

НЯКОЛКО ЗАДАЧИ ЗА ОКРЪЖНОСТИ, ДОПИРАЩИ СЕ ДО КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Висше училище по застраховане и финанси – София

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. Разглеждат се няколко задачи за окръжности, допиращи се до конични сечения и определени от точки върху директрисата на коничното сечение.

Keywords: circle; conic; parabola; ellipse; hyperbola; center; triangle; focus; directress

Във всяка точка на едно конично сечение k могат да се построят безброй много окръжности, които се допират до k . Тук ще разгледаме няколко специални случая на окръжности, допиращи се до k и зависещи от точки, лежащи върху директриса на k .

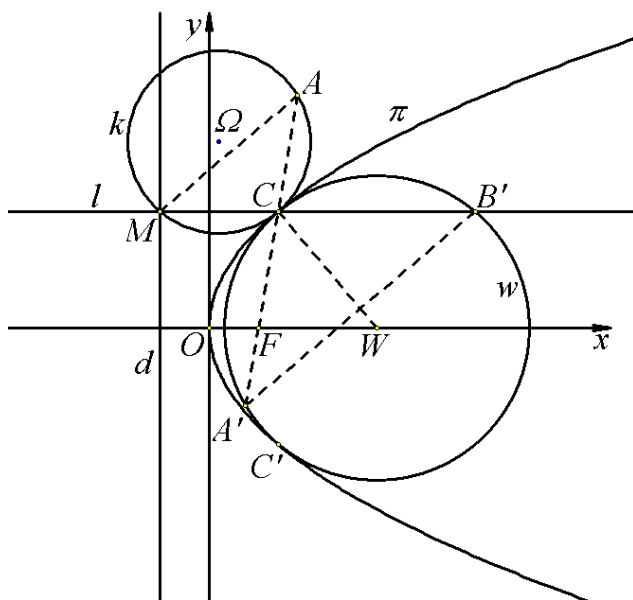
В началото ще разгледаме две задачи за параболи.

Задача 1. Дадени са парабола π с фокус F и директриса d . Нека M е точка от правата d , а l е права през M , перпендикулярна d и $l \cap \pi = C$. Ако точката A е симетрична на F относно C , да се докаже, че описаната за триъгълника ACM окръжност k се допира до параболата π при всяко положение на M върху d .

Решение. Разглеждаме координатната система Oxy , по отношение на която параболата π има канонично уравнение

$$(1) \quad y^2 = 2px,$$

където p е фокалният параметър на π .



Тъй като $M \in d$, то $M\left(-\frac{p}{2}, y_M\right)$, където y_M е реално число. Оттук следва, че $C\left(\frac{y_M^2}{2p}, y_M\right)$. За координатите на A са изпълнени равенства $x_A = 2x_C - x_F$ и $y_A = 2y_C - y_F$. От координатите на C и $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ намираме, че $A\left(\frac{2y_M^2 - p^2}{2p}, 2y_M\right)$. Симетралите s_{CM} и s_{AM} съответно на отсечките CM и AM имат следните уравнения:

$$(2) \quad s_{CM} : x = \frac{y_M^2 - p^2}{4p},$$

$$(3) \quad s_{AM} : 2py_Mx + 2p^2y - y_M(y_M^2 + 2p^2) = 0.$$

Системата уравнения, получаваща се от (2) и (3), има следното решение

$$(4) \quad x_0 = \frac{y_M^2 - p^2}{4p}, \quad y_0 = \frac{y_M(y_M^2 + 5p^2)}{4p^2}.$$

По този начин с формулите (4) получихме координатите (x_0, y_0) на центъра Ω на окръжността k , описана за $\triangle ACM$. Разстоянието $M\Omega$ е равно на

радиуса R на окръжността k . От (4) получаваме равенството

$$(5) \quad R^2 = \frac{(y_M^2 + p^2)^3}{16p^4}.$$

Сега от (4) и (5) за уравнението на окръжността k намираме

$$(6) \quad k: 4p^2x^2 + 4p^2y^2 - 2p(y_M^2 - p^2)x - 2y_M(y_M^2 + 5p^2)y + y_M^2(2y_M^2 + 5p^2) = 0.$$

От (1) и (6) следва, че ординатите на общите за параболата π и окръжността k точки удовлетворяват уравнението

$$(7) \quad (y - y_M)^2(y^2 + 2y_My + 2y_M^2 + 5p^2) = 0.$$

Вторият множител в (7) няма реални корени. Следователно (7) има един двоен реален корен $y = y_M$. Оттук следва, че точката $C\left(\frac{y_M^2}{2p}, y_M\right)$ е един-

ствената обща точка за k и π , т.е. те са допирателни.

В доказаното твърдение окръжността k се допира външно до параболата π в точката C . Любопитно е как се получава (ако съществува) окръжност W , която се допира вътрешно до π в точката C . Отговор на този въпрос се съдържа в следващата задача.

Задача 2. Дадена е парабола π с фокус F и директриса d . Нека M е точка от правата d , а l е права през M , перпендикулярна d и $l \cap \pi = C$.

а) окръжността W , допираща се вътрешно до π в точката C , центърът на която лежи върху оста на π , има още една допирна точка с π ;

б) ако окръжността W пресича правата CF за втори път в точката A' и l пресича W за втори път в точката B' , то $CA' = CB' = 2p$.

Решение. Нека симетралата s_{AM} на отсечката AM (тя минава през C) пресича оста Ox на параболата π в точката W . Ще докажем, че W е център на W . От (3) се получава $W\left(\frac{y_M^2 + 2p^2}{2p}, 0\right)$. Ако r е разстоянието между точките W и C , то

$$(8) \quad r^2 = p^2 + y_M^2.$$

От координатите на W и (8) се получава уравнението на окръжността W във вида:

$$(9) \quad w: 4p^2x^2 + 4p^2y^2 - 4p(2p^2 + y_M^2)x + y_M^4 = 0.$$

Уравненията () и (9) ни довеждат до $(2px - y_M^2)^2 = 0$. Оттук следва, че системата, образувана от тези уравнения, има две двукратни реални решения

$\left(\frac{y_M^2}{2p}, y_M\right)$ и $\left(\frac{y_M^2}{2p}, -y_M\right)$, т.е. w се допира до π в точките $C\left(\frac{y_M^2}{2p}, y_M\right)$ и $C'\left(\frac{y_M^2}{2p}, -y_M\right)$.

Сега намираме уравненията на правите CF и CM

$$(10) CF: 2py_Mx + (p^2 - y_M^2)y - p^2y_M = 0, CM: y - y_M = 0.$$

От (9) и (10) намираме

$$A'\left(\frac{4p^4 - 3p^2y_M^2 + y_M^4}{2p(p^2 + y_M^2)}, -\frac{y_M(3p^2 - y_M^2)}{p^2 + y_M^2}\right), B'\left(\frac{4p^2 + y_M^2}{2p}, y_M\right).$$

Оттук окончателно следва, че $CA' = CB' = 2p$.

От задачи 2б) следва изводът: разстоянията CA' и CB' не зависят от положението на точката M върху директрисата.

Сега ще разгледаме две задачи за централни конични сечения.

Задача 3. Нека k е елипса или хипербола, F_1 и F_2 са фокусите на k , а съответните им директриси са d_1 и d_2 . Точката M лежи на правата d_1 , а правата l минава през M и е перпендикулярна на d_1 . Правата l пресича k в точките C_1 и C_2 , така че C_1 се намира между M и C_2 , а нефокалната ос на k пресича l в точката L . Точките A_1 и B_1 лежат съответно върху лъчите

F_1C_1 и F_2C_1 и $C_1A_1 = C_1B_1 = \frac{c}{e} \cdot \frac{C_1M}{C_1L}$, а точките A_2 и B_2 лежат съответно върху лъчите C_2F_1 и C_2F_2 и $C_2A_2 = C_2B_2 = \frac{c}{e} \cdot \frac{C_2M}{C_2L}$, където e и c са числен

ният и линейният ексцентрицитет на k . Да се докаже, че:

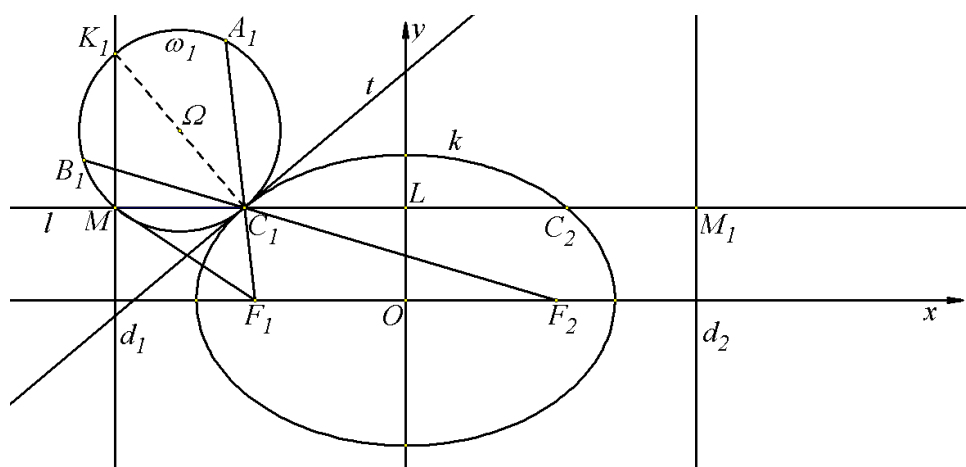
а) точките M , A_1 , B_1 , C_1 лежат на окръжност ω_1 , а точките M , A_2 , B_2 , C_2 лежат на окръжност ω_2 ;

б) окръжностите ω_1 и ω_2 се допират до k .

Решение. Ще разгледаме случая, когато k е елипса. Нека Oxy е координатната система, по отношение на която елипсата k има канонично уравнение

$$(11) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

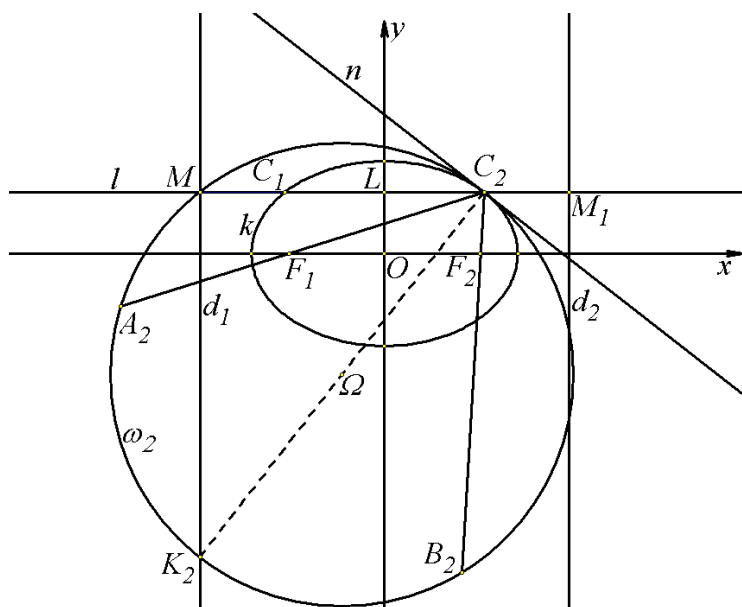
където a и b са съответно голямата и малката полуос на k .



Разглеждаме произволна точка M върху директрисата d_1 , която има следното уравнение:

$$(12) \quad d_1: x = -\frac{a^2}{c},$$

а $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ е линейният ексцентрицитет на k .



Обозначавайки с y_M ордината точки M , от (12) следва, че координатното представяне на M е следното: $M\left(-\frac{a^2}{c}, y_M\right)$. След това с C означаваме произволна точка измежду C_1 и C_2 , а с ω обобщаваме окръжностите ω_1 и ω_2 . Точката C в координати се представя така: $C(x_C, y_M)$. От (11) се получава

$$(13) \quad x_C = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y_M^2},$$

където знакът „–“ отговаря на точката C_1 , а знакът „+“ отговаря на точката C_2 .

Означаваме с t допирателната за k в точката C , а с n – правата, минаваща през C и перпендикулярна на t . Известно е, че правата t има следното уравнение

$$(14) \quad t: \frac{x_C}{a^2} \cdot x + \frac{y_C}{b^2} \cdot y = 1.$$

Оттук следва, че векторът $(a^2 y_M, -b^2 x_C)$ е перпендикулярен на правата n . Така получаваме, че уравнението на n е следното:

$$(15) \quad n: a^2 y_M x - b^2 x_C y - c^2 x_C y_M = 0.$$

Сега намираме координатите на точката $K = n \cap d_1$ от уравненията (12) и

$$(15). \text{ Получаваме } K\left(-\frac{(a^4 + c^3 x_C) y_M}{b^2 c x_C}, -\frac{a^2}{c}\right). \text{ Ще докажем, че окръжност-}$$

та, описана около правоъгълния триъгълник MCK , е желаната окръжност ω . Центърът $\Omega(x_0, y_0)$ на описаната окръжност за MCK е средата на отсечката CK . Поради това $x_0 = \frac{x_C + x_K}{2}$ и $y_0 = \frac{y_C + y_K}{2}$. Следователно

$$(16) \quad x_0 = \frac{c x_C - a^2}{2c}, \quad y_0 = \frac{[c(b^2 - c^2)x_C - a^4] y_M}{2b^2 c x_C}.$$

Радиусът R_0 на описаната окръжност за MCK е разстоянието между точките Ω и K . С помощта на (16) намираме, че

$$(17) \quad R_0^2 = \frac{(a^2 + c x_C)^2 (b^4 x_C^2 + a^4 y_M^2)}{4b^4 c^2 x_C^2} = \frac{(a^2 + c x_C)^3 (a^2 - c x_C)}{4b^2 c^2 x_C^2}.$$

Уравнението на търсената окръжност е $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_0^2$. Оттук и равенствата (16) и (17) намираме

$$(18) \quad \omega: b^2 c x_C x^2 + b^2 c x_C y^2 + b^2 x_C (a^2 - c x_C) x + \\ + [a^4 + c(c^2 - b^2)x_C] y_M y - [(a^4 + c^3 x_C) y_M^2 + a^2 b^2 x_C^2] = 0.$$

Ако k и ω се допират в точката C , то правата t се явява тяхна обща допирателна. Ще докажем това, решавайки системата уравнения, образувана от (14) и (18). След някои несложни изчисления, в които се използва няколко пъти равенството (13) в представянията $b^2 x_C^2 = a^2 (b^2 - y_M^2)$ и $a^2 y_M^2 = b^2 (a^2 - x_C^2)$, намираме уравнението $x^2 - 2x_C x + x_C^2 = 0$, което има двоен корен $x = x_C$. Следователно k и ω се допират в точката C . Така получихме едно доказателство, че k и ω са допирателни, но от него не следва, че k и ω имат само една обща точка. За да докажем това, решаваме системата, определена от уравненията (11) и (18). Уравнението (18) записваме така

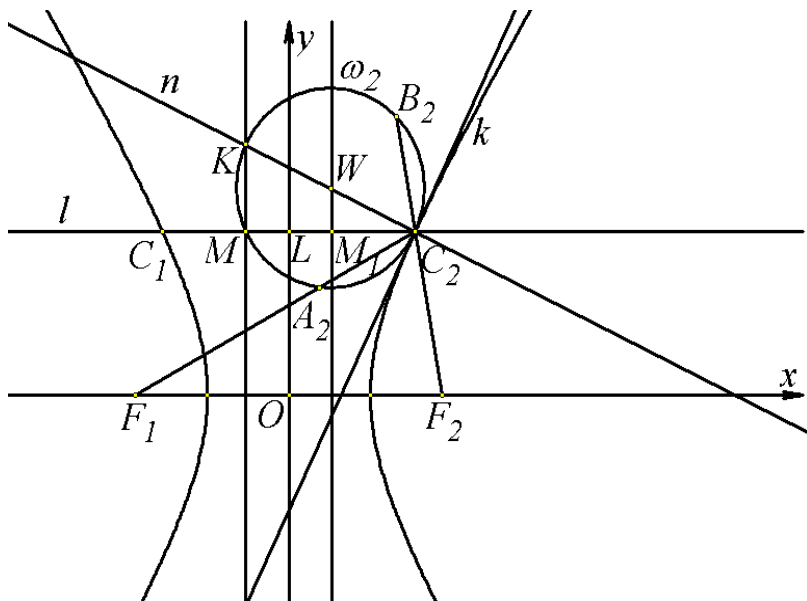
$$[a^4 + c(c^2 - b^2)x_C]^2 y_M^2 y^2 = [b^2 c x_C (x^2 + y^2) + b^2 x_C (a^2 - c x_C) x - (a^4 + c^3 x_C) y_M^2 - a^2 b^2 x_C^2].$$

Поставяме в това равенство $y^2 = \frac{a^2(b^2 - x^2)}{b^2}$, $y_M^2 = \frac{a^2(b^2 - x_C^2)}{b^2}$ и $b^2 = a^2 - c^2$. След някои преобразувания се получава следното уравнение:

$$(x - x_C)^2 \left\{ c^3 x_C x - [c(a^2 - c^2)x_C - a^4]x_C - \sqrt{D} \right\} \left\{ c^3 x_C x - [c(a^2 - c^2)x_C - a^4]x_C + \sqrt{D} \right\},$$

$$\text{където } D = -a^2(a^2 - x_C^2)(a^2 - c x_C)[c(c^2 - a^2)x_C + a^4].$$

Тъй като $a^2 - x_C^2 > 0$, $a^2 - c x_C > 0$ и $c(2c^2 - a^2)x_C + a^4 = 2c^3 x_C + a^2(a^2 - c x_C) > 0$, то $D < 0$. Следователно последното уравнение има само един двоен реален корен. Това означава, че кривите k и ω имат само една обща точка, в която те се допират.



Нека сега A и B са съответните втори пресечни точки на правите F_1C и F_2C с ω . Уравненията на правите CF_1 и CF_2 са следните:

$$(19) \quad CF_1: y_M x - (x_C + c)y + cy_M = 0, \quad CF_2: y_M x - (x_C - c)y - cy_M = 0.$$

От (18) и (19) намираме координатите на точките A и B :

$$x_A = -\frac{c(cx_C + 2a^2)(cx_C - a^2)y_M^2 + a^2b^2[(a^2 + c^2)x_C + 2a^2c]}{b^2cx_C[(x_C + c)^2 + y_M^2]},$$

$$y_A = -\frac{[(a^4 + c^3x_C)y_M^2 - b^4x_C(x_C + c)]y_M}{b^2cx_C[(x_C + c)^2 + y_M^2]},$$

$$x_B = -\frac{c(c^2x_C^2 - a^2cx_C + a^4)y_M^2 + a^2b^2[(a^2 + c^2)x_C - 2a^2c]}{b^2cx_C[(x_C - c)^2 + y_M^2]},$$

$$y_B = -\frac{[b^2(a^2 + c^2)x_C(x_C - c) + (a^4 + c^3x_C)y_M^2]y_M}{b^2cx_C[(x_C - c)^2 + y_M^2]}.$$

С помощта на тези координати получаваме следните разстояния:

$$(20) \quad CA = \frac{(a^2 + cx_C)^2}{cx_C\sqrt{y_M^2 + (x_C + c)^2}}, \quad CB = \frac{(a^2 + cx_C)(a^2 - cx_C)}{cx_C\sqrt{y_M^2 + (x_C - c)^2}}.$$

Означаваме с M_1 точката, симетрична на M относно оста Oy (тя се намира върху директрисата d_2). Изпълнени са равенствата $CM = \frac{a^2 + cx_C}{c}$, $CM_1 = \frac{a^2 - cx_C}{c}$, $CL = x_C$, $CF_1 = \sqrt{y_M^2 + (x_C + c)^2}$, $CF_2 = \sqrt{y_M^2 + (x_C - c)^2}$, $\frac{CF_1}{CM} = \frac{CF_2}{CM_1} = e$. Оттук и (20) следва $CA = CB = \frac{c}{e} \cdot \frac{CM}{CL}$. С това нашето

твърдение е доказано за елипси. Аналогично се получава доказателството и за хиперболи. В този случай радиусът на ω се пресмята по формулата

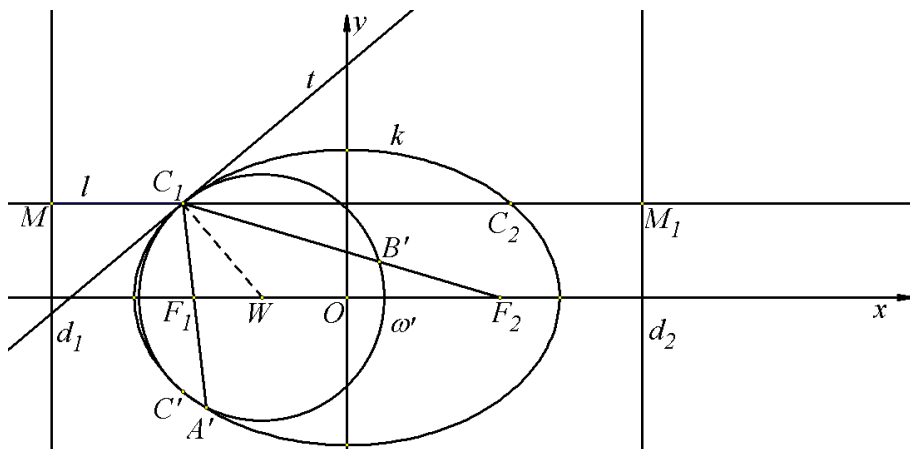
$$(18') \quad R_0^2 = \frac{(cx_C + a^2)(cx_C - a^2)^3}{4b^2c^2x_C^2}.$$

В доказаното твърдение окръжностите ω_1 и ω_2 се допират до коничното сечение външно съответно в точките C_1 и C_2 . Както при параболата е любопитно да се получат специални окръжности ω' и ω'' (ако съществуват), които се допират вътрешно до k съответно в точките C_1 и C_2 . Отговор на този въпрос се съдържа в следващата задача.

Задача 4. Нека k е елипса или хипербола, F_1 и F_2 са фокусите на k , а съответните им директриси са d_1 и d_2 . Точката M лежи на правата d_1 , а правата l минава през M и е перпендикулярна на d_1 . Правата l пресича k в точките C_1 и C_2 , така че C_1 се намира между M и C_2 . Да се докаже, че:

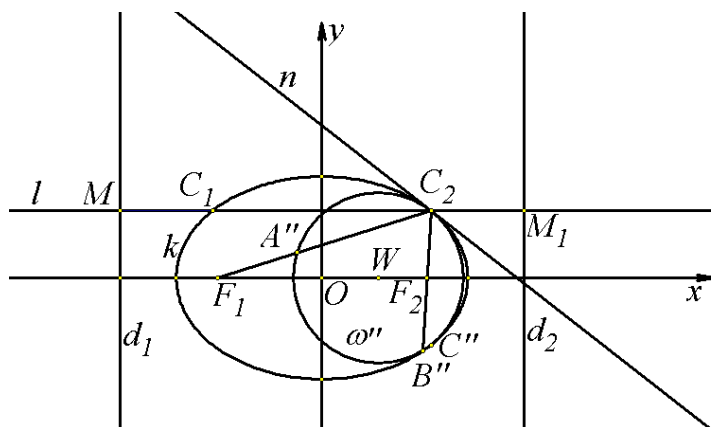
а) окръжностите ω' и ω'' , допиращи се до k вътрешно съответно в точките C_1 и C_2 , центровете на които лежат на фокалната ос на k , имат още по една точка на допиране с k ;

б) ако окръжността ω' пресича правите C_1F_1 и C_1F_2 за втори път съответно в точките A' и B' , а ω'' ги пресича за втори път съответно в точките A'' и B'' , то $C_1A' = C_1B' = C_2A'' = C_2B'' = \frac{2b^2c}{ea^2}$.

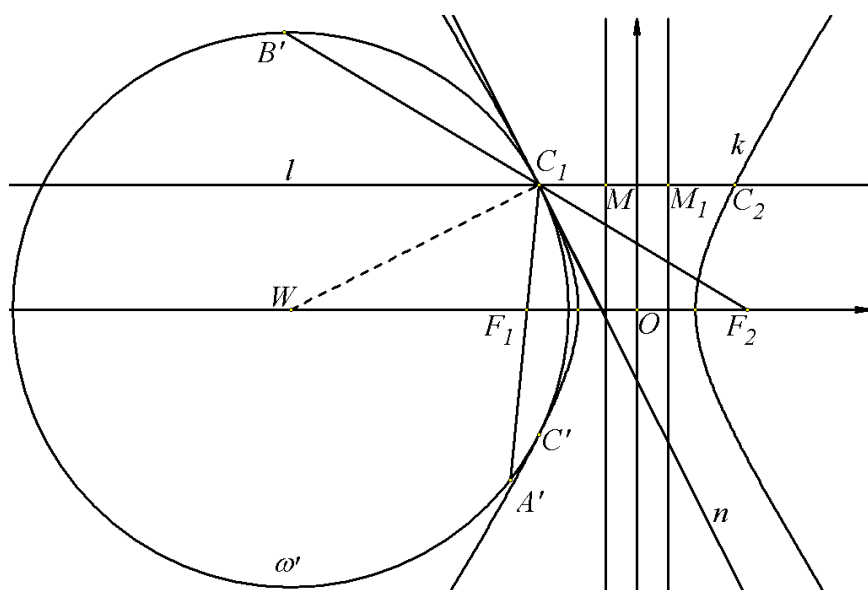


Решение. Разглеждаме случая, когато k е елипса. Както в задача 3, обобщаваме окръжностите ω' и ω'' с ω . Нека W_0 е пресечната точка на правите n (която е перпендикулярна на допирателната t и се явява симетрала на AB) и фокалната ос на k . Ще докажем, че W_0 е център на ω , т.е. тя обобщава центровете Ω'_0 и Ω''_0 съответно на окръжностите ω' и ω'' . От (15) при $y = 0$ получаваме, че $W_0\left(\frac{c^2x_C}{a^2}, 0\right)$. Ако r_0 е разстоянието между точките W_0 и C , от координатите им следва

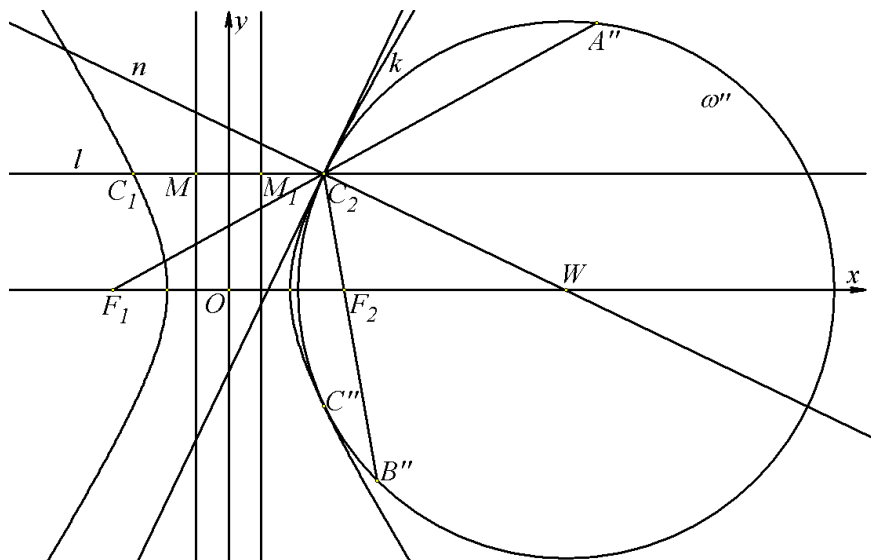
$$(21) \quad r_0^2 = \frac{c^2y_M^2 + b^4}{a^2} = \frac{b^2(a^4 - c^2x_C^2)}{a^4}.$$



От (21) получим, че окръжността w с център W и радиус r_0 има следното уравнение



От (11) и (22) получаваме $(x - x_C)^2 = 0$. Следователно системата, образувана от уравненията (11) и (22), има две двукратни решения (x_C, y_M) и $(x_C, -y_M)$, т.е. w се допира до k в точките $C(x_C, y_M)$ и $C'(x_C, -y_M)$. По този начин установихме твърдение а).



От уравненията (19) и (22) намираме координатите на точките $A' = CF_1 \cap w$ и $B' = CF_2 \cap w$ ($A' \neq C$ и $B' \neq C$) във вида:

$$x_{A'} = \frac{2c^3 x_C^2 + (2c^4 - a^4)x_C - 2a^2 b^2 c}{a^2 [y_M^2 + (x_C + c)^2]}, \quad y_{A'} = \frac{y_M [c^2 x_C^2 + 2c^3 x_C + a^2 (c^2 - b^2)]}{a^2 [y_M^2 + (x_C + c)^2]},$$

$$x_{B'} = \frac{c^2 x_C^3 - 2c^3 x_C^2 + (2c^4 - a^4)x_C + 2a^2 b^2 c}{a^2 [y_M^2 + (x_C - c)^2]}, \quad y_{B'} = \frac{y_M (c^2 x_C^2 - 2c^3 x_C + a^4)}{a^2 [y_M^2 + (x_C - c)^2]}.$$

От тези координати се получават равенствата:

$$CA' = \frac{2b^2(cx_c - a^2)}{a^2\sqrt{y_M^2 + (x_c + c)^2}} = \frac{2b^2c.CM}{a^2CF_1} = \frac{2b^2}{ea}, \quad CB' = \frac{2b^2(cx_c + a^2)}{a^2\sqrt{y_M^2 + (x_c - c)^2}} = \frac{2b^2c.CM}{a^2CF_2} = \frac{2b^2c}{ea^2}.$$

С това твърденията на задачата са напълно доказани за елипси. Аналогично се получава доказателството и за хиперболи. В този случай радиусът на w се пресмята по формулата

$$(21') \quad r_0^2 = \frac{b^2(c^2 x_C^2 - a^4)}{a^4}.$$

От задача 4 б) следва изводът: разстоянията C_1A' , C_1B' , C_2A'' и C_2B'' не зависят от положението на точката M върху директрисата.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Martinov, N. (1989). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Modenov, P. (1969). *Analytical geometry*. Moscow: Moscow University Press. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Московского университета.]
- Stanilov, G. (1979). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.]

SEVERAL PROBLEMS FOR CIRCLES TANGENT TO CONICS

Abstract. Several problems are considered for circles which are tangent to conics and are determined by points on the directress of the conic.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College, Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg