

ОБОБЩЕНИЕ НА ТОЧКИТЕ НА ФЕРМА В РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИКА

¹⁾ Сава Гроздев, ²⁾ Веселин Ненков

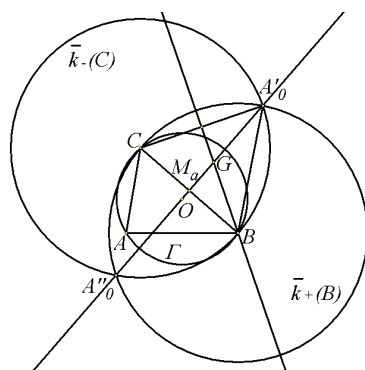
¹⁾ Висше училище по застраховане и финанси – София

²⁾ Висше военноморско училище „Никола Вапцаров“ – Варна

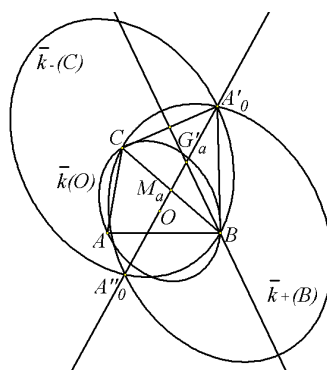
Резюме. Разгледано е едно обобщение на равностранный триъгълници, зависещо от описана около триъгълник елипса. Като следствие от конструкцията на тези триъгълници е получено обобщение на точките на Ферма в равнината на даден триъгълник.

Ключови думи: триъгълник; елипса; точки на Ферма

Две от забележителните точки на триъгълника са така наречените точки на Ферма. Тези точки се получават чрез построяване на равностранный триъгълници върху страните на триъгълника. Любопитно е да се открият триъгълници, които обобщават равностранный, така че от тези триъгълници по естествен начин да се получи обобщение и на точките на Ферма. Тук ще покажем един начин да се направи това с помощта на описаните около даден триъгълник ABC елипси. За да обосновем получените резултати, ще използваме барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$. Средите на страните BC , CA и AB ще означаваме съответно с M_a , M_b и M_c .



Фигура 1



Фигура 2

1. Псевдоравностранни триъгълници, определени от описаните около даден триъгълник елипси. Върху всяка от страните на даден триъгълник ABC могат да се построят по два равностранни триъгълника. Ако приемем, че съществуването на тези триъгълници зависи от описаната около ΔABC окръжност Γ , то следва да си поставим въпроса за съществуването на единствени двойки триъгълници върху страните на триъгълника с подобни свойства и определени от произволно описано около ΔABC конично сечение. За да открием тези двойки триъгълници, ще направим анализ на някои връзки на равностранните триъгълници с Γ .

Нека около ΔABC е описано конично сечение $\bar{k}(O)$ с център $O(x_0, y_0, z_0)$. Тогава уравнението на $\bar{k}(O)$ е следното

$$(1) \quad \bar{k}(O): (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy = 0.$$

Третите върхове на построените върху страната BC равностранни триъгълници означаваме с A'_0 и A''_0 . Първото, което прави впечатление, е, че точките A'_0 и A''_0 лежат върху симетралата на отсечката BC , която е диаметър на Γ през точката M_a (фиг. 1). Затова търсим такива точки A'_0 и A''_0 върху диаметъра OM_a на $\bar{k}(O)$ (фиг. 2). Друго основно свойство на равностранните триъгълници се състои в това, че медицентровете им лежат върху прави, които са перпендикулярни на страните им. Това означава, че тези прави са спрегнати със съответните страни спрямо Γ и минават през техните среди (фиг. 1). От последното наблюдение следва, че точката A'_0 можем да търсим така, че правата, минаваща през медицентъра G'_a на BCA'_0 , да минава през средата на отсечката CA'_0 и същевременно да е спрегната с CA'_0 спрямо $\bar{k}(O)$ (аналогично за построението на A''_0) (фиг. 2). Тези две наблюдения са напълно достатъчни за построяване на точките A'_0 и A''_0 . Това ще обосновем със следващите аналитични разсъждения.

Правата OM_a има следните параметрични уравнения

$$x = -2x_0t, \quad y = \frac{1}{2} + (1-2y_0)t, \quad z = \frac{1}{2} + (1-2z_0)t.$$

С A_0 означаваме една от точките A'_0 и A''_0 . Тъй като A_0 лежи върху правата OM , тя се получава при стойност на параметъра t_0 (фиг. 2). Следователно координатите на A_0 са: $x_{A_0} = -2x_0t_0$, $y_{A_0} = \frac{1}{2} + (1-2y_0)t_0$, $z_{A_0} = \frac{1}{2} + (1-2z_0)t_0$.

Оттук намираме, че медицентърът на ΔBCA_0 има следното координатно представяне $G_a \left(-\frac{2x_0t_0}{3}, \frac{3+2(1-2y_0)t_0}{6}, \frac{3+2(1-2z_0)t_0}{6} \right)$ (фиг. 2).

По-нататък ще определим права, която минава през средата на отсечката CA_0 и е спрегната с правата CA_0 спрямо $\bar{k}(O)$ (фиг. 2). Един вектор $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, колинеарен с правата CA_0 , има следните координати $u_1 = -4x_0t_0$, $u_2 = 1 + 2(1 - 2y_0)t_0$, $u_3 = -1 + 2(1 - 2z_0)t_0$.

В (Grozdev & Nenkov, 2015) е доказано, че ако в равнината на $\triangle ABC$ е дадена крива с уравнение $k: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0$, то векторът $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ е спрегнат на $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, когато са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned}v_1 &= (a_{12} - a_{13})u_1 + (a_{22} - a_{23})u_2 + (a_{32} - a_{33})u_3, \\v_2 &= (a_{13} - a_{11})u_1 + (a_{23} - a_{21})u_2 + (a_{33} - a_{31})u_3, \\v_3 &= (a_{11} - a_{12})u_1 + (a_{21} - a_{22})u_2 + (a_{33} - a_{32})u_3.\end{aligned}$$

Когато уравнението е (1), са изпълнени равенствата:

$$\begin{aligned}v_1 &= (1 - 2x_0)[(y_0 - z_0)u_1 - x_0u_2 + x_0u_3], \\v_2 &= (1 - 2y_0)[y_0u_1 + (z_0 - x_0)u_2 - y_0u_3], \\v_3 &= (1 - 2z_0)[-z_0u_1 + z_0u_2 + (x_0 - y_0)u_3].\end{aligned}$$

Следователно векторът $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, който е спрегнат с CA_0 , има следните координати

$$\begin{aligned}v_1 &= -2(1 - 2x_0)x_0, \\v_2 &= (1 - 2y_0)[1 - 2x_0 - 2(1 - 2z_0)t_0], \\v_3 &= (1 - 2z_0)[1 - 2x_0 + 2(1 - 2y_0)t_0].\end{aligned}$$

Координатите на средата на CA_0 са следните $\left(-x_0t_0, \frac{1 + 2(1 - 2y_0)t_0}{4}, \frac{3 + 2(1 - 2z_0)t_0}{4}\right)$. Така намираме параметричните уравнения на правата q , която е спрегната с CA_0

$$\begin{aligned}x &= -x_0t_0 - 2(1 - 2x_0)x_0p, \\y &= \frac{1 + 2(1 - 2y_0)t_0}{4} + (1 - 2y_0)[1 - 2x_0 - 2(1 - 2z_0)t_0]p,\end{aligned}$$

$$z = \frac{3+2(1-2z_0)t_0}{4} + (1-2z_0)[1-2x_0+2(1-2y_0)t_0]p.$$

Сега, ако правата q минава през G_0 , се получават равенствата

$$-x_0t_0 - 2(1-2x_0)x_0p = -\frac{2x_0t_0}{3},$$

$$\frac{1+2(1-2y_0)t_0}{4} + (1-2y_0)[1-2x_0-2(1-2z_0)t_0]p = \frac{3+2(1-2y_0)t_0}{6}.$$

Оттук получаваме $p = -\frac{t_0}{6(1-2x_0)}$ и $\frac{3(1-2y_0)}{4(1-2y_0)(1-2z_0)}.$

Въвеждаме означението $\Delta = (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)$. Следователно

$$t_0 = \pm \frac{1-2x_0}{2} \sqrt{\frac{3}{\Delta}}.$$

Така получаваме координатното представяне и двете точки A'_0 и A''_0 :

$$(2) \quad \begin{aligned} A'_0 & \left(-(1-2x_0)x_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}, \frac{1}{2} \left[1+(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], \frac{1}{2} \left[1+(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] \right), \\ A''_0 & \left((1-2x_0)x_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}, \frac{1}{2} \left[1-(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], \frac{1}{2} \left[1-(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] \right). \end{aligned}$$

Аналогично намираме върховете на триъгълниците, построени върху другите две страни, със следните координатни представяния:

$$(3) \quad B'_0 \left(\frac{1}{2} \left[1+(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], -(1-2y_0)y_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}, \frac{1}{2} \left[1+(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] \right),$$

$$B''_0 \left(\frac{1}{2} \left[1-(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], (1-2y_0)y_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}, \frac{1}{2} \left[1-(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] \right).$$

$$(4) \quad C'_0 \left(\frac{1}{2} \left[1+(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], \frac{1}{2} \left[1+(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], -(1-2z_0)z_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right),$$

$$C''_0 \left(\frac{1}{2} \left[1-(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], \frac{1}{2} \left[1-(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right], (1-2z_0)z_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right).$$

Триъгълниците BCA'_0 , BCA''_0 , CAB'_0 , CAB''_0 , ABC'_0 и ABC''_0 ще наричаме псевдоравностранни по отношение на $\bar{k}(O)$.

От координатите (2), (3) и (4) на точките $A'_0, A''_0, B'_0, B''_0, C'_0$ и C''_0 се вижда, че те съществуват само когато $\Delta = (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) > 0$. Това условие е изпълнено само когато $\bar{k}(O)$ е елипса. Следователно псевдоравностранните триъгълници са определени само от описаните около ΔABC елипси.

2. Двойки специални елипси в равнината на триъгълника. Равностранните триъгълници, построени върху страните на даден триъгълник, се получават чрез общите точки на две еднакви окръжности с радиуси страните на триъгълника (фиг. 1). Оказва се, че триъгълниците $BCA'_0, BCA''_0, CAB'_0, CAB''_0, ABC'_0$ и ABC''_0 притежават подобно свойство (фиг. 2).

Нека $\bar{k}_+(B)$ и $\bar{k}_-(C)$ са коничните сечения, описани съответно около триъгълниците $A'_0A''_0C$ и $A'_0A''_0B$, центровете на които са съответно B и C . За уравненията на тези криви се получава:

$$\bar{k}_+(B): (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy + (1-2y_0)(z_0-x_0)x + (1-2x_0)x_0y = 0,$$

$$\bar{k}_-(C): (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy + (1-2z_0)(y_0-x_0)x + (1-2x_0)x_0z = 0.$$

От резултатите, получени в (Grozdev & Nenkov, 2014), следва, че $\bar{k}_+(B)$ и $\bar{k}_-(C)$ са хомотетични на $\bar{k}(O)$ с коефициент на хомотетия $\pm \sqrt{\frac{1-2x_0}{y_0z_0}}$.

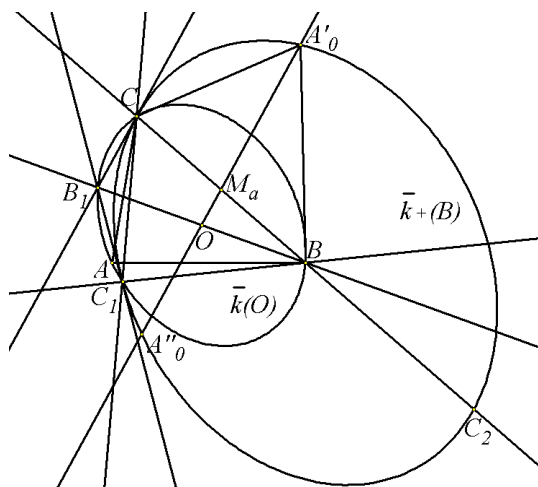
Следователно кривите $\bar{k}_+(B)$ и $\bar{k}_-(C)$ са еднакви елипси.

3. Конструкция на псевдоравностранните триъгълници. За да се изследват свойствата на ΔABC , свързани с псевдоравностранни триъгълници, е необходимо да се знае как се построяват тези триъгълници при дадена описана около ΔABC елипса $\bar{k}(O)$. От получените резултати следва, че псевдоравностранни триъгълници могат да се построяват по следните три начина.

1) Всяка от точките $A'_0, A''_0, B'_0, B''_0, C'_0$ и C''_0 може да се построи по съответните си координати, представени в (2), (3) и (4).

2) Построяването на точките A'_0 и A''_0 може да се извърши с помощта на някоя от елипсите $\bar{k}_+(B)$ и $\bar{k}_-(C)$. Елипсата $\bar{k}_+(B)$ може да се построи като хомотетична на $\bar{k}(O)$ с коефициент $\sqrt{\frac{1-2x_0}{y_0z_0}}$. След това да се намерят пресечните точки на $\bar{k}_+(B)$ с правата OM_a (фиг. 2, 3).

3) Друг начин за построяване на точките A'_0 и A''_0 с помощта на някоя от елипсите $\bar{k}_+(B)$ и $\bar{k}_-(C)$ се основава на следните наблюдения. а) Втората пресечна точка C_1 на $\bar{k}_+(B)$ с $\bar{k}(O)$ лежи върху права, която е спрегната с правата OB спрямо $\bar{k}(O)$. Затова точката C_1 може да се построи като пре-

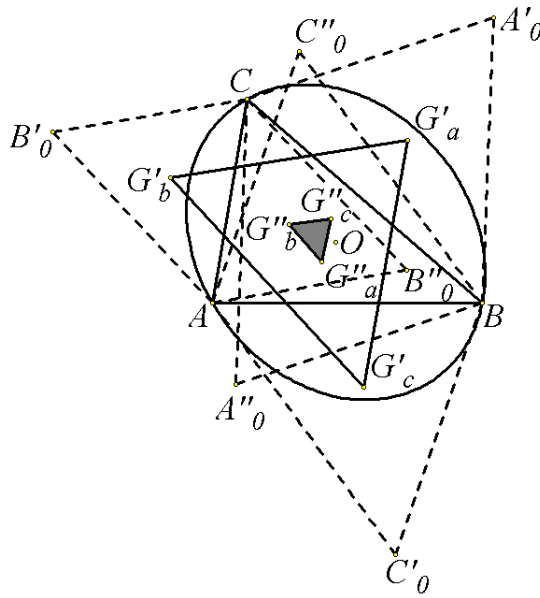


Фигура 2

4. Наполеонов триъгълници. Триъгълниците, образувани от центровете на еднопосочните равностранни триъгълници, построени върху страните на даден триъгълник, обикновено се наричат Наполеонов триъгълници. Тези триъгълници имат постоянна разлика на лицата. Оказва се, че такова свойство притежават и псевдоравностранните триъгълници.

Нека G'_a , G''_a , G'_b , G''_b , G'_c и G''_c са медицентровете съответно на триъгълниците BCA'_0 , BCA''_0 , CAB'_0 , CAB''_0 , ABC'_0 и ABC''_0 . За координатите на тези точки от (2), (3) и (4) се получава

$$\begin{aligned}
 & G'_a \left(-\frac{(1-2x_0)x_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3}, \frac{3+(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, \frac{3+2(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6} \right), \\
 & G''_a \left(\frac{(1-2x_0)x_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3}, \frac{3-(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, \frac{3-2(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6} \right), \\
 & G'_b \left(\frac{3+(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, -\frac{(1-2y_0)y_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3}, \frac{3+2(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6} \right), \\
 & G''_b \left(\frac{3-(1-2x_0)(1-2y_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, \frac{(1-2y_0)y_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3}, \frac{3-2(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6} \right), \\
 & G'_c \left(\frac{3+(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, \frac{3+2(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, -\frac{(1-2z_0)z_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3} \right), \\
 & G''_c \left(\frac{3-(1-2z_0)(1-2x_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, \frac{3-2(1-2y_0)(1-2z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{6}, \frac{(1-2z_0)z_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3} \right).
 \end{aligned}$$



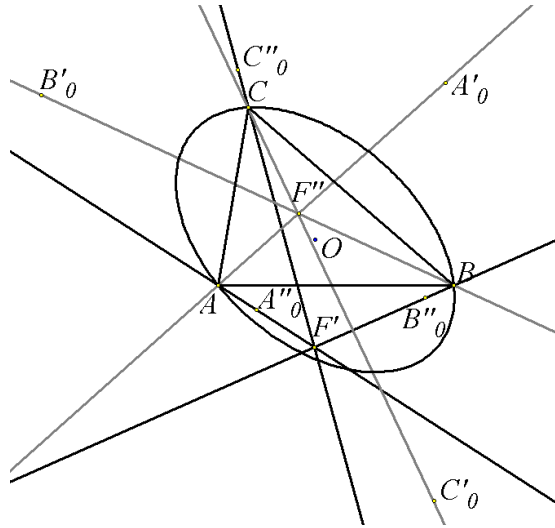
Фигура 4

От формулата за лице на триъгълник и тези координати се получават равенствата

$$S_{G'_a G'_b G'_c} = \frac{(\Delta + 8x_0 y_0 z_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} + 3}{6} \cdot S, \quad S_{G''_a G''_b G''_c} = \frac{(\Delta + 8x_0 y_0 z_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} - 3}{6} \cdot S.$$

Оттук следва, че $S_{G'_a G'_b G'_c} - S_{G''_a G''_b G''_c} = S$. Следователно триъгълниците $G'_a G'_b G'_c$ и $G''_a G''_b G''_c$ притежават същото свойство, което има при равностранный. Затова можем да наричаме триъгълниците $G'_a G'_b G'_c$ и $G''_a G''_b G''_c$ *Наполеонове триъгълници* (фиг. 4). Трябва да се отбележи, че последното свойство на Наполеоновите триъгълници не зависи от описаната около $\triangle ABC$ елипса.

5. Точки на Ферма. Класическите точки на Ферма се получават чрез правите, свързващи върховете на $\triangle ABC$ с върховете на равностранный триъгълници, построени върху страните му. Това свойство се запазва и когато разглеждаме псевдоравностранни триъгълници.



Фигура 5

От (2), (3) и (4) за уравнения на правите AA'_0 , AA''_0 , BB'_0 , BB''_0 , CC'_0 и CC''_0 имаме:

$$\begin{aligned}
 AA'_0: & \left[1 + (1 - 2z_0)(1 - 2x_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] y - \left[1 + (1 - 2x_0)(1 - 2y_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] z = 0, \\
 AA''_0: & \left[1 - (1 - 2z_0)(1 - 2x_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] y - \left[1 - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] z = 0, \\
 BB'_0: & \left[1 + (1 - 2y_0)(1 - 2z_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] x - \left[1 + (1 - 2x_0)(1 - 2y_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] z = 0, \\
 BB''_0: & \left[1 - (1 - 2y_0)(1 - 2z_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] x - \left[1 - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] z = 0, \\
 CC'_0: & \left[1 + (1 - 2y_0)(1 - 2z_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] x - \left[1 + (1 - 2z_0)(1 - 2x_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] y = 0, \\
 CC''_0: & \left[1 - (1 - 2y_0)(1 - 2z_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] x - \left[1 - (1 - 2z_0)(1 - 2x_0) \sqrt{\frac{3}{\Delta}} \right] y = 0.
 \end{aligned}$$

От уравненията на правите AA'_0 , BB'_0 и CC'_0 получаваме, че те се пресичат в точка F' , координатите на която са следните:

$$F' \left(\frac{2-3x_0+(1-2x_0)x_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3+(\Delta+8x_0y_0z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}, \frac{2-3y_0+(1-2y_0)y_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3+(\Delta+8x_0y_0z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}, \frac{2-3z_0+(1-2z_0)z_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3+(\Delta+8x_0y_0z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}} \right).$$

От уравненията на правите AA''_0 , BB''_0 и CC''_0 получаваме, че те се пресичат в точка F'' , координатите на която са следните:

$$F'' \left(\frac{2-3x_0-(1-2x_0)x_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3-(\Delta+8x_0y_0z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}, \frac{2-3y_0-(1-2y_0)y_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3-(\Delta+8x_0y_0z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}, \frac{2-3z_0-(1-2z_0)z_0\sqrt{\frac{3}{\Delta}}}{3-(\Delta+8x_0y_0z_0)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}} \right).$$

Точките F' и F'' ще наричаме *точки на Ферма, породени от елипсата $\bar{k}(O)$* (фиг. 5).

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & В. Ненков. (2014). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник, *Математика и информатика*, 2, 139 – 154, ISSN 1310-2230.
- Гроздев, С. & В. Ненков (2015). Геометрична конструкция на крива на Чева, *Математика и информатика*, 1, 52 – 57, ISSN 1310-2230.
- Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
- Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.
- Георгиева, М. & С. Гроздев. (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток-Запад, 987-619-152-869-1, 327 стр.

REFERENCES

- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2014). Homothetic conics in the plane of a triangle, *Mathematics and Informatics*, 2, 139 – 154, ISSN 1310-2230.
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2015). Geometric construction of Ceva's curve, *Mathematics and Informatics*, 1, 52 – 57, ISSN 1310-2230.
- Pascalev, G. & Chobanov, I. (1985). *Notable points in the triangle*. Sofia: Narodna Prosveta.

- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1)
- Sergeeva, T., Shabanova, M. & Grozdev, S. (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU (in Russian).
- Georgieva, M. & Grozdev, S. (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.), Sofia: Iztok-Zapad. ISBN 987-619-152-869-1, 327 p.

A GENERALIZATION OF THE FERMAT POINTS IN THE PLANE OF A TRIANGLE

Abstract. It is considered a generalization of the equilateral triangles depending on their circumscribed ellipses. It is obtained a generalization of the Fermat points in the plane of a given triangle as a corollary of the corresponding construction.

Keywords: triangle; ellipse; Fermat points

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
University of Finance, Business Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Researcher ID AAB-5776-2019
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg