

$$+r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(r\cos\gamma-T\right)=0,$$

където $T=\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{16R_c^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}-r^2\sin^2\gamma}$.

С това лемата е напълно доказана.

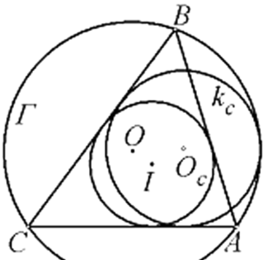
3. Полувписани окръжности, допиращи се до описаната окръжност на триъгълника. Общността, която се съдържа във формулировката на лемата, позволява в теорема 1 да заменим правоъгълния триъгълник с произволен. Тогава в лемата имаме $\Gamma_c\equiv\Gamma$, $\Omega_c\equiv O$, $R_c=R$, $\varepsilon_1=\varepsilon'=1$, $\varepsilon''=-1$. От (5) получаваме, че $T=r.\varepsilon_2.\left|\cos\gamma\right|=r.\cos\gamma$. Сега от лемата след елементарни преобразувания следва равенството $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\rho_c^2-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.r\rho_c=0$. Единственото решение на това уравнение, което има геометричен смисъл, е $\rho_c=\frac{r}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$. Така получаваме обобщение на теорема 1, което е съдържанието на следната

Теорема 5. *Ако ABC е произволен триъгълник, а окръжността k_c с радиус ρ_c се допира до страните AC и BC и вътрешно до описаната около ΔABC окръжност Γ , то е изпълнено равенството* $\rho_c=\frac{r}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$ (фиг. 6). (Ненков, 1991).

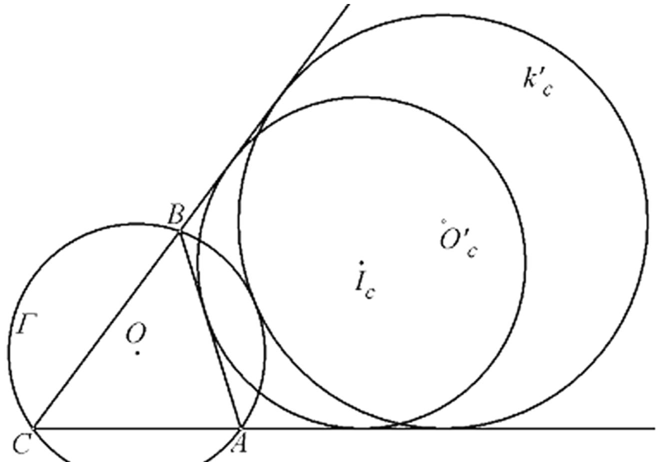
Ако в теорема 5 заменим вътрешнодопиращата се до Γ окръжност $k_c\left(O_c,\rho_c\right)$ с външнодопираща се окръжност $k_c'(O_c',\rho_c')$, в лемата имаме $\Gamma_c\equiv\Gamma$, $R_c=R$, $\varepsilon_1=\varepsilon'=\varepsilon''=1$. От (5) отново получаваме, че $T=r.\varepsilon_2.\left|\cos\gamma\right|=r.\cos\gamma$

Сега от лемата след елементарни преобразувания следва равенството $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\rho_c'^2-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.r\rho_c'=0$. Като вземем предвид, че е изпълнено равенството $r_c=r.ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}$, получаваме $\cos^2\frac{\gamma}{2}\rho_c'^2-r_c.\rho_c'=0$. Единственото решение на това уравнение, което има геометричен смисъл, е $\rho_c'=\frac{r_c}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$. Така получаваме и следната

Теорема 6. *Ако* ABC *е произволен триъгълник, а окръжността* k_c' *с радиус* ρ_c' *се допира до раменете на* $\measuredangle ACB$ *и външно до описаната около* ΔABC *окръжност* Γ *, то е изпълнено равенството* $\rho_c' = \dfrac{r_c}{\cos^2 \dfrac{\gamma}{2}}$ (фиг. 7). (Ненков, 1991).



Фигура 6



Фигура 7

От теорема 6 при $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ и $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ се получават съответно равенствата $\rho_c' = 2.r_c$ и $\rho_c' = \dfrac{4}{3} r_c$. Първото от тези равенства е аналог на теорема 1.

4. Полувписани окръжности, породени от върхови секущи на триъгълника. Втората японска теорема се отнася до окръжност, която е полувписана в $\Delta BC'A$, който, от своя страна, е част от дадения ΔABC. Допълнението на $\Delta BC'A$ до ΔABC е равнобедреният триъгълник $CC'B$, за който $\measuredangle BCC' = \pi - 2\gamma$. Тук можем да разгледаме по-общия случай, в който $\measuredangle BCC' = \omega$ и $0 \le \omega < \beta$. Тогава ъглите на $\Delta BC'A$ са $\measuredangle C'AB = \alpha$, $\measuredangle ACC' = \beta - \omega$ и $\measuredangle BC'C = \gamma + \omega$.

Означаваме вписаната в $\Delta BC'A$ окръжност с $k(\omega)$, а нейния радиус с $\rho(\omega)$. Разглеждаме окръжностите $k_c(\omega)$ и $k_c'(\omega)$, допиращи се съответно вътрешно и външно до Γ и до раменете на $\measuredangle AC'B$ (фиг. 8, 9). Радиусите на $k_c(\omega)$ и $k_c'(\omega)$ означаваме съответно с $\rho_c(\omega)$ и $\rho_c'(\omega)$.

От синусовата теорема за $\Delta BC'A$ се получават равенствата $C'A=\dfrac{\sin(\beta-\omega)}{\sin(\gamma+\omega)}.c$, $BC'=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\gamma+\omega)}.c$. Освен това от синусовата теорема за ΔABC имаме $c=2R\sin\gamma$.

От тези три равенства за полупериметъра $p'=\dfrac{BC'+C'A+AB}{2}$ на $\Delta BC'A$ намираме $p'=2R\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\omega}{2}\sin\gamma}{\sin\frac{\gamma+\omega}{2}}$. От друга страна, от геометрията на триъгълника е известно, че за p' е изпълнено равенството $p'=\rho(\omega)ctg\dfrac{\alpha}{2}ctg\dfrac{\beta-\omega}{2}ctg\dfrac{\gamma+\omega}{2}$. Сега от последните две равенства получаваме

$$(14)\qquad R=\frac{\rho(\omega).\cos\frac{\gamma+\omega}{2}}{2\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Прилагаме лемата за $\Delta BC'A$ при $\Gamma_c\equiv\Gamma$, $\Omega_c\equiv O$, $R_c=R$, $r=\rho(\omega)$. От (5) и (14) получаваме, че $T=\varepsilon_1.\varepsilon_2.\rho(\omega)\sin(\gamma+\omega)\left|ctg\gamma\right|=\rho(\omega)\sin(\gamma+\omega)ctg\gamma$. Разглеждаме случаите за окръжностите $k_c(\omega)$ и $k_c'(\omega)$ едновременно. Затова с t ще означаваме общо радиусите на тези окръжности. Сега заместваме в $(*)$ и след елементарни преобразувания получаваме квадратното относно t уравнение

$$(15)\qquad \begin{aligned}&\sin\frac{\beta-\omega}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\gamma\cos^2\frac{\gamma+\omega}{2}t^2-\\&-\varepsilon'\cos\frac{\gamma+\omega}{2}\left(\cos\frac{\beta-\alpha-\omega}{2}.\sin\frac{\gamma-\omega}{2}+\varepsilon'\varepsilon''\sin^2\frac{\gamma+\omega}{2}\right)\rho(\omega)t-\\&-\cos\frac{\beta-\omega}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\omega\rho(\omega)=0.\end{aligned}$$

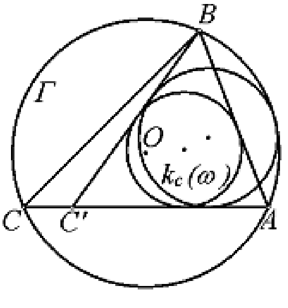
Сега да отбележим, че са изпълнени следните равенства:

$$(16)\qquad \begin{aligned}&\cos\frac{\beta-\alpha-\omega}{2}.\sin\frac{\gamma-\omega}{2}-\sin^2\frac{\gamma+\omega}{2}=\\&=2.\left(\sin\frac{\beta-\omega}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\omega}{2}-\cos\frac{\beta-\omega}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

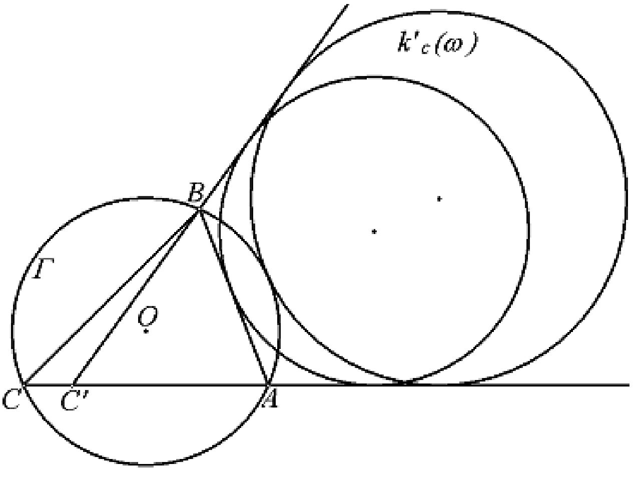
$$(17)\qquad \begin{aligned}&\cos\frac{\beta-\alpha-\omega}{2}.\sin\frac{\gamma-\omega}{2}-\sin^2\frac{\gamma+\omega}{2}=\\&=2.\left(\cos\frac{\beta-\omega}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\beta-\omega}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right).\end{aligned}$$

За окръжността $k_c(\omega)$ имаме $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = -1$ и $t = \rho_c(\omega)$. Като вземем предвид равенството (16), установяваме, че единственото решение на уравнението (15), което има геометричен смисъл, е $\rho_c(\omega) = \dfrac{\rho(\omega)\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\omega}{2}}$. Така получаваме обобщение на теорема 1, което е съдържанието на следната

Теорема 7. *Точката C' от страната CA на ΔABC е такава, че $\measuredangle CBC' = \omega$ $(0 \le \omega < \beta)$. Окръжността $k_c(\omega)$ с радиус $\rho_c(\omega)$ се допира до раменете на $\measuredangle BC'A$ и вътрешно до описаната около ΔABC окръжност Γ. Ако радиусът на вписаната в $\Delta ABC'$ окръжност е $\rho(\omega)$, то е изпълнено равенството* $\rho_c(\omega) = \dfrac{\rho(\omega)\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\omega}{2}}$ (фиг. 8).



Фигура 8



Фигура 9

За окръжността $k'_c(\omega)$ имаме $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = 1$ и $t = \rho'_c(\omega)$. Като вземем предвид равенството (17), установяваме, че единственото решение на уравнението (15), което има геометричен смисъл, е

$$\rho'_c(\omega) = \frac{\rho(\omega)ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta-\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\omega}{2}}.$$

Ако радиусът на външновписаната за $\Delta ABC'$ окръжност, която се допира до страната му AB, е $\bar{\rho}(\omega)$, то от геометрията на триъгълника е известно, че $\bar{\rho}(\omega)=\rho(\omega)ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta-\omega}{2}$. Така получаваме следната

Теорема 8. *Точката* C' *от страната* CA *на* ΔABC *е такава, че* $\measuredangle CBC'=\omega$ $\left(0\le\omega<\beta\right)$. *Окръжността* $k_c'(\omega)$ *с радиус* $\rho_c'(\omega)$ *се допира до раменете на* $\measuredangle BC'A$ *и външно до описаната около* ΔABC *окръжност* Γ. *Ако радиусът на външновписаната за* $\Delta ABC'$ *окръжност, която се допира до страната му* AB, *е* $\bar{\rho}(\omega)$, *то е изпълнено равенството* $\rho_c'(\omega)=\dfrac{\bar{\rho}(\omega)\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\omega}{2}}$ (фиг. 9).

Сега теорема 2 лесно се получава като частен случай на теорема 7 при $\omega=\pi-2\gamma$. Интересно е обаче да се отбележи, че има друг случай, в който $\Delta CC'B$ е равнобедрен. Това се случва, когато $CC'=BC'$, т.е. когато $\measuredangle CBC'=\omega=\gamma$. В този случай от теорема 7 получаваме следното

Следствие 1. *Ако* C' *е такава точка от страната* CA, *че* $BC'=BC$, *то* $\rho_c(\omega)=\dfrac{\rho(\omega)}{\cos\gamma}$.

Аналогично от теорема 8 се получават аналози на теорема 2 и следствие 1, които формулираме по следния начин.

Следствие 2. *Ако* C' *е такава точка от страната* CA, *че* $BC'=BC$, *то* $\rho_c'(\omega)=2\bar{\rho}(\omega)$.

Следствие 3. *Ако* C' *е такава точка от страната* CA, *че* $CC'=BC'$, *то* $\rho_c'(\omega)=\dfrac{\bar{\rho}(\omega)}{\cos\gamma}$.

Освен формулираните следствия трябва да се отбележи, че теореми 5 и 6 се получават като частни случаи съответно на теореми 7 и 8 при $\omega=0$.

5. Няколко връзки между допиращи се полуописани и полувписани окръжности. Като се вземе предвид особеното положение на върха C в теорема 4, тя може се включи в един от случаите на основната лема. Това ни дава основание да обобщим теорема 4 и за останалите случаи, които не присъстват в нейната формулировка. Обобщението на Сангаку теоремата изглежда по следния начин:

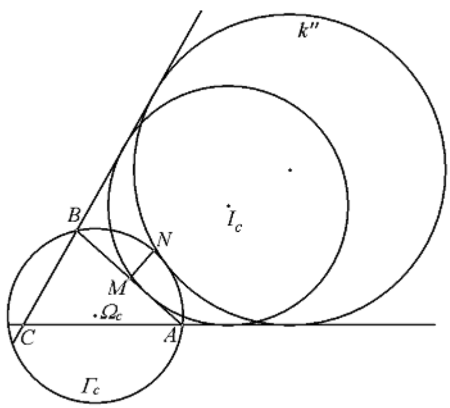
Теорема 9. *Окръжността Γ_c минава през върховете A и B на ΔABC така, че върхът C да лежи вътре в Γ_c. Точката M е средата на $\measuredangle AB$, а точката N е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, като $MN = d$. Тогава*

а) ако окръжността k' с радиус x се допира до раменете на ACB и вътрешно до Γ_c, то $x = r + \dfrac{2d(p-a)(p-b)}{cp}$ (фиг. 3)*;*

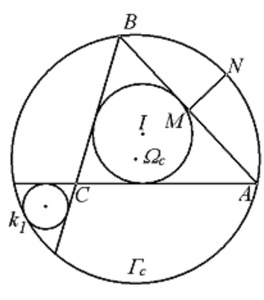
б) ако окръжността k'' с радиус y се допира до раменете на $\measuredangle ACB$ и външно до Γ_c, то $y = r_c + \dfrac{2d(p-a)(p-b)}{c(p-c)}$ (фиг. 10)*;*

в) ако окръжността k_1 с радиус u се допира до раменете на ъгъла, противоположен на $\measuredangle ACB$, и вътрешно до Γ_c, то $u = -r + \dfrac{c(p-a)(p-b)}{2dp}$ (фиг. 11)*;*

г) ако окръжността k_2 с радиус v се допира до раменете на ъгъла, противоположен на $\measuredangle ACB$, и външно до Γ_c, то $v = -r_c + \dfrac{c(p-a)(p-b)}{2d(p-c)}$ (фиг. 12).



Фигура 10



Фигура 11

От метричната зависимост между пресичащи се хорди в окръжност, приложена за диаметъра през M и хордата AB в окръжността Γ_c, се получава равенството

$R_c = \dfrac{c^2+4d^2}{8d}$ (фиг. 3).

Оттук и синусовата теорема за ΔABC следва $R_c = \dfrac{R\sin^2\gamma + d^2}{2d}$.

Сега за израза T в лемата намираме

$T = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2\left|R^2\sin\gamma - d^2\right|r}{2Rd} = \dfrac{\left(R^2\sin\gamma - d^2\right)r}{2Rd}$.

Ще използваме t като общо означение за радиусите x и v на окръжностите k' и k_2. Заместваме намерените изрази за R_c, T и $\varepsilon'.\varepsilon''=-1$ в $(*)$ и след елементарни преобразувания получаваме квадратното относно t уравнение

$$2Rd\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}t^2 -$$

$$-\varepsilon'.r.\left[d\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(d+2R\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)+2R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\left(d-2R\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\right]t+$$

$$+r^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(d+2R\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(d-2R\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)=0.$$

Решенията на това уравнение са следните: $t_1 = \varepsilon'\left(r + \dfrac{rd}{2R\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$ и

$t_2 = \varepsilon'\dfrac{r}{d}ctg\dfrac{\alpha}{2}ctg\dfrac{\beta}{2}\left(d-2R\sin^2\dfrac{\gamma}{2}\right) = \varepsilon'\dfrac{r_c}{d}\left(d-2R\sin^2\dfrac{\gamma}{2}\right)$ (тъй като $r.ctg\dfrac{\alpha}{2}ctg\dfrac{\beta}{2}=r_c$).

Ако N' е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от описаната за ΔABC окръжност Γ , то $d' = MN' > MN = d$ и $d' = \dfrac{c}{2}tg\dfrac{\gamma}{2}$ (C лежи в Γ_c). Тогава $d-2R\sin^2\dfrac{\gamma}{2} = d-d' < 0$. Когато $\varepsilon'=1$, получаваме, че $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$. Следователно вътрешнодопиращата се до Γ_c окръжност k' има радиус $x=t_1$. Като вземем предвид формулите на Ойлер, изразяващи тригонометричните функции на ъглите на ΔABC чрез страните му, и равенството (5), получаваме $x = r + \dfrac{2d(p-a)(p-b)}{cp}$. Когато $\varepsilon'=-1$, получаваме, че $t_1 < 0$ и $t_2 > 0$. Следователно външнодопиращата се до Γ_c окръжност k_2 има радиус $y=t_2$. Както в предишния случай получаваме $v = -r_c + \dfrac{c(p-a)(p-b)}{2d(p-c)}$. Така доказахме твърдения а) и г) на теорема 9.

Нека сега z е общо означение за радиусите y и u на окръжностите k'' и k_1. Заместваме изразите за R_c, T и $\varepsilon'.\varepsilon''=1$ в $(*)$ и след елементарни преобразувания получаваме квадратното относно z уравнение

Корените на това уравнение са следните

$$z_1=\varepsilon'\left(r-\frac{rR\sin^2\frac{\gamma}{2}}{2d}\right) \text{ и } z_2=\varepsilon' r.ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}\left(1+\frac{d}{2R\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right)=\varepsilon'\left(r_c+\frac{drctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}}{2R\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right).$$

Както в предишния случай намираме, че ако $\varepsilon'=-1$, то $u=z_1=-r+\frac{c(p-a)(p-b)}{2dp}$, а при $\varepsilon'=1$ имаме $y=z_2=r_c+\frac{2d(p-a)(p-b)}{c(p-c)}$.

С това теорема 9 е напълно доказана, като нейното твърдение а) съвпада с теорема 3.

6. Доказателство на теорема 4. Сега, като използваме основно съдържанието на две от твърденията на теорема 9, ще покажем едно доказателство на Сангаку твърдението, формулирано в началото като теоремата 4.

Пресечната точка на хордите AC и BD означаваме с E (фиг. 3). Нека p_{ab} и p_{cd} са полупериметрите съответно на триъгълниците ABE и CDE. Освен това с d_{ab} означаваме разстоянието между средата на по-малката дъга $\overset{\frown}{AB}$ и средата на отсечката AB, а с d_{cd} – разстоянието между средата на по-малката дъга $\overset{\frown}{CD}$ и средата на отсечката CD.

От твърдения а) и в) на теорема 9, приложени към ΔABE, следват съответно равенствата: $r_3=r_1+\frac{2.d\left(p_{ab}-|BE|\right)\left(p_{ab}-|AE|\right)}{c.p_{ab}}$ и $r_4=-r_1+\frac{c.\left(p_{ab}-|BE|\right)\left(p_{ab}-|AE|\right)}{2.d.p_{ab}}$.

Оттук получаваме, че е изпълнено следното равенство:

$$(r_3-r_1)(r_4+r_1)=\left(p_{ab}-|BE|\right)^2\left(p_{ab}-|AE|\right)^2. \tag{18}$$

Тъй като $\Delta CDE\sim\Delta BAE$, то $\frac{|CE|}{|BE|}=\frac{|DE|}{|AE|}=\frac{|CD|}{|AB|}=\frac{p_{cd}}{p_{ab}}=\frac{r_2}{r_1}$.

Сега твърдения а) и в) на теорема 9, приложени към ΔCDE, водят съответно до равенствата:

$$r_3=-r_2+\frac{|CD|\left(p_{cd}-|CE|\right)\left(p_{cd}-|DE|\right)}{2d'p_{cd}}=-r_2+\frac{r_2^2\left(p_{ab}-|AE|\right)\left(p_{ab}-|BE|\right)}{r_1^2d'p_{ab}},$$

$$r_4=r_2+\frac{2d'\left(p_{cd}-|CE|\right)\left(p_{cd}-|DE|\right)}{|CD|\,p_{cd}}=r_2+\frac{d'r_2^2\left(p_{ab}-|AE|\right)\left(p_{ab}-|BE|\right)}{2r_1^2p_{ab}}.$$

От последните две равенства получаваме следната зависимост:

$$(19)\qquad (r_4 - r_2)(r_3 + r_2) = \frac{r_2^2}{r_1^2}\left(p_{ab} - |BE|\right)^2\left(p_{ab} - |AE|\right)^2.$$

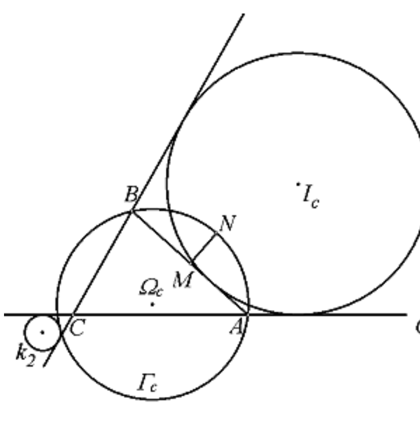
След почленно деление на (19) и (18) се получава $r_1^2(r_4 - r_2)(r_3 + r_2) = r_2^2(r_4 + r_1)(r_3 - r_1)$. След известни преобразувания на последното равенство получаваме $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$.

С това теорема 4 е доказана с помощта на теорема 9.

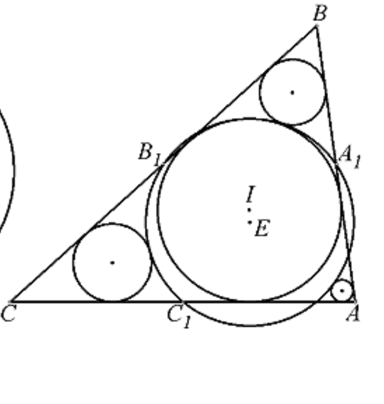
7. Полувписани окръжности, допиращи се до Ойлеровата окръжност на триъгълника. Сега ще разгледаме едно твърдение, което е в стила на теоремите Сангаку. В него основната лема се прилага три пъти. Това твърдение се формулира по следния начин.

Теорема 10. *Ако всяка от трите окръжности* $k_a(\rho_a)$, $k_b(\rho_b)$, $k_c(\rho_c)$ *се допира до две от страните на* ΔABC *и външно до Ойлеровата му окръжност* (фиг. 13)*, то е изпълнено равенството:*

$$(20)\qquad \sqrt{(r - 2\rho_b)(r - 2\rho_c)} + \sqrt{(r - 2\rho_c)(r - 2\rho_a)} + \sqrt{(r - 2\rho_a)(r - 2\rho_b)} = r.$$



Фигура 12



Фигура 13

Нека точките A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на страните BC, CA и AB

(фиг. 13), а $k_c\left(\rho_c\right)$ се допира до страните AC и BC. Прилагаме лемата за ΔA_1B_1C, Ойлеровата окръжност на ΔABC и $k_c\left(\rho_c\right)$. Тъй като ΔA_1B_1C е хомотетичен на ΔABC с коефициент на хомотетия $-\frac{1}{2}$, то в лемата заместваме α, β, γ, R_c и r съответно с α, β, γ, $\frac{R}{2}$ и $\frac{r}{2}$. Освен това, тъй като $\gamma<\frac{\pi}{2}$ и $k_c\left(\rho_c\right)$ се допира до Ойлеровата окръжност на ΔABC, то $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=\varepsilon'=\varepsilon''=1$. Сега от равенството $(*)$ след известни преобразувания получаваме

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\rho_c^2-\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\gamma\right)r\rho_c+r^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\gamma=0$$

В това равенство заместваме $r=r_c.tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}$ и го преобразуваме до следното равенство:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\rho_c^2-\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\gamma\right)r_c\rho_c+r_c^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\gamma=0$$

Последното равенство, разглеждано като уравнение относно ρ_c, има следните решения: $\rho_c'=r_c$ и $\rho_c''=\dfrac{r_ctg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}\cos\gamma}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{\cos\gamma}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}.r$.

Следователно съществуват две окръжности $k'\left(\rho_c'\right)$ и $k_c''\left(\rho_c''\right)$, допиращи се до раменете на $\measuredangle ACB$ и външно до Ойлеровата окръжност на ΔABC.

Тъй като $\rho_c'=r_c$, то $k'\left(\rho_c'\right)$ е външновписана окръжност за ΔABC, която се допира до продълженията на страните AC и BC. Следователно $k_c\left(\rho_c\right)\neq k_c'\left(\rho_c'\right)$. (Току-що показахме, че външновписаната окръжност ΔABC, допираща се до страната му AB, се допира до Ойлеровата окръжност на ΔABC. По същия начин при $\varepsilon''=-1$ се показва, че вписаната в ΔABC окръжност също се допира до Ойлеровата окръжност на ΔABC. Така получаваме още едно доказателство на известната теорема на Фойербах, която твърди, че вписаната и външновписаните окръжности на даден триъгълник се допират до Ойлеровата окръжност на ΔABC.)

От друга страна, тъй като $\dfrac{\cos\gamma}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}=1-tg^2\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{2\rho_c''}{r}$, то $2\rho_c''<r$, т.е. $k_c''\left(\rho_c''\right)$ се съдържа в криволинейния триъгълник, образуван от страните AC и BC и вписаната окръжност $k(r)$. Следователно $k_c\left(\rho_c\right)\equiv k_c''\left(\rho_c''\right)$ и $\rho_c\equiv\rho_c''$, т.е. $\rho_c=\dfrac{\cos\gamma}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}.r$. (Ако $\gamma>\frac{\gamma}{2}$ и $k_c\left(\rho_c\right)$ е окръжността, допираща се до раменете на ъгъла, противоположен на $\measuredangle ACB$ и вътрешно до Ойлеровата окръжност на ΔABC, то по същия начин се показва, че $\rho_c = -\dfrac{\cos\gamma}{2\cos^2\dfrac{\gamma}{2}}.r$.)

Сега от израза за ρ_c получаваме $tg^2\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r-2\rho_c}{r}$.

Ако $k_a\left(\rho_a\right)$ се допира до страните CA и BA, а $k_b\left(\rho_b\right)$ се допира до страните AB и CB, то по аналогичен начин се получават равенствата $tg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r-2\rho_a}{r}$, $tg^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r-2\rho_b}{r}$.

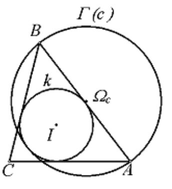
Сега, като използваме равенството $tg\dfrac{\alpha}{2}tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\beta}{2}tg\dfrac{\gamma}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2}tg\dfrac{\alpha}{2} = 1$, получаваме

$$\sqrt{\left(r-2\rho_b\right)\left(r-2\rho_c\right)} + \sqrt{\left(r-2\rho_c\right)\left(r-2\rho_a\right)} + \sqrt{\left(r-2\rho_a\right)\left(r-2\rho_b\right)} = r .$$

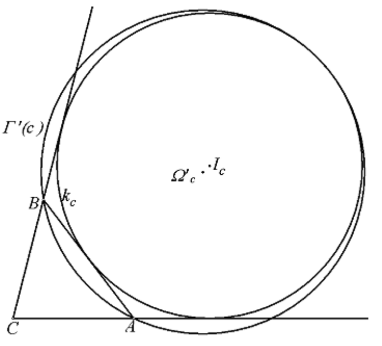
8. Полуописани окръжности, допиращи се до вписаната окръжност на триъгълника. Сега ще покажем как се получават някои зависимости между радиуси на допиращи се окръжности с частично използване на лемата. Поточно, като използваме част от доказателството ѝ, ще покажем, че е в сила следната

Теорема 11. *Ако окръжност* Γ_c *с радиус* R_c *минава през върховете* A *и* B *на* ΔABC *и се допира до вписаната окръжност* $k(r)$ (фиг. 14)*, то е изпълнено равенството*

$$R_c = \frac{r\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\beta}{2} + \cos^2\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha.\sin\beta}$$



Фигура 14



Фигура 15

От пункт 5) е известно, че разстоянието между центровете I и Ω_c на окръжностите $k(r)$ и $\Gamma_c(\Omega_c)$ се намира чрез равенството (7). Тъй като $k(r)$ се допира вътрешно до $\Gamma_c(\Omega_c)$, то е изпълнено равенството $|I\Omega_c| = R_c - r$. Сега от (7) следва $(R_c - r)^2 = r^2 + R_c^2 - (p-a)(p-b) - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 r\sqrt{R_c^2 - R^2\sin^2\gamma}$, което е еквивалентно с равенството $2r.R_c - (p-a)(p-b) = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 r\sqrt{R_c^2 - R^2\sin^2\gamma}$. След използване на (4) последното се преобразува в $2r.R_c - rctg\dfrac{\alpha}{2}ctg\dfrac{\beta}{2} = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 r\sqrt{R_c^2 - R^2\sin^2\gamma}$. След повдигане в квадрат на двете страни на това равенство и извършване на някои преобразувания получаваме $R_c = \dfrac{r\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\beta}{2} + \cos^2\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha.\sin\beta}$. С това теорема 11 е доказана.

По аналогичен начин се получава и следната

Теорема 12. *Ако окръжност* Γ_c' *с радиус* R_c' *минава през върховете* A *и* B *на* ΔABC *и се допира до външновписаната окръжност* $k_c(r_c)$ (фиг. 15), *то е изпълнено равенството*

$$R_c' = \frac{r_c\left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\beta}{2} + \cos^2\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha.\sin\beta}.$$

9. Заключение. С разгледаните теореми показахме един общ подход за доказване на твърдения, които са подобни на тези теореми. Разбира се, разгледаните теореми могат да се докажат и по други начини. Няколко доказателства на теорема 1 се съдържат в (Табов, 1990а), а доказателства на теореми 2, 3 и 4, различни от приведените по-горе, се съдържат съответно в (Михайлов, 1999), Цеков, 2000) и (Антонов, 2000).

Тъй като лемата описва всички случаи, в които могат да попаднат разглежданите окръжности, нейната формулировка изглежда много сложна. Но в конкретна ситуация може да се приложи само онази нейна част, която е подходяща за случая. Основното е, че в лемата е разработена една обща идея за доказване на определен вид задачи. Също така, както е показано в теореми 11 и 12, могат да се използват елементи от доказателството на лемата при решаването на някои задачи.

ЛИТЕРАТУРА

Антонов, А. (2000). Мозайка от два триъгълника и пет окръжности. *Математика и информатика, (4)*, 75 – 78.

Михайлов, Б. (1999). Решение на задачата от кн. 2, 1998. *Математика и информатика, (2)*, 79.

Ненков, В. (1991). Отношение на радиусите на две окръжности. *Обучението по математика и информатика, (1)*, 63 – 64.

Табов, Й. (1990). Задачата на броя. *Обучението по математика и информатика, (1)*.

Табов, Й. (1990 а). Общ коментар на решенията на задачата от брой 1, 1990 г. О*бучението по математика и информатика, (1)*, 61 – 62.

Табов, Й. (1998). Задачата на броя. *Математика и информатика, (2)*.

Табов, Й. (1999). Задачата на броя. *Математика и информатика, (3).*

Табов, Й. (1999 а). Задачата на броя. *Математика и информатика, (4)*.

Цеков, В. (2000). За задачата на брой 3, 1999. *Математика и информатика, (2 – 3),* 108 – 109.

Grozdev, S., V. Nenkov (2010). Two Remarkable Points of the Triangle Geometry. *Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications (REMIA 2010), Proceedings of the Anniversary International Conference Dedicated to the 40-th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University, 10 – 12 December, 2010,* Plovdiv, 349 – 354.

REFERENCE

Antonov, A. (2000). Mozayka ot dva triagalnika i pet okrazhnosti. *Matematika i informatika*, (4). 75 – 78.

Mihaylov, B. (1999). Reshenie na zadachata ot kn. 2, 1998. *Matematika i informatika*, (2). 79.

Nenkov, V. (1991). Otnoshenie na radiusite na dve okrazhnosti. *Obuchenieto po matematika i informatika*, (1), 63 – 64.

Tabov, Y. (1990). Zadachata na broya. *Obuchenieto po matematika i informatika*, (1).

Tabov, Y. (1990 a). Obsht komentar na resheniyata na zadachata ot broy 1, 1990 g. *Obuchenieto po matematika i informatika*, (1), 61 – 62.

Tabov, Y. (1998). Zadachata na broya. *Matematika i informatika* (2).

Tabov, Y. (1999). Zadachata na broya. *Matematika i informatika* (3).

Tabov, Y. (1999 a). Zadachata na broya. *Matematika i informatika* (4).

Tsekov, V. (2000). Za zadachata na broy 3, 1999. *Matematika i informatika*, (2 – 3), 108 – 109.

Grozdev, S., V. Nenkov (2010). Two Remarkable Points of the Triangle Geometry. Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications (REMIA 2010), *Proceedings of the Anniversary International Conference Dedicated to the 40-th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University, 10-12 December, 2010*, Plovdiv, 349 – 354.

A GENERAL APPROACH TO ESTABLISH RELATIONS AMONG THE RADII OF TANGENT CIRCLES

Abstract. A general idea is considered to establish relations among the radii of tangent circles in the plane of a given triangle. The idea is based on Euler's formula for the distance between the radii of the circum-circle and the in-circle of the triangle and also on some other relations between the radii in question. The main results are unified in the formulation of a corresponding lemma.

⌧**Prof. Sava Grozdev, DSc**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
Gusla Street, 1
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

⌧**Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg