

ОБОСНОВАВАНЕТО КАТО ОСНОВА НА ДОКАЗВАНЕ И РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Петър Петров

Тракийски университет – Стара Загора

Резюме. Дейността обосноваване се разглежда като предпоставка (пропеедвтика) на доказването. Цел на изследователската работа е да се разкрие същността на обосноваването като пропеедвтика на доказването, да се представят някои негови особености и да се открият степените на обосноваването при усвояване на методи за решаване на задачи. Целесъобразно е далечна пропеедвтика на понятието определение и на дейността доказване още в началните класове. Където е възможно, обясненията на някои понятия да се доближават до структурата на формалнологическото определение, както и учениците да се учат да убеждават и да получават едни резултати от други на базата на разсъждения, т.е. да обосновават. Представянето на решенията и степента на обосноваването зависят от особеностите на интелектуалното развитие на детето за съответната възраст.

Keywords: justification; proof; mathematics training

Дейността обосноваване се разглежда като предпоставка (пропеедвтика) на доказването (Ganchev, 1996: 113). Интерес да развием възгледа си по този проблем, намираме и в изследванията на Даниел Канеман (Нобелов лауреат по икономика за 2002 г.). Обособява две системи на мисленето – система 1 (основаваща се на минал опит и емоции), система 2 (логика), и описва тяхното функциониране и взаимодействие. Той изследва особеностите на вземането на решения в икономически организации при неяснота на резултатите (прогнозите) и проявата на оптимистична склонност (Kaneman, 2012: 624).

1. Обосноваването като пропеедвтика на доказването и решаване на задачи в I – IV клас

Съдържанието на обучението в I – IV клас е съобразено с възрастовите особености на децата и има достъпен и развиващ характер. То е мобилна и икономична основа за по-нататъшно обучение. Учебният предмет „Математика“ в началните класове има комплексен характер. Интегрира аритметич-

ни, геометрични и алгебрични знания, като водещо е аритметичното знание, при което акцентът е усвояването на естествените числа и действията с тях. Знанията се излагат чрез примери на теоретикомножествена основа (в неявен вид) без доказателство, докато отличителната черта на математиката е нейната дедуктивна структура.

Дедуктивната структура на дадена математическа теория се определя от нейната аксиоматика (първични понятия, аксиоми) и въведените правила за извод. Първичните понятия не се определят с други (добре познати), но по косвен път донякъде се изясняват с аксиомите, които са твърдения, приети за верни, без да се доказват. За да се разреши това противоречие, е целесъобразно далечна пропедевтика на понятието *определение* и на дейността *доказване* още в началните класове. Където е възможно, обясненията на някои понятия да се доближават до структурата на формалнологическото определение, както и учениците да се учат да убеждават и да получават едни резултати от други на базата на разсъждения, т.е. да обосновават.

За методиката на обучението по математика важен елемент от учебното съдържание са задачите и техните решения (в смисъл на последователност от разсъждения). Представянето на решенията и степента на обосноваването зависят от особеностите на интелектуалното развитие на детето за съответната възраст.

Най-често срещани са определенията, при които се посочват родовият белег и видовата отлика. Такова определение се нарича *формалнологическо* и има следната структура:

определяемо понятие (ОП) = родово понятие (РП) + видова отлика (ВО).

В математиката се използват и други видове определения – например *генетически* или *индуктивни* или чрез *абстракция*.

От гледна точка на видовите понятия Здр. Лалчев (Lalchev, 1997: 75) анализира двата дидактически подхода при формиране на математически понятия: конкретно индуктивен и абстрактно дедуктивен подход. Авторът чрез достатъчно аргументи обосновава тезата, че конкретно индуктивният подход може да бъде с висока степен на абстрактност – например при изучаване на понятието *естествено число*.

Нека разгледаме някои постановки от теорията на задачите, за да развием възгледа си за обосноваването.

Под задача разбираме „знаков модел на проблемна ситуация“ (Fridman). Да решим една задача, означава да построим последователност от разсъждения, при които от условието получаваме заключението и убеждаваме другите в нейната вярност. Тогава обосноваването, като дейност, се осъществява при доказване на твърдения и при решаване на задачи – като последователност от разсъждения.

Да разгледаме следната задача.

Задача 1. Внук и дядо отглеждат 46 животни – гълъби и зайци. Тези животни имат 144 крака. Колко са гълъбите и колко са зайците?

Решение 1 (чрез система от уравнения)

Нека x е броят на гълъбите, а y е броят на зайците. Тогава получаваме системата $x + y = 46$ и $2x + 4y = 144$, където неизвестните величини са естествени числа. Като разделим второто уравнение на системата на 2, от полученото уравнение почленно извадим първото уравнение, получаваме равносилната система от уравнения $x + y = 46$ и $y = 26$, откъдето намираме $x = 20$. Следователно системата има единствено решение $x = 20$, $y = 26$.

Решение 2 (чрез евристични аритметични разсъждения)

Нека разгледаме ситуацията, при която броят на гълъбите е равен на броя на зайците и той е 23. Тогава имаме

$23.2 + 23.4 = 46 + 92 = 138$. В този случай сме под 144 крака. Да увеличим с 1 онова, което се умножава по 4. Тогава

$22.2 + 24.4 = 44 + 96 = 140$. Прилагаме аналогични разсъждения и последователно получаваме

$$21.2 + 25.4 = 42 + 100 = 142.$$

$$20.2 + 26.4 = 40 + 104 = 144.$$

Ако увеличим броя на зайците от 26 нагоре и с толкова намалим гълъбите, то броят на краката ще е по-голям от 144.

Ако намалим броя на зайците от 26 надолу и с толкова увеличим гълъбите, то броят на краката ще е по-малък от 144.

От последните разсъждения можем да заключим, че решението е единствено. Чрез тях обосноваването се доближава до доказателство.

В теоретичен план е интересно да открием функции и равнища на обосноваването.

2. Посока на разгръщане на обосноваването при доказването и решаване на задачи в училищния курс по математика

Отношението алгоритмично/евристично. Логиката съдник на интуицията (Menchinska).

Стремеж към поддържане на двата процеса и осигуряване на преход от алгоритъм към усет.

В нашите изследвания сме открили важната функция на възприятието в мисленето. „В основата на познавателната активност на човека стои възприятието, насочвано от предусещанията“ (Najser).

Най-важните особености на възприятийно-действените схеми и нагледните идеи в кибернетичен аспект, които могат да се проявят, са:

- нагледните идеи понякога се изразяват много трудно с думи;
- нагледните идеи нямат таван на усъвършенстване в ограничена област;
- нагледните идеи са трудно преносими, но имат висока трайност;

– осъществява се процес на превръщане на методи и идеи за решаване на задачи в нагледни идеи, а от там – и в усет.

В този контекст може да се осъществи по-добро взаимодействие между система 1 и система 2 на мисленето (Kaneman, 2012).

Чрез решаването на следващата задача се опитваме да опишем начина, по който действа нагледна идея. Ще анализираме как обосноваването при решаване на задачи се задълбочава чрез използване на алгоритми и как те вторично се превръщат в усет. Това се осъществява в кибернетичен аспект и в контекста на последната особеност на нагледните идеи, която може би е и най-значима.

Задача 2. Да се намери най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = \frac{|x^2 + x - 2| + |x^2 - x - 2|}{x^2 + 1}.$$

Откриване на решение

Множеството от допустими стойности на функцията е $x \in \mathbb{R}$. Алгоритъмът за изследване на една функция, в частност за намиране на най-голяма стойност, може да се обвърже със следната нагледна идея.

Понятието „непрекъсната функция в интервал“ е възможно да се интерпретира нагледно така: „Една функция е непрекъсната в даден интервал, когато чертаем графиката ѝ, без да вдигаме чертожния инструмент от равнината на чертане“, т.е. тя не прави големи скокове за малки изменения на аргумента, но може да бъде стръмна.

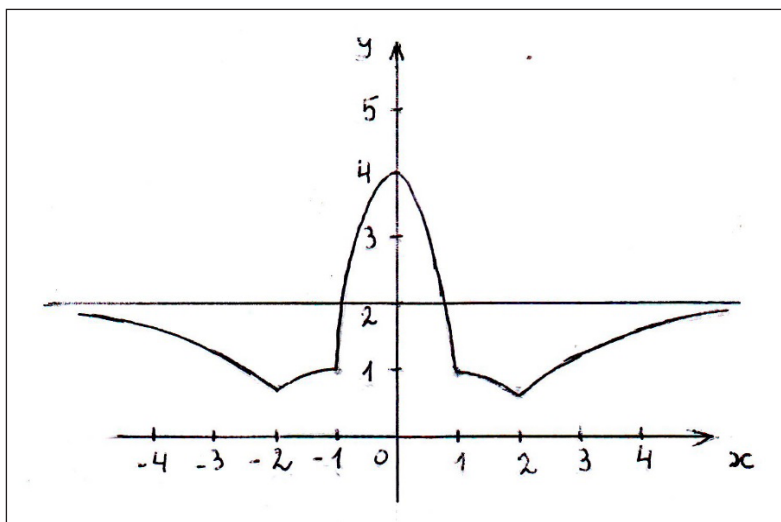
В повечето случаи графиката на една функция в безкрайно множество е приближена, т.е. строим я чрез краен брой характерни точки, които описват в достатъчна степен поведението ѝ. Забелязва се, че:

– функцията $f(x)$ приема положителни стойности за $x \in \mathbb{R}$, т.е. графиката ѝ е разположена над абсцисната ос;

– корените на квадратния тричлен $x^2 + x - 2$ са 1 и -2 , а на $x^2 - x - 2$ са -1 и 2. Когато $x \rightarrow \pm\infty$, тричлените приемат положителни стойности и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$;

– стойността на $f(x)$ за $x = 0$ се пресмята най-лесно и е $f(0) = 4$. Лесно се пресмятат и стойностите на $f(x)$ за корените на квадратните тричлени, тъй като те анулират единия от тях и стойността на числителя на $f(x)$ е цяло число $f(1) = 1$; $f(-2) = \frac{4}{5}$; $f(-1) = 1$; $f(2) = \frac{4}{5}$.

Да се опитаме да построим едно твърде далечно приближение на графиката на $f(x)$ което обаче отразява нагледната идея. Ще чертаем, без да вдигаме чертожния инструмент от равнината на чертане. Получаваме следната



Фигура 1

Сега става нагледно очевидно, че $f(x)$ е четна. Лесно го установяваме, като показваме, че $f(y) = f(-y)$. Нагледно очевидно е, че НГС на $f(x)$ е 4.

Доколко последното е правдоподобно? Опорните точки са твърде близко, така че не се очакват големи скокове за малки изменения на аргумента. И тук е необходимо да си представим конструктивното задаване на $f(x)$ в отделни интервали чрез изрази, които не съдържат модули. Най-общо тези изрази са дробнорационални (където знаменателят е от втора степен, а числителят е от първа или от втора степен). Знаменателят $x^2 + 1$ няма нули, което означава, че функциите, породени от изразите в $\mathbb{R}$, нямат точка на прекъсване, т.е. няма да имат вертикални асимптоти или няма да има стръмно изменение във вертикална посока, характерно например за показателната функция. Аргументите потвърдиха, че с голяма вероятност НГС на $f(x)$ е 4.

Представяме кратък запис на доказателството.

Търсим критичните точки на $f(x)$ където $f(x)$ е зададена конструктивно в интервалите $[0,1], (1,2), [2,\infty)$. Тъй като критичните точки на една функция и нейната противоположна са едни същи, то можем да сведем случаите до два. Търсим критичните точки на функциите

$$f_1(x) = \frac{-2x^2 + 4}{x^2 + 1}, \quad x \in [0, 1] \cup [2, \infty) \text{ и } f_2(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x \in [1, 2]$$

Решаваме уравненията $f_1'(x) = 0$ и $f_2'(x) = 0$ и получаваме съответно $-12x = 0$ и $-2x^2 + 2 = 0$, т.е. критичните точки са 0 и 1. Следователно най-голямата стойност на $f(x)$ е $f(0) = 4$.

Очертават се следните особености на приложението на нагледната идея при решаване на задача 2.

1. Нагледната идея спомага за осмисляне на понятията непрекъснатост и графика на функция и усвояване на схемата за изследване най-вече на дробни функции. Последните разделяме на две основни групи: такива, които имат особеност в знаменателя (графиката прави скок), и такива, които нямат особеност (графиката не прави скок). Тази класификация има добра евристична стойност.

2. Задачите за намиране на най-голяма стойност на изрази и функции в някои случаи могат да се сведат към изследване (отчасти) на функция на една променлива. Когато се използва апаратът на производните, общата схема търпи различни модификации. За този тип задачи са известни и многообразни похвати, при които не се използва апаратът на производните, например: знанията за квадратна функция; ограничеността на някои функции, неравенства между средните; използване на геометрични идеи; използване на множеството от допустими стойности и т.н. С други думи, задачите от този тип имат много добри развиващи функции, а нагледната идея за непрекъснатата функция на една променлива в интервал от реални числа засилва евристичния характер и оптимизира конкретизациите на строгите схеми.

3. Тази нагледна идея намира отражение и в графичния израз на метода на интервалите за решаване на рационални, ирационални неравенства или по-общо при използване на функции за решаване на уравнения и неравенства на една реална променлива.

3. Степени на обосноваване при усвояване на методи за решаване на задачи

Задача 3. Николай има 1 български монети, като най-голямата по стойност е от 20 ст. Винаги ли има между монетите 3, които да са еднакви?

Решение 1. Монетите са от 1, 2, 5, 10 и 20 стотинки. Нека разпределяме единадесетте монети в тези 5 групи последователно така, че да се стремим да няма три в една група. Тогава ще получим в петте групи по 2 монети. Остава една, която трябва да се постави в някоя от петте групи, т.е. ще има тройка.

Решение 2. Нека допуснем, че няма три еднакви монети. Тогава във всяка група има не повече от 2 монети. Следователно в 5 групи има не повече от 10 монети. Но те са 11. Следователно допускането не е вярно, т.е. не е вярно, че няма три еднакви. Следователно има три еднакви монети.

Защо хората не разсъждават логично при решаване на проста логическа задача (задачата на Уилсън). Даниел Канеман (Нобелов лауреат) за слабите прогнози на специалистите по математическа статистика при несложна задача за буквата, появяваща се на първа и трета позиция в думите на даден език.

Този възглед се развива в различна степен при обучението на студенти в ОКС „бакалавър“, „магистър“ в избираемата дисциплина „Обучение в мислене чрез решаване на задачи“. За целта при изграждането на умения за обосноваване у студентите се използват в процеса на обучението им „репродуктивни (директни) и продуктивни (индиректни) стратегии. Като те се прилагат в системата, а не самостоятелно, като вторият вид не замества, а допълва, надгражда и доразвива първия“⁽¹⁾. Изграждат се серии от задачи, в които се включват задачи от различни области на математиката. Тези задачи се допълват взаимно и създават сложна повтаряща се⁽²⁾.

В периода от 2016 до 2018 година бе направено изследване на изграждането на умения за обосноваване у студенти от специалности „Предучилищна и начална училищна педагогика“ и „Начална педагогика с чужд език“, които изучават избираемата дисциплина „Обучение в мислене чрез решаване на задачи“.



Фигура 2. Сравнителен анализ на входящата и изходящата диагностика на знания, умения на студентите за обосноваване



Фигура 3. Сравнителен анализ на входящата и изходящата диагностика на знания и умения на студентите за обосноваване

В емпиричното изследване се използват два теста: единият за определяне на входяща, а другият – за изходяща диагностика на знанията и уменията на студентите. Изследвани са обективността, валидността и надеждността на тестовете, както и трудността и разграничителната сила на задачите, които са включени в тях.

Извършен бе анализ на резултатите, както и сравнителен анализ на същите. Данните от сравнителния анализ на входящата и изходящата диагностика графично са представени съответно на фиг. 2 и фиг. 3.

Да открием следните особености на обосноваването:

- разкрива се същността на обосноваването като пропеедвтика на доказването;
- открити са степени на обосноваването при усвояване на методи за решаване на задачи;
- обосноваването при въвеждане на понятия се изразява в преценка на: степента на отразяване на обективната действителност; степента на реализация на описателната, обяснителната и прогностичната му функция.

Обосноваването играе ключова роля при построяване на множеството от алтернативите и оценка на решението. По-скоро, като че ли доказването е идеал! Значителен интерес представлява изследването на степените на обосноваването при усвояване на методите за решаване на задачи.

NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. Темникова, М. (2018). Стратегии в обучението по математика I – IV клас. Стара Загора.
2. Темникова, М. (2016). Изграждането на преносими компетентности в обучението по математика I – IV клас. Стара Загора.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Ganchev, I., Kolyagin, U., Kuchenov, J., Portev, L. & Sidorov, U. (1996). *Metidika na obuchenieto po matematika ot VII do XI klas (I chast)*. Sofia: Modul [Ганчев, И., Колягин, Ю., Кученов, Й., Портев, Л. & Сидоров, Ю. (1996). *Методика на обучението по математика от VIII до XI клас (I част)*. София: Модул].
- Kaneman, D. (2012). *Misleneto*. Sofia: Iztok – Zapad [Канеман, Д. (2012). *Мисленето*. София: Изток – Запад].
- Lalchev, Zdr. (1997). *Prehodat mnozestvo-chislo i negovata proekciya v obuchenieto po matematika v preduchilishtna i nachalna uchilishtna stepen*. Sofia: Veda Slovena – ZG [Лалчев, З. (1997). *Преходът множество – число и неговата проекция в обучението по математика в предучилищна и начална училищна степен*. София: Веда Словена – ЖГ].

JUSTIFICATION AS A BASIS FOR PROVING AND PROBLEM SOLVING IN MATHEMATICS SCHOOL COURSE

Abstract. Justification activity is considered as a prerequisite (propaedeutics) of proving. The purpose of the research is to show the essence of justification as propaedeutics of proving, to present some of its peculiarities and to highlight the degrees of justification in the learning process of problem solving methods. Appropriate distant propaedeutics of the concept of definition and activity of justification in the early grades. Wherever possible the explanations of some concepts to get closer to the structure of the formally logical definition, as well as the students to learn to persuade and obtain results from other results on the basis of reasoning, i.e. to justify. Presentation of solutions and the degree of justification depend on the specifics of the child's intellectual development for the relevant age.

✉ **Prof. Petar Petrov, DSc.**
Faculty of Education
Trakia University
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: pdp@dir.bg