

ОБОБЩЕНИЯ ЗА НЯКОИ КЛАСОВЕ НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ, СВЕЖДАЩИ СЕ ДО РЕКУРЕНТНА ЗАВИСИМОСТ

Росен Николаев

Икономически университет – Варна

Резюме. В статията се доразвива рекурентната връзка за известния клас интеграл от вида $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$ и се извежда формула за тяхното пресмятане. Предлага се нова методика и се извежда формула за пресмятане на един клас интеграл от вида $\int \frac{x^{ka + \frac{\alpha}{2} - 1}}{\sqrt{1 - x^\alpha}} dx$, където $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Keywords: indefinite integral, recurrence, differential binomial

За редица неопределени интеграл от вида $I(x, n)$, зависещи освен от реалната променлива x и от числото $n \in \mathbb{N}$, са изведени рекурентни зависимости от вида $I(x, n) = f(x, n) \cdot I(x, n - k) + g(x, n)$, където $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Един такъв известен интеграл е

$$J(x, n) = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}.$$

Ако се положи $\frac{x}{a} = t$, той се свежда до интеграла $I(t, n) = \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$, като

$J(x, n) = \frac{1}{a^{2n-1}} I(t, n)$. За интеграла $I(t, n)$ е изведена рекурентната връзка¹

$$I(t, n) = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I(t, n-1). \quad (1)$$

Целта, която си поставяме в настоящата статия, е да се изведат обобщени формули за пресмятане на интеграл от подобен тип, решаването на които води до рекурентна зависимост.

1. Развиване на интеграла $I(x, n) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

За краткост ще означим този интеграл с I_n . Очевидно $I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$.

Ще продължим с развиването на формула (1), докато достигнем до I_1 .

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} = \\ &= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \left[\frac{x}{2(n-2)(1+x^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} \right] = \\ &= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{x}{2(n-2)(1+x^2)^{n-2}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} = \\ &= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{x}{2(n-2)(1+x^2)^{n-2}} + \dots + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \arctg x = \\ &= \frac{(2n-3)!!(2n-2)!!x}{(2n-2)!!(2n-3)!!2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)!!(2n-4)!!x}{(2n-2)!!(2n-5)!!2(n-2)(1+x^2)^{n-2}} + \\ &\dots + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \arctg x, \end{aligned}$$

или се получава обобщената формула

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \left[x \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!(1+x^2)^i} + \arctg x \right] + C, \quad n \geq 2. \quad (2)$$

Тази формула сме извели и публикували още през 2007 г.²

2. Интеграли от вида³ $\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Идеята за написване на настоящата статия възникна в процес на съставяне на подходящи задачи за студентски олимпиади по математика. Разглеждайки интеграли като:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

стигнахме до обобщения интеграл

$$I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^4}} dx,$$

който е от вида на диференциален бином⁴, т.е.

$$I_m = \int x^m (1-x^4)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

1) Нека $m = 2l$ (l – цяло неотрицателно число). В този случай не е в сила нито един от трите случая, описани за диференциален бином, при които интегралът е решим в елементарни функции, откъдето следва, че е нерешим.

2) Нека $m = 2l + 1$. Ще разгледаме два случая: $m = 4k + 3$ и $m = 4k + 1$ (k – цяло неотрицателно число).

В първия случай $\frac{m+1}{4}$ е цяло число и полагаме $1-x^4 = t^2$. Тогава: $\sqrt{1-x^4} = t$,

$x^4 = 1-t^2$ и $dx^4 = d(1-t^2)$, откъдето $4x^3 dx = -2t dt$, $dx = -\frac{t}{2x^3} dt$. За интеграла се получава:

$$I_m = I_{4k+3} = \int \frac{x^{4k+3}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{(1-t^2)^k \cdot x^3}{t} \cdot \left(-\frac{t}{2x^3}\right) dt = -\frac{1}{2} \int (1-t^2)^k dt.$$

Последният интеграл се решава, като подинтегралната функция се развие по Нютоновия бином:

$$\begin{aligned} I_m = I_{4k+3} &= -\frac{1}{2} \int \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i t^{2i} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i \frac{t^{2i+1}}{2i+1} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i \frac{\left(\sqrt{1-x^4}\right)^{2i+1}}{2i+1} + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^4}}{2} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{(x^4-1)^i}{2i+1} + C. \end{aligned}$$

Във втория случай $\frac{m+1}{4} - \frac{1}{2}$ е цяло число и полагаме $x^{-4} - 1 = t^2$. Тогава:
 $x^4 = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{-t}{2x^3(1+t^2)^2} dt = -\frac{tx^5}{2} dt$, $\sqrt{1-x^4} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $t = \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$. Получава се:

$$I_m = I_{4k+1} = \int \frac{x^{4k} \cdot x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{x \cdot \sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^k \cdot t} \left(-\frac{tx^5}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+t^2} \cdot x^6}{(1+t^2)^k} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{k+1}}.$$

За последния интеграл се прилага формула (2) при $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} I_m &= I_{4k+1} = -\frac{1}{2} I(t, k+1) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left[t \sum_{i=1}^k \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!! (1+t^2)^i} + \operatorname{arctg} t \right] + C = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left[\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2} \sum_{i=1}^k \frac{(2i-2)!! \cdot x^{4i}}{(2i-1)!!} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2} \right] + C. \end{aligned} \quad (3)$$

3. Интеграли от вида $I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Този интеграл отново е от вида на диференциален бином и е решим за всяко естествено число m . Ако m е нечетно число, след полагане $x^2 = t$ той лесно се свежда до интеграл от полином, развит по формулата за Нютоновия бином. Ще разгледаме случая, при който $m = 2l$ и ще представим два начина за решаване на I_m .

1) $I_m = I_{2l} = \int x^{2l} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$. Тъй като $\frac{2l+1}{2} - \frac{1}{2} = l$ - цяло число, то от третия случай на интеграл от диференциален бином полагаме: $x^{-2} - 1 = t^2$, или $\frac{1-x^2}{x^2} = t^2$. Тогава $x^2 = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = -\frac{tx^3}{1+t^2} dt$, $\sqrt{1-x^2} = xt$ и

$$I_m = I_{2l} = \int \frac{1}{(1+t^2)^l \cdot x \cdot t} (-tx^3) dt = -\int \frac{dt}{(1+t^2)^{l+1}}. \quad (4)$$

Последният интеграл се пресмята по формула (2) при $n = l + 1$ и се получава

$$I_m = I_{2l} = -\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \sum_{i=1}^l \frac{(2i-2)!! \cdot x^{2i}}{(2i-1)!!} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right] + C. \quad (5)$$

2) Ще изведем рекурентна зависимост за I_m , която ще доразвием в обобщена формула.

$$\begin{aligned} I_m &= -\int \frac{-x^m + x^{m-2} - x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{x^{m-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx + I_{m-2} = \\ &= -\frac{1}{m-1} \int \sqrt{1-x^2} dx^{m-1} + I_{m-2} = \\ &= -\frac{1}{m-1} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{m-1} \int x^{m-1} \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} dx + I_{m-2} = \\ &= -\frac{1}{m-1} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{m-1} I_m + I_{m-2}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{m}{m-1} I_m = I_{m-2} - \frac{1}{m-1} x^{m-1} \sqrt{1-x^2}.$$

Получава се рекурентната връзка:

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} - \frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2}.$$

Развиваме тази зависимост, докато достигнем до $I_0 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$:

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{m-1}{m} \left[\frac{m-3}{m-2} I_{m-4} - \frac{1}{m-2} x^{m-3} \sqrt{1-x^2} \right] - \frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} = \\ &= \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)} I_{m-4} - \frac{m-1}{m(m-2)} x^{m-3} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} = \dots \end{aligned}$$

Като се вземе предвид, че $m = 2l$, се получава:

$$\begin{aligned} I_{2l} &= \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} I_0 - \frac{(2l-1)!! \cdot 0!!}{(2l)!! \cdot 1!!} x \sqrt{1-x^2} - \frac{(2l-1)!! \cdot 2!!}{(2l)!! \cdot 3!!} x^3 \sqrt{1-x^2} - \dots \\ &\quad - \frac{(2l-1)!! \cdot (2l-2)!!}{(2l)!! \cdot (2l-1)!!} x^{2l} \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Получената обобщена формула може да се запише окончателно в следния вид:

$$I_{2l} = \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \left[\arcsin x - \sqrt{1-x^2} \sum_{i=1}^l \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!} x^{2i-1} \right] + C. \quad (6)$$

За да съвпадат формули (5) и (6), остава да покажем, че

$-\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$. Равенството е вярно, тъй като производните на лявата и дясната страна съвпадат.

И така, изводът, който можем да направим, е че интеграли от последния клас е по-целесъобразно да бъдат пресмятани по втората методика или чрез използване на изведената формула (6). Предимствата от директното използване на формули (5) и (6) се изразяват в следното:

– не се налага изследване на условията за интеграли от вида на диференциален бином;

– не се налагат субституции и последващите ги изразявания, за да се достигне до интеграли от първия вид и прилагане на формула (2).

За да направим сравнение между използването на изведените формули и прилагането на досегашната методика, ще решим следния пример по три начина.

Пример. Да се реши интегралът $J_6 = \int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение. I начин. Като се използват знанията за диференциален бином, се достига до интеграла, разгледан в началото на статията, за който се прилага известната рекурентна връзка (1).

$J_6 = \int x^6 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$. Тук $m=6, n=2, p=-\frac{1}{2}$. Полага се $x^{-2}-1=t^2$ или $\frac{1-x^2}{x^2} = t^2$. Тогава $x^2 = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = -tx^3 dt$, $\sqrt{1-x^2} = xt$. Следователно

$$J_6 = \int \frac{1}{(1+t^2)^3} \cdot \frac{1}{xt} \cdot (-tx^3) dt = - \int \frac{1}{(1+t^2)^4} dt = -I(t, 4). \quad (7)$$

По формула (1) се намират последователно:

$$I(t, 1) = \operatorname{arctg} t;$$

$$I(t, 2) = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t ;$$

$$I(t, 3) = \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \left[\frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right] = \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 + 1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t ;$$

$$\begin{aligned} I(t, 4) &= \frac{t}{6(t^2 + 1)^3} + \frac{5}{6} \left[\frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 + 1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t \right] = \\ &= \frac{t}{6(t^2 + 1)^3} + \frac{5t}{24(t^2 + 1)^2} + \frac{5t}{16(t^2 + 1)} + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} t. \end{aligned}$$

След като се замести в (7) и се изрази $t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и $x^2 = \frac{1}{1+t^2}$, за решението на изходния интеграл се получава

$$J_6 = - \left[\sqrt{1-x^2} \left(\frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16} \right) + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right] + C.$$

II начин. След установяване на връзката $J_6 = -I(t, 4) = -I_4$ се прилага директно изведената формула (2). Тогава

$$\begin{aligned} J_6 = -I_4 &= -\frac{5!!}{6!!} \left[t \left(\frac{0!!}{1!! \cdot (t^2 + 1)} + \frac{2!!}{3!! \cdot (t^2 + 1)^2} + \frac{4!!}{3!! \cdot (t^2 + 1)^3} \right) + \operatorname{arctg} t \right] + C = \\ &= -\frac{5}{16} \left[t \left(\frac{1}{t^2 + 1} + \frac{2}{3(t^2 + 1)^2} + \frac{8}{15(t^2 + 1)^3} \right) + \operatorname{arctg} t \right] + C = \\ &= - \left[t \left(\frac{5}{16(t^2 + 1)} + \frac{5}{24(t^2 + 1)^2} + \frac{1}{6(t^2 + 1)^3} \right) + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} t \right] + C. \end{aligned}$$

След заместване на t с $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и на $\frac{1}{1+t^2}$ с x^2 , се получава

$$J_6 = - \left[\sqrt{1-x^2} \left(\frac{5x}{16} + \frac{5x^3}{24} + \frac{x^5}{6} \right) + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right] + C.$$

Става ясно, че използването на обобщената формула (2) води по-бързо до крайния резултат.

III начин. Прилага се формула (6) при $l = 3$:

$$\begin{aligned} J_6 &= \frac{5!!}{6!!} \left[\arcsin x - \sqrt{1-x^2} \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{18}{15}x^5 \right) \right] + C = \\ &= \frac{5}{16} \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \left(\frac{5x}{16} + \frac{5x^3}{24} + \frac{x^5}{6} \right) + C. \end{aligned}$$

Считаме, че решеният пример ясно показва, че използването на формула (6) е най-удачно.

4. Интеграли от вида $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{\frac{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}{2}}}{\sqrt{1-x^\alpha}} dx$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Представената в точка 3 методика за решаване на интеграла $I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx$ позволява да направим следното обобщение. Разглеждаме интеграла $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{\frac{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}{2}}}{\sqrt{1-x^\alpha}} dx$, където $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Полагаме $x^{\frac{\alpha}{2}} = t$, $dx = \frac{dt}{\frac{\alpha}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1}}$, $x^{k\alpha} = t^{2k}$,

при което той се преобразува до:

$$I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{\frac{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}{2}}}{\sqrt{1-x^\alpha}} dx = \int \frac{x^{k\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^\alpha}} dx = \int \frac{t^{2k} x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{\frac{\alpha}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1}} = \frac{2}{\alpha} \int \frac{t^{2k} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\alpha} I_{2k},$$

като последният интеграл се решава по формула (6).

В заключение можем да направим следните обобщения на основните резултати, постигнати в настоящата разработка:

1. Доразвита е рекурентната връзка и е изведена формула в компактен вид за пресмятане на интеграли от т.нар. клас „многохилядници“: $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$.

2. Изведената формула се прилага за решаване на интеграли от следния клас:

$$\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

3. За интеграли от вида $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{k\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1}}{\sqrt{1-x^\alpha}} dx$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, които могат да бъдат

сведени до „многохилядника“, се предлага друг подход и се извежда формула за тяхното пресмятане.

БЕЛЕЖКИ

1. Вж. например: Брадистилов, Г. (1947). *Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане*. София: Геогр. институт, с. 91; Подобни интеграли има в редица книги, като напр. Демидович Б. П. (1963). *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, с. 172 – 173, но те не са в обобщен вид, а целта тук е да се достигне до нещо повече от рекурентна връзка.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. (2010). *Математика за икономисти*. София: Издателство на ВУЗФ (ISBN 978-954-8590-06-8).
- Дочев, Д., Р. Николаев (2007). *Математически анализ I – сборник от решени и нерешени задачи*. Варна: ИУ „Наука и икономика“, с. 255.
- Гелерт, В. и др. (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: ДИ „Наука и изкуство“, с. 182 – 183.

REFERENCES

- Grozdev, S. (2010). *Matematika za ikonomisti*. Sofiya: Izdatelstvo na VUZF (ISBN 978-954-8590-06-8).
- Dochev, D., R. Nikolaev (2007). *Matematicheski analiz I – sbornik ot resheni i neresheni zadachi*. Varna: IU „Nauka i ikonomika“, s. 255.
- Gelert, V. i dr. (1983). *Matematicheski entsiklopedichen rechnik*. Sofiya: DI „Nauka i izkustvo“, s. 182 – 183.

GENERALIZATION OF SOME TYPES OF INDEFINITE INTEGRALS, WHICH CAN BE SOLVED BY RECURRENCE

Abstract. In this article we develop a recurrence for the indefinite integrals of the famous type $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$ and a formula for their calculation. A new methodology and a formula for solving integrals of the type $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{k\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1}}{\sqrt{1 - x^\alpha}} dx$, where $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ are also described.

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof.**

University of Economics – Varna

77 „Kniaz Boris I“ Blvd.

9002 Varna, Bulgaria

E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg