Educational Technologies
Образователни технологии

НЯКОЛКО СВОЙСТВА НА ЕДИН ВИД КРИВИ, ПОРОДЕНИ ОТ ТОЧКА НА НАГЕЛ

[1]Сава Гроздев, [2]Веселин Ненков
[1]Институт по математика и информатика – БАН
[2]Технически колеж – Ловеч

Резюме. В настоящата статия е описано обобщение на една геометрична задача от международната олимпиада по математика през 2013 г.
Keywords: triangle, conic, Ceva circle, Ceva curve, Feuerbach configuration, Nagel point, GSP.

За някои геометрични твърдения може да се каже, че притежават естествени обобщения. Често най-естественото обобщение е скрито в особено построение, което съдържа някои специални конструкции. Пример за такова твърдение е следната задача от международната олимпиада по математика през 2013 г.: *Външновписаните окръжности $\Gamma_a(I_a)$, $\Gamma_b(I_b)$ и $\Gamma_c(I_c)$ на ΔABC се допират до страните му BC, CA и AB съответно в точките A_1, B_1 и C_1. Да се докаже, че ако центърът на описаната около $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност k лежи върху описаната окръжност $\Gamma(O)$ на ΔABC, то ΔABC е правоъгълен.* (Гроздев&Ненков, 2013)

Допирните точки на $\Gamma_a(I_a)$, $\Gamma_b(I_b)$ и $\Gamma_c(I_c)$ съответно с BC, CA и AB, свързани със срещуположните им върхове, образуват чевиани, които се пресичат в добре познатата точка на Нагел за ΔABC (Паскалев & Чобанов, 1985). Освен това всяко описано за ΔABC конично сечение се свързва с еднозначно определени вписани в ΔABC конични сечения, които също определят точки на Нагел. Конструкцията, съдържаща тези конични сечения, наричаме Фойербахова конфигурация (Ненков, 2010).

От друга страна, петите на чевианите през произволна точка P от равнината на ΔABC лежат на една окръжност – наричаме я окръжност на Чева. Тази окръжност пресича за втори път страните на ΔABC в точки, които, свързани със срещуположните им върхове, образуват чевиани през точка P' (Хитов, 1990). По отношение на произволно описано за ΔABC конично сечение $\overline{k}(O)$ чрез специална конструкция на всяка точка P еднозначно може да се съпостави точка P', така че петите на чевианите през точките P и P' определят конично сечение, което наричаме крива на Чева за точката P (и P'). Когато $\overline{k}(O)$ съвпадне с описаната за ΔABC окръжност, кривата на Чева преминава в окръжността на Чева за точките P и P' (Гроздев & Ненков, 2014).

Въз основа на тези две наблюдения можем да очакваме, че най-естественото обобщение на олимпиадната задача се получава при разглеждане на кривата на Чева за точка на Нагел в подходяща Фойербахова конфигурация. Затова в началото трябва да припомним какво по-точно определяме като Фойербахова конфигурация и крива на Чева.

Обичайните изследвания, които извършваме върху свойствата на Фойербахови конфигурации и криви на Чева, осъществяваме с помощта на барицентрични координати. Затова в по-нататъшните изследвания ще използваме барицентрични координати спрямо даден ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Средите на страните BC, CA и AB означаваме съответно с $M_a\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Освен това в построяването на коничните сечения и забелязването на някои от техните свойства ще използваме конструктивните и динамични възможности на програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP).

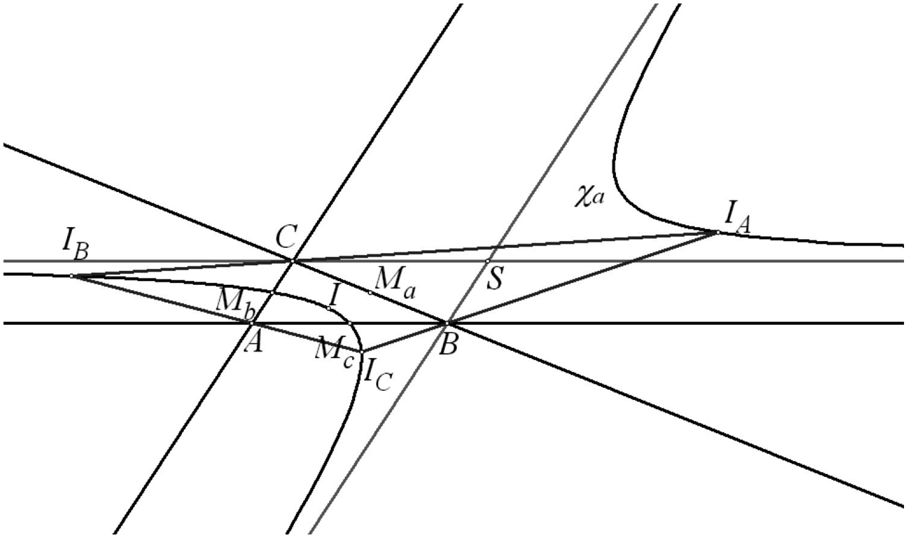
1. Фойербахови конфигурации. Нека $I(x_I,y_I,z_I)$ $(x_I+y_I+z_I=1)$ е произволна точка от равнината на ΔABC, нележаща на никоя от правите BC, CA, AB, M_bM_c, M_cM_a и M_aM_b. Спрямо ΔABC точката I има спрегнат триъгълник $I_AI_BI_C$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Точките $I(x_I,y_I,z_I)$, $I_A\left(-\frac{x_I}{1-2x_I},\frac{y_I}{1-2x_I},\frac{z_I}{1-2x_I}\right)$, $I_B\left(\frac{x_I}{1-2y_I},-\frac{y_I}{1-2y_I},\frac{z_I}{1-2y_I}\right)$ и $I_C\left(\frac{x_I}{1-2z_I},\frac{y_I}{1-2z_I},-\frac{z_I}{1-2z_I}\right)$ са центрове на конични сечения $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$, вписани в ΔABC. Средите на отсечките $I\ A$, $I\ B$, $I\ C$, I_BI_C, I_CI_A и I_AI_B лежат на конично сечение $\overline{k}(O)$, описано за ΔABC (Ненков, 2010). От резултатите, получени в (Ненков, 2008), следва, че уравнението на кривата $\overline{k}(O)$ и координатите на центъра й O са съответно следните:

$$(1)\qquad \overline{k}(O): x_I^2yz+y_I^2zx+z_I^2xy=0,$$

$$(2)\quad O\left(\frac{(1-2x_I-2y_Iz_I)x_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)},\frac{(1-2y_I-2z_Ix_I)y_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)},\frac{(1-2z_I-2x_Iy_I)z_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}\right).$$

Коничните сечения $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\overline{k}(O)$ са обвързани с редица общи свойства. Поради едно от тях ще казваме, че те са елементи на една *Фойербахова конфигурация* (Ненков, 2010).

Всяка от кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\overline{k}(O)$ чрез центъра си определя еднозначно останалите. Изключения се получават само когато центърът O съвпада с някоя от точките M_a, M_b и M_c. Ако $O \equiv M_a$, коничното сечение $\overline{k}(O)$ не е определено еднозначно от центъра си. Затова ще го определим с помощта на центъра I на съответното му вписано конично сечение $k(I)$. От (2) следва, че $O \equiv M_a$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $1-2x_I-2y_Iz_I=0$. Последното равенство означава, че точката I лежи на хиперболата χ_a, която има уравнение $\chi_a : 1-2x-2yz=0$ (тази хипербола има за център точката, симетрична на A спрямо M_a, а асимптотите ѝ са успоредни на AC и AB (фиг. 1)). Нека сега I е точка от хиперболата χ_a. Точката I е център на единствено конично сечение $k(I)$, което е вписано в ΔABC. Освен това точката I има спрямо ΔABC спрегнат триъгълник $I_AI_BI_C$. Средите на отсечките I_A, I_B, I_C, I_BI_C, I_CI_A и I_AI_B ще лежат на описано около ΔABC конично сечение $\overline{k}(M_a)$, което има за център точката M_a. Обратно, на така получената крива $\overline{k}(M_a)$ можем да съпоставим кривата $k(I)$, от която е получена. По този начин получаваме съответствие между вписаните конични сечения $k(I)$ с центрове върху хиперболата χ_a и описаните



Фигура 1

конични сечения с център M_a. Освен това след заместване на координатите на точките I_A, I_B и I_C в уравнението на χ_a, лесно се установява, че те също лежат на χ_a (фиг. 1). Следователно всяка от тези точки поражда същата крива $\overline{k}(M_a)$, както и точката I. Така всяка от точките I, I_A, I_B и I_C поражда по единствен начин кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\overline{k}(M_a)$. Поради специалните положения, които имат центровете на кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\overline{k}(M_a)$, ще казваме, че те са елементи на *специална Фойербахова конфигурация*.

По аналогичен начин се получават специални Фойербахови конфигурации, в които участват описани за ΔABC конични сечения с центрове точките M_b и M_c. Когато кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\overline{k}(O)$ са елементи на Фойербахова конфигурация, за която $O \notin \{M_a, M_b, M_c\}$, ще казваме още, че разглеждаме *обща Фойербахова конфигурация*. Тъй като произволна Фойербахова конфигурация може да се разглежда като породена само от точката I (център на вписана в ΔABC крива), то всички аналитични резултати ще зависят само от координатите на I. Затова произволна специална Фойербахова конфигурация притежава всички свойства, които имат общите Фойербахови конфигурации. Тъй като за една специална Фойербахова конфигурация е изпълнено едно от равенствата $1-2x_I-2y_Iz_I=0$, $1-2y_I-2z_Ix_I=0$, $1-2z_I-2x_Iy_I=0$, тя притежава и по-специални свойства. Такова специално и основно свойство е, че по отношение на специалните Фойербахови конфигурации всеки триъгълник се държи като правоъгълен триъгълник. Този факт ясно ще се прояви в обобщението на олимпиадната задача.

2. Крива на Чева за точка на Нагел. Нека кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\overline{k}(O)$ са елементи на една Фойербахова конфигурация и $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ се допират до BC, CA и AB съответно в точките

$$A_1\left(0,\frac{1-2y_I}{2x_I},\frac{1-2z_I}{2x_I}\right),\ B_1\left(\frac{1-2x_I}{2y_I},0,\frac{1-2z_I}{2y_I}\right),\ C_1\left(\frac{1-2x_I}{2z_I},\frac{1-2y_I}{2z_I},0\right).$$

Правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка $N(1-2x_I, 1-2y_I, 1-2z_I)$, която ще наричаме *точка на Нагел за ΔABC спрямо тройката криви $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$* (Ненков, 2010). По аналогичен начин спрямо тройките криви $k(I)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$; $k(I)$, $k(I_C)$ и $k(I_A)$; $k(I)$, $k(I_A)$ и $k(I_B)$ се получават точките на Нагел $N_A\left(\frac{1}{1-2x_I},\frac{2z_I-1}{1-2x_I},\frac{2y_I-1}{1-2x_I}\right)$, $N_B\left(\frac{2z_I-1}{1-2y_I},\frac{1}{1-2y_I},\frac{2x_I-1}{1-2y_I}\right)$, $N_C\left(\frac{2y_I-1}{1-2z_I},\frac{2x_I-1}{1-2z_I},\frac{1}{1-2z_I}\right)$ (Ненков, 2010). Ще обърнем специално внимание на точката N, защото останалите точки на Нагел се получават, като заменим вписаната крива $k(I)$ с $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$. От резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2014), е известно, че през точките A_1, B_1 и C_1 минава крива от втора степен, уравнението на която може да се запише по следния начин

$$\overline{c}_N : k\left(x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy\right) + \left(a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z\right)\left(x + y + z\right) = 0,$$

където

$$k = \frac{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)(1-4x_I)(1-4y_I)(1-4z_I)}{4x_I y_I z_I},$$

$$a_{11} = (1-2y_I)(1-2z_I)\left[4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)\right],$$

$$a_{22} = (1-2z_I)(1-2x_I)\left[4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)\right],$$

$$a_{33} = (1-2x_I)(1-2y_I)\left[4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)\right].$$

Кривата $\overline{c}_N$ наричаме *крива на Чева за точката на Нагел* N. Кривата на Чева $\overline{c}_N$, както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), пресича за втори път правите BC, CA, AB съответно в точките

$$A_2\left(0, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)}{2x_I(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)}{2x_I(1-2y_I)(1-2z_I)}\right),$$

$$B_2\left(\frac{4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)}{2y_I(1-2z_I)(1-2z_I)}, 0, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)}{2y_I(1-2z_I)(1-2z_I)}\right),$$

$$C_2\left(\frac{4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)}{2z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)}{2z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}, 0\right).$$

Тези точки заедно с върховете определят правите AA_2, BB_2 и CC_2, които минават през една точка N', чиито координати се изразяват по следния начин:

$$x_{N'} = \frac{\left[4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)\right]\left[4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)\right]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$y_{N'} = \frac{\left[4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)\right]\left[4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)\right]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$z_{N'} = \frac{\left[4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)\right]\left[4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)\right]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1}.$$

Относно координатите на центъра $O(N)$ на кривата на Чева $\overline{c}_N$ в (Гроздев & Ненков, 2014) е показано, че те се определят с равенствата

$$x_{O(N)}=\frac{x_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2}\times\Big\{x_I(1-2x_I)^2(1-2y_I)(1-2z_I)+$$
$$+\big[(1-2y_I-2z_Ix_I)(1-2z_I-2x_Iy_I)-x_I(1-2y_I)(1-2z_I)\big](1-2x_I-2y_Iz_I)\Big\},$$
$$y_{O(N)}=\frac{y_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2}\times\Big\{y_I(1-2y_I)^2(1-2z_I)(1-2x_I)+$$
$$+\big[(1-2z_I-2x_Iy_I)(1-2x_I-2y_Iz_I)-y_I(1-2z_I)(1-2x_I)\big](1-2y_I-2z_Ix_I)\Big\},$$
$$z_{O(N)}=\frac{z_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2}\times\Big\{z_I(1-2z_I)^2(1-2x_I)(1-2y_I)+$$
$$+\big[(1-2x_I-2y_Iz_I)(1-2y_I-2z_Ix_I)-z_I(1-2x_I)(1-2y_I)\big](1-2z_I-2x_Iy_I)\Big\}.$$

Едно забележително свойство на центъра на кривата на Чева $\overline{c}_N$ е, че при произволна Фойербахова конфигурация той лежи върху правата, определена от точките N и N' (Гроздев & Ненков, 2014). В следващия пункт ще покажем още едно свойство на центъра $O(N)$, което е свързано със специалните Фойербахови конфигурации и една специална крива от трета степен в равнината на ΔABC.

3. Необходими и достатъчни условия центърът $O(N)$ да лежи върху описаната крива $\overline{k}(O)$. Едно обобщение на формулираната в началото задача е направено в (Гроздев & Ненков, 2013). Сега ще покажем обобщение, в което основните геометрични елементи се обхващат по естествен начин от специални Фойербахови конфигурации. Нека N е точка на Нагел, принадлежаща на Фойербахова конфигурация, съдържаща кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\overline{k}(O)$, а $\overline{c}_N$ е съответната ӣ крива на Чева. От (1) следва, че центърът $O(N)$ на $\overline{c}_N$ ще лежи върху $\overline{k}(O)$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$x_I^2y_{N(O)}z_{N(O)}+y_I^2z_{N(O)}x_{N(O)}+z_I^2x_{N(O)}y_{N(O)}=0.$$

След заместване в това равенство на координатите на центъра $N(O)$ получаваме

$$\frac{x_Iy_Iz_I}{(1-2x_I)^3(1-2y_I)^3(1-2z_I)^3}\times$$
$$\times\big[2x_Iy_Iz_I-(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)\big](1-2x_I-2y_Iz_I)(1-2y_I-2z_Ix_I)(1-2z_I-2x_Iy_I)=0.$$

Последното равенство показва, че е изпълнено следното

Твърдение 1. *Една Фойербахова конфигурация за ΔABC притежава точка на Нагел, чиято крива на Чева има за център точка от описаната крива, тогава и само тогава, когато един от центровете на вписаните в ΔABC криви лежи* *върху някоя от кривите:* $K: 2xyz-(1-2x)(1-2y)(1-2z)=0$, $\chi_a: 1-2x-2yz=0$, $\chi_b: 1-2y-2zx=0$, $\chi_c: 1-2z-2xy=0$.

От Твърдение 1 се получават някои интересни следствия. Първо да отбележим, че видът на кривата $\bar{k}(O)$ се определя от общите решения на уравнението ѝ (1) и уравнението на безкрайната права $x+y+z=0$. От тези уравнения се получава $y_I^2x^2+\left(x_I^2+y_I^2-z_I^2\right)xy+x_I^2y^2=0$. Последното уравнение има реални решения само когато изразът $D=-\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\left(1-2z_I\right)$ е положителен. В тези случаи $\bar{k}(O)$ е хипербола, а в останалите – елипса. Ако $I\in K$, то е изпълнено $D=-2x_Iy_Iz_I$. От друга страна, точките от K, които са различни от M_a, M_b и M_c, имат една отрицателна и две положителни координати (фиг. 2). Следователно, когато $I\in K$, кривата $\bar{k}(O)$ е хипербола. Така получаваме следното

Следствие 1. *Ако $I\in K$, то съответната Фойербахова конфигурация за ΔABC се състои от хиперболи* (фиг. 2).

Оттук следва още

Следствие 2. *Ако една Фойербахова конфигурация за ΔABC не е специална и се състои от елипси, тя не притежава точка на Нагел, чиято крива на Чева има за център точка от описаната крива $\bar{k}(O)$.*

От следствие 2 непосредствено се получава

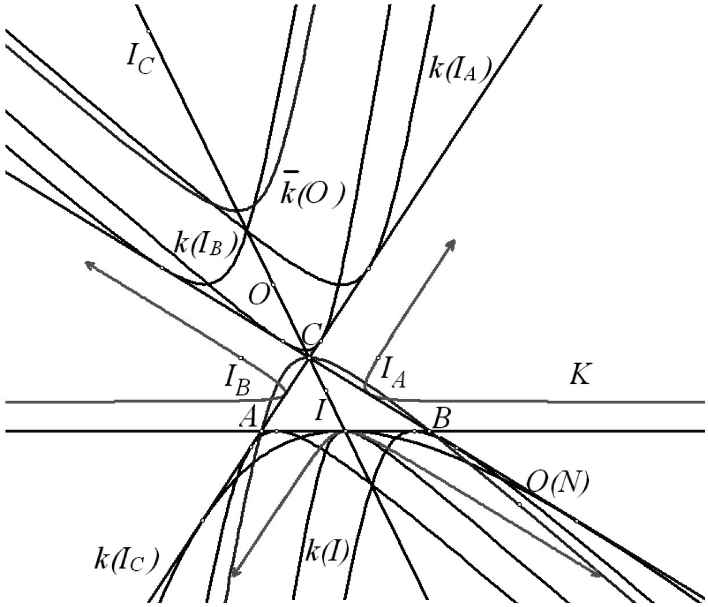
Следствие 3. *Ако центърът O на описаната окръжност $\bar{k}(O)\equiv\Gamma(O)$ не лежи върху страна на ΔABC, съответната Фойербахова конфигурация за ΔABC, състояща се от окръжности, не притежава точка на Нагел, чиято окръжност на Чева има център, лежащ на $\bar{k}(O)$.*

Ако $I\in K$, можем да предположим, че някоя от точките I_A, I_B и I_C също лежи върху K. Това е възможно, когато освен $2x_Iy_Iz_I-\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\left(1-2z_I\right)=0$ е изпълнено и поне едно от равенствата $2x_Iy_Iz_I+\left(1-2y_I\right)\left(1-2z_I\right)=0$, $2x_Iy_Iz_I+\left(1-2z_I\right)\left(1-2x_I\right)=0$, $2x_Iy_Iz_I+\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)=0$. Лесно се проверява, че от тези четири равенства едновременно могат да бъдат изпълнени най-много две. Следователно

Следствие 4. *Ако $I\in K$, то съответната Фойербахова конфигурация за ΔABC притежава най-много две точки на Нагел, чиито криви на Чева имат центрове, лежащи върху описаната крива $\bar{k}(O)$.*

В случай че I_A и I_B са двете точки, лежащи върху K (фиг. 2), то центровете на вписаните криви координатно се представят по следния начин:

$$I\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\frac{-2+\sqrt{6}}{2},3-\sqrt{6}\right),\qquad I_A\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},1\right),\qquad I_B\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},1\right),$$



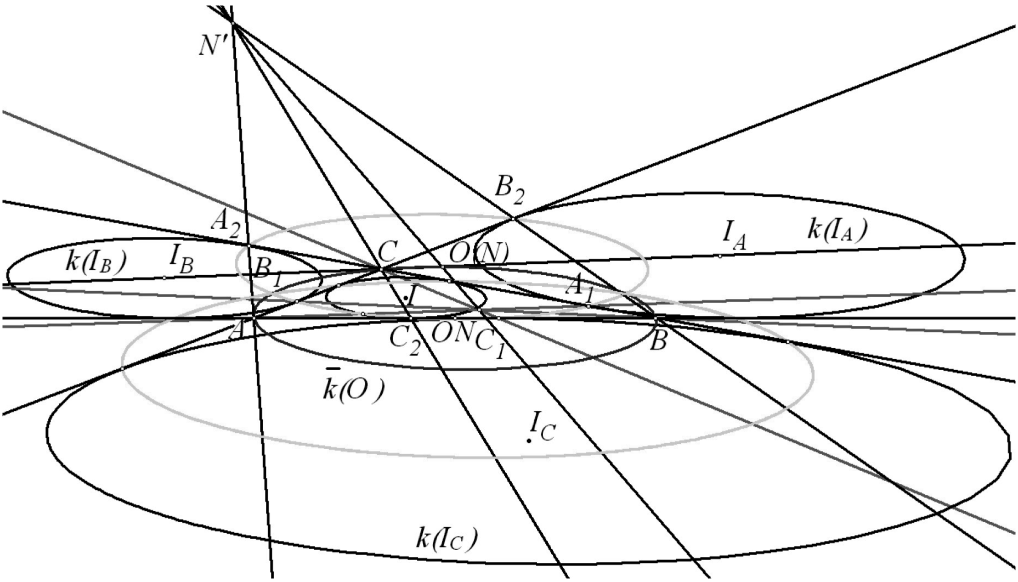
Фигура 2

$I_C\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2},\frac{-2-\sqrt{6}}{2},3+\sqrt{6}\right)$ или $I\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2},\frac{-2-\sqrt{6}}{2},3+\sqrt{6}\right)$, $I_A\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},1\right)$, $I_B\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},1\right)$, $I_C\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\frac{-2+\sqrt{6}}{2},3-\sqrt{6}\right)$. От тези координати се вижда, че точките I_A и I_B лежат на правата през върха C, която е успоредна на AB. Освен това тези точки са равно отдалечени от C.

Нека сега точката I лежи върху някоя от хиперболите χ_a, χ_b или χ_c. Тогава породената от I Фойербахова конфигурация за ΔABC е специална. Както беше отбелязано, в този случай точките I_A, I_B и I_C лежат върху същата хипербола. Така от твърдение 1 непосредствено се получава търсеното естествено обобщение на формулираната в началото задача във вид на следното

Следствие 5. *За произволна специална Фойербахова конфигурация за ΔABC всяка точка на Нагел има крива на Чева, центърът на която лежи върху описаната крива $\overline{k}(O)$* (Фиг. 3).

От следствие 5 и следствие 3 се вижда, че олимпиадната задача (за класическата точка на Нагел) се уточнява в следното



Фигура 3

Следствие 6. *Центърът на окръжността на Чева за точката на Нагел лежи върху описаната окръжност на ΔABC тогава и само тогава, когато ΔABC е правоъгълен.*

Тъй като всяка Фойербахова конфигурация притежава четири точки на Нагел, от следствие 5 можем да останем с впечатление, че за произволна специална Фойербахова конфигурация точките на Нагел имат четири криви на Чева, центровете на които лежат върху $\bar{k}(O)$. Оказва се обаче, че тези криви са две. За да обосновем това, ще уточним положението на центъра на кривата на Чева за точката на Нагел N върху $\bar{k}(O)$, когато $I \in \chi_c$. В този случай е изпълнено равенството $1-2z_I-2x_I y_I=0$.

След заместване на последното равенство в координатите на центъра $O(N)$ получаваме $O(N)\left(\dfrac{x_I(-x_I+y_I)}{(1-2x_I)(1-2y_I)},\dfrac{y_I(-y_I+x_I)}{(1-2x_I)(1-2y_I)},\dfrac{z_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)}\right)$. Но точката, която има такива координати, е средата на отсечката $I_A I_B$. Следователно $O(N)$ е средата на $I_A I_B$ (фиг. 3). След заместване на същото равенство в координатите на N' получаваме $N'\left(\dfrac{2y_I-1}{1-2z_I},\dfrac{2x_I-1}{1-2z_I},\dfrac{1}{1-2z_I}\right)$, т.е. $N' \equiv N_C$. Следователно точките N и N_C

имат обща крива на Чева $\overline{c}_N$, чийто център е средата на $I_A I_B$ (Фиг. 3). Оттук следва още, че точките $A_2\left(0,\dfrac{2x_I-1}{2x_I},\dfrac{1}{2x_I}\right)$, $B_2\left(\dfrac{2y_I-1}{2y_I},0,\dfrac{1}{2y_I}\right)$ и $C_2\left(\dfrac{1-2y_I}{2z_I},\dfrac{1-2x_I}{2z_I},0\right)$ са допирните точки на $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I)$ съответно с правите BC, CA и AB (фиг. 3). Сега, ако в горните разсъждения заменим точката I с I_A (или I_B), получаваме, че точките на Нагел N_A и N_B имат обща крива на Чева $\overline{\overline{c}}_N$, чийто център е средата на отсечката II_C. Кривата $\overline{\overline{c}}_N$ минава през останалите шест допирни точки на кривите k (I), k (I_A), k (I_B) и k (I_C) с правите BC, CA и AB, които не принадлежат на $\overline{c}_N$ (фиг. 3). Освен това центровете на $\overline{c}_N$ и $\overline{\overline{c}}_N$ са диаметрално противоположни точки за описаната крива $\overline{k}(O)$.

Последните резултати обобщаваме в следващите следствия.

Следствие 7. *При всяка специална Фойербахова конфигурация за* ΔABC *центърът на кривата на Чева за произволна точка на Нагел е средата на някоя от отсечките* $I_A I_B$, $I_B I_C$, $I_C I_A$, II_A, II_B *и* II_C.

Следствие 8. *Ако* $I \in \chi_c$, *то допирните точки на* $k(I_A)$, $k(I_B)$ *и* $k(I)$ *съответно с правите* BC, CA *и* AB *лежат на кривата на Чева* $\overline{c}_N$.

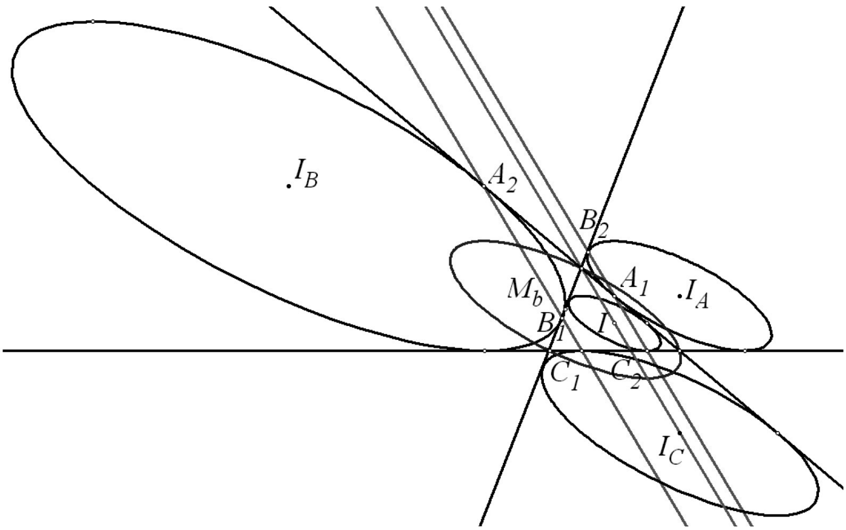
Следствие 9. *Ако* $I \in \chi_c$, *то точките на Нагел* N *и* N_C *имат обща крива на Чева* $\overline{c}_N$.

Следствие 10. *При всяка специална Фойербахова конфигурация за* ΔABC *точките на Нагел имат две криви на Чева, центровете на които са диаметрално противоположни точки за описаната крива* $\overline{k}(O)$.

4. Едно обобщение на кривата на Чева за точка на Нагел. От следствие 8 се вижда, че когато $O \equiv M_c$, допирните точки A_2, B_2 и C_2 на $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I)$ съответно с правите BC, CA и AB лежат на кривата на Чева $\overline{c}_N$ за точката на Нагел N, минаваща през допирните точки A_1, B_1 и C_1 на $k(I_A)$, $\overline{k}(I_B)$ и $k(I_C)$ съответно с правите BC, CA и AB. От друга страна, при произволна Фойербахова конфигурация двете тройки точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 са пети на две тройки чевиани за ΔABC, минаващи през точките на Нагел N и N_C. Но в (Гроздев & Ненков, 2009) е показано, че шест точки от страните на триъгълник с тези свойства лежат на една крива от втора степен. Следователно е изпълнено следното

Твърдение 2. *При произволна Фойербахова конфигурация за* ΔABC *допирните точки* $A_1\left(0,\dfrac{1-2y_I}{2x_I},\dfrac{1-2z_I}{2x_I}\right)$, $B_1\left(\dfrac{1-2x_I}{2y_I},0,\dfrac{1-2z_I}{2y_I}\right)$, $C_1\left(\dfrac{1-2x_I}{2z_I},\dfrac{1-2y_I}{2z_I},0\right)$,

$A_2\left(0,\frac{2x_I-1}{2x_I},\frac{1}{2x_I}\right)$, $B_2\left(\frac{2y_I-1}{2y_I},0,\frac{1}{2y_I}\right)$, $C_2\left(\frac{1-2y_I}{2z_I},\frac{1-2x_I}{2z_I},0\right)$ *лежат на една крива от втора степен* $K\left(N,N_C\right)$.



Фигура 4

От координатите на точките на Нагел $N\left(1-2x_I,1-2y_I,1-2z_I\right)$ и $N_C\left(\frac{2y_I-1}{1-2z_I},\frac{2x_I-1}{1-2z_I},\frac{1}{1-2z_I}\right)$, както и от резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2009), следва, че уравнението на кривата $K\left(N,N_C\right)$ може да се представи по следния начин $K\left(N,N_C\right)$:

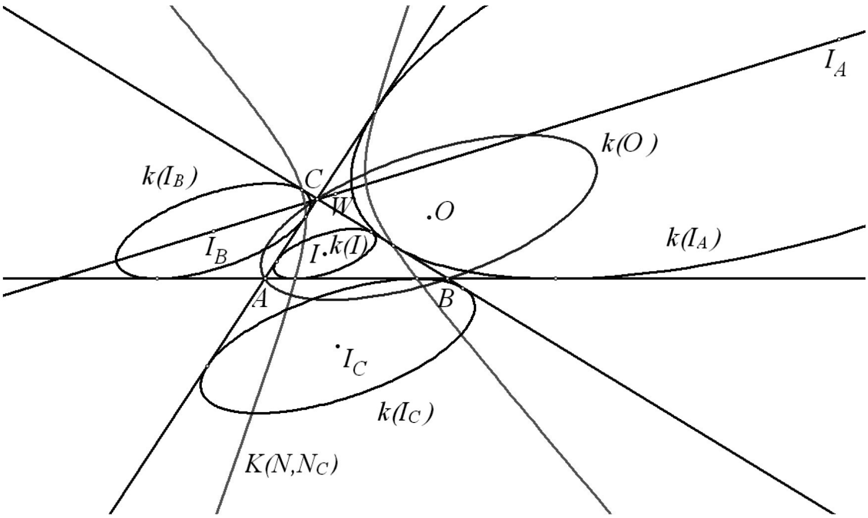
$$\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\left(1-2z_I\right)x^2+\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\left(1-2z_I\right)y^2-$$

$$-\left(1-2x_I\right)^2\left(1-2y_I\right)^2z^2-2\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\left(1-2y_I-2z_Ix_I\right)yz-$$

$$-\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\left(1-2x_I-2y_Iz_I\right)zx-\left[\left(1-2x_I\right)^2+\left(1-2y_I\right)^2\right]\left(1-2z_I\right)xy=0.$$

Всъщност след заместване на координатите на точките A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 и C_2 в последното уравнение непосредствено се установява, че тези точки лежат на кривата $K\left(N,N_C\right)$. По този начин получаваме още едно доказателство на твърдение 2.

Нека сега забележим, че от координатите на точките A_1, B_1, A_2 и B_2 се получават векторните равенства $\overrightarrow{A_2B_1}=\frac{1-2x_I}{2x_Iy_I}\overrightarrow{CI}$ и $\overrightarrow{B_2A_1}=\frac{1-2y_I}{2x_Iy_I}\overrightarrow{CI}$. Следователно



Фигура 5

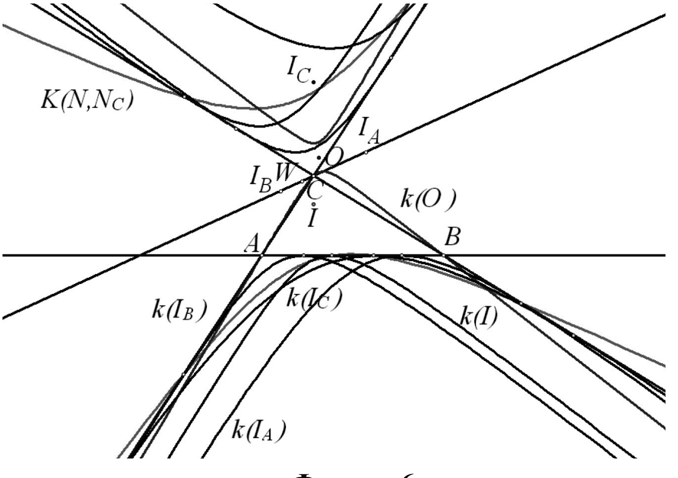
$A_2B_1 \parallel B_2A_1 \parallel CI$. Оттук следва, че ако $K(N,N_C)$ е изродена крива, тя се състои от две успоредни прави. Такива успоредни прави могат да се получат в следните два случая: 1) когато са колинеарни двете тройки точки (A_2,B_1,C_2) и (A_1,B_2,C_1); 2) когато са колинеарни двете тройки точки (A_2,B_1,C_1) и (A_1,B_2,C_2). Според теоремата на Менелай случай 1) е възможен точно когато са изпълнени равенствата $\dfrac{\overline{BA_2}}{\overline{CA_2}}.\dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}.\dfrac{\overline{AC_2}}{\overline{BC_2}}=1$ и $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}.\dfrac{\overline{CB_2}}{\overline{AB_2}}.\dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=1$. Пресмятанията показват, че и двете равенства са изпълнени тогава и само тогава, когато е в сила равенството $1-2x_I-2y_Iz_I=0$. Последното, както знаем, е изпълнено тогава и само тогава, когато $O\equiv M_a$. Аналогично се проверява, че случай 2) е възможен тогава и само тогава, когато е в сила равенството $1-2y_I-2z_Ix_I=0$, т.е. тогава и само тогава, когато $O\equiv M_b$ (Фиг. 4). Така получихме следното

Твърдение 3. *Кривата* $K(N,N_C)$ *се състои от две успоредни прави тогава и само тогава, когато* $O\equiv M_a$ *или* $O\equiv M_b$ (фиг. 4).

Случаите, в които кривата $K(N,N_C)$ не е изродена, тя притежава еднозначно определен център W. Ако $P\left(\dfrac{1-2x_I}{4y_I},\dfrac{2x_I-1}{4x_I},\dfrac{x_I(1-2z_I)+y_I}{4x_Iy_I}\right)$ и

$Q\left(\frac{2y_I-1}{4y_I},\frac{1-2y_I}{4x_I},\frac{y_I(1-2z_I)+x_I}{4x_Iy_I}\right)$ са среди съответно на отсечкитеA_2B_1 и B_2A_1, то е изпълнено равенството $\overrightarrow{PQ}=\frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{4x_Iy_I}\overrightarrow{I_AI_B}$. Оттук следва, че точките P и Q лежат на правата I_AI_B. Следователно четириъгълникът $A_1B_2A_2B_1$ е трапец, а правата I_AI_B минава през средите на основите му. Тъй като всяка крива от втора степен, която е описана около трапец, има за център точка, лежаща на правата през средите на основите му, то центърът W на $K(N, N_C)$ лежи върху правата I_AI_B. С това установихме следното

Твърдение 4. *Центърът W на неизродената крива $K(N, N_C)$ лежи върху правата I_AI_B* (Фиг. 5, 6, 7, 8, 9).



Фигура 6

Това свойство на центъра W позволява лесно да определим координатите му. Нека правата $l: x=t,\ y=\frac{2x_I-1}{2x_I}-t,\ z=\frac{1}{2x_I}$, която минава през точката A_2 и е успоредна на правата $C_1C_2\equiv AB$, пресича за втори път $K(N,N_C)$ в точката A_2'. От уравненията на l и $K(N,N_C)$ за координатите на A_2' намираме

$A_2'\left(\frac{(2x_I-1)\left[(1-2z_I)z_I^2+(1-2y_I)(x_I^2-y_I^2)\right]}{2x_Iz_I^2(1-2z_I)},\frac{(1-2x_I)(1-2y_I)(x_I^2-y_I^2)}{2x_Iz_I^2(1-2z_I)},\frac{1}{2x_I}\right)$. Сега правата през средите на отсечките A_2A_2' и C_1C_2 (която е M_c) пресича I_AI_B в центъра W. От уравненията на тези прави намираме координатите на W във вида

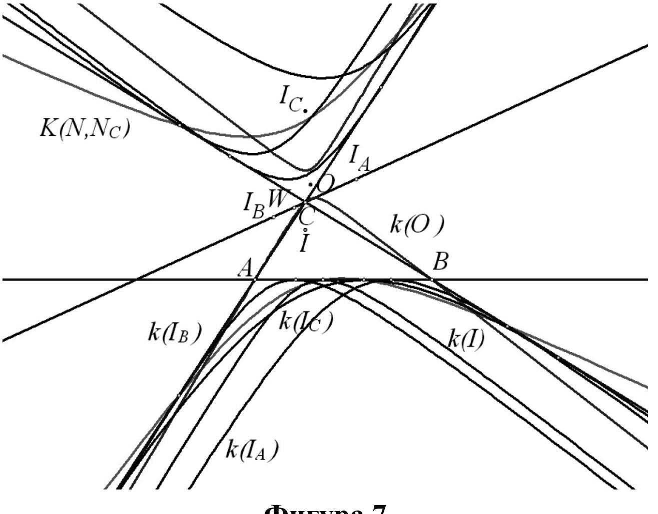
$$x_W = \frac{x_I(1-2x_I)(1-2y_I)(y_I-x_I)}{z_I^2(1-2z_I)-(1-2x_I)(1-2y_I)(x_I-y_I)^2},$$

$$y_W = \frac{y_I(1-2x_I)(1-2y_I)(x_I-y_I)}{z_I^2(1-2z_I)-(1-2x_I)(1-2y_I)(x_I-y_I)^2},$$

$$z_W = \frac{z_I^2(1-2z_I)}{z_I^2(1-2z_I)-(1-2x_I)(1-2y_I)(x_I-y_I)^2}.$$

В твърдение 3 са определени случаите, в които кривата $K(N, N_C)$ е изродена. Тъй като конструкцията на $K(N, N_C)$ е твърде обща, не може да се очаква, че видът й в останалите случаи се определя по прост начин, както в твърдение 3. Наблюденията с GSP обаче показват, че видът на $K(N, N_C)$ запазва известно постоянство в зависимост от положението на центъра O на описаната крива $\bar{k}(O)$. За да определим вида на $K(N, N_C)$, необходимо е да определим броя на общите точки на $K(N, N_C)$ и безкрайната права $x+y+z=0$. От уравненията на $K(N, N_C)$ и безкрайната права намираме

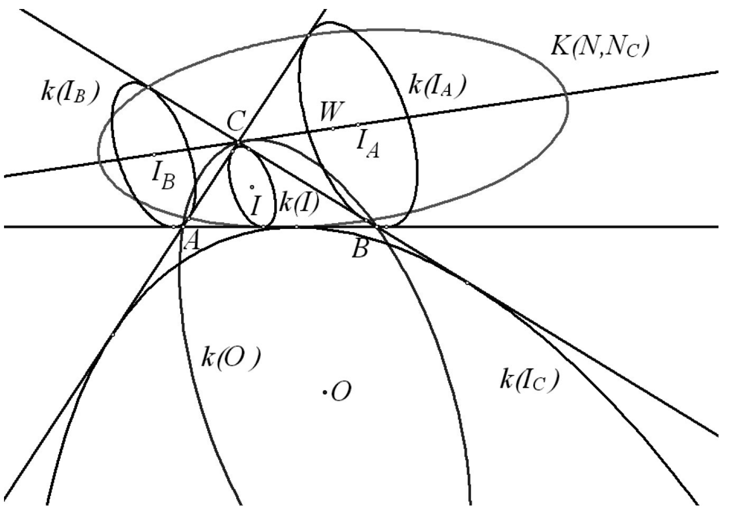
$$2y_I^2(1-2x_I)(1-2y_I)x^2+2x_I^2(1-2x_I)(1-2y_I)y^2-$$
$$-(1-2z_I-2x_Iy_I)\left[(1-2x_I)^2+(1-2y_I)^2\right]xy=0.$$



Фигура 7

Оттук следва, че видът на $K(N, N_C)$ зависи от знака на израза

$$\begin{aligned}\overline{D} &= -4\left(1-2x_I-2y_Iz_I\right)\left(1-2y_I-2z_Ix_I\right)\times\\ &\times\left[-\left(1-2x_I-2y_Iz_I\right)\left(1-2y_I-2z_Ix_I\right)+4x_Iy_I\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\right]=\\ &=-2\left(1-2x_I-2y_Iz_I\right)\left(1-2y_I-2z_Ix_I\right)\times\\ &\times\left\{\left(1-2z_I\right)\left[\left(1-2x_I\right)^2+\left(1-2y_I\right)^2\right]-8x_Iy_I\left(x_I-y_I\right)^2\right\}.\end{aligned}$$



Фигура 8

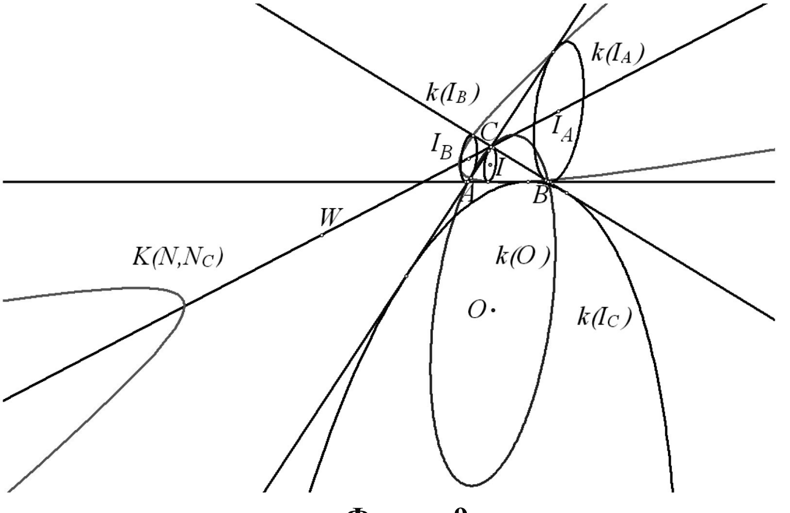
Нека $\Delta=\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\left(1-2z_I\right)$. От координатите на точката O и първото представяне на $\overline{D}$ получаваме $\overline{D}=-4x_0y_0\Delta^2\left[-x_0y_0\Delta^2+4x_Iy_I\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)\right]$. Ако са изпълнени неравенствата $x_0<0$ и $y_0>0$, то независимо от знака на Δ е изпълнено $\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)<4x_Iy_Iz_I^2$. Следователно $4x_Iy_I\left(1-2x_I\right)\left(1-2y_I\right)=\dfrac{\left(1-2x_I\right)^2\left(1-2y_I\right)^2}{z_I^2}>0$. Това означава, че $\overline{D}>0$. Оттук следва, че в този случай $K\left(N,N_C\right)$ е хипербола (фиг. 5). Аналогично се получава, че когато $x_0>0$ и $y_0<0$, кривата $K\left(N,N_C\right)$ е хипербола.

Сега да отбележим, че винаги една от точките I, I_A, I_B и I_C е вътрешна за ΔABC. Тъй като всяка от тези точки поражда една и съща Фойербахова конфигурация, то оттук нататък ще смятаме, че точката I е вътрешна за ΔABC. Ако точката I се намира в ΔM_aM_bC, то са изпълнени неравенствата $1-2x_I>0$,

$1-2y_I>0$, $1-2z_I<0$, $\Delta<0$, $1-2x_I-2y_Iz_I=2y_Iz_I-(1-2y_I)(1-2z_I)>0$, $1-2y_I-2z_Ix_I=2z_Ix_I-(1-2z_I)(1-2x_I)>0$. Оттук следва, че ако точката I лежи в ΔM_aM_bC, описаната крива $\overline{k}(O)$ е хипербола, а центърът ѝ O лежи във външната върхова област на точката C, т.е. $x_0<0$ и $y_0<0$. Сега от второто представяне на $\overline{D}$ получаваме

$$\overline{D}=-4x_0y_0\Delta^2\left\{(1-2z_I)\left[(1-2x_I)^2+(1-2y_I)^2\right]-8x_Iy_I(x_I-y_I)^2\right\}>0.$$

Следователно в този случай $K(N,N_C)$ е хипербола (фиг. 6).

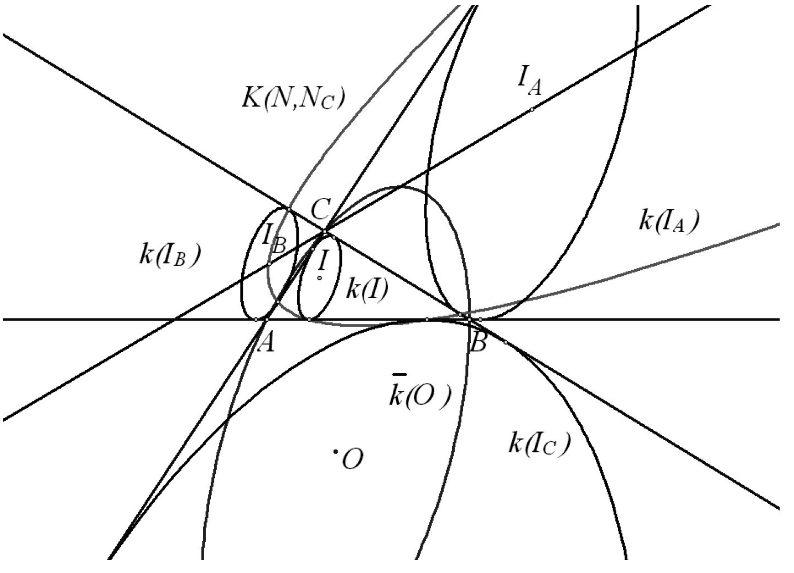


Фигура 9

От последните разглеждания следва, че ако центърът O на описаната крива $\overline{k}(O)$ е вътрешна точка за ΔABC, то точката I не лежи в никой от триъгълниците M_bM_cA, M_cM_aB и M_aM_bC. Следователно I лежи в $\Delta M_aM_bM_c$ и $x_I<\frac{1}{2}$, $y_I<\frac{1}{2}$, $z_I<\frac{1}{2}$. Тъй като $\Delta>0$, то от $z_0>0$ следва, че $1-2z_I-2x_Iy_I>0$. Оттук получаваме

$$(1-2z_I)\left[(1-2x_I)^2+(1-2y_I)^2\right]-8x_Iy_I(x_I-y_I)^2>4x_Iy_I(1-2x_I)(1-2y_I)>0.$$

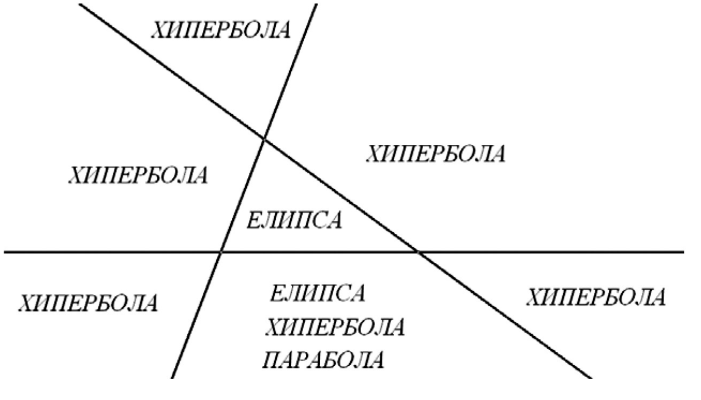
Сега от второто представяне на $\overline{D}$ получаваме $\overline{D}<0$. Следователно, когато O е вътрешна точка за ΔABC, кривата $K(N,N_C)$ е елипса (фиг. 7).



Фигура 10

Остава да отбележим, че когато центърът O лежи в областта, при която $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ и $z_0 < 0$, съществуват положения на O, за които $K\left(N, N_C\right)$ е елипса (фиг. 8), положения, при които $K\left(N, N_C\right)$ е хипербола (фиг. 9), а също така и положения на O, когато $K\left(N, N_C\right)$ е парабола (фиг. 10).

Накрая можем да обобщим получените резултати за вида на $K\left(N, N_C\right)$ на следващата фигура 11.



Фигура 11

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., Ненков, В. (2013). Един специален вид криви от втора степен, породени от точката на Нагел, *Математика плюс, 2*, 44 – 53.
1. Гроздев, С., Ненков, В. (2014). Крива на Чева за точка от равнината на триъгълник. *Математика и информатика, 3*, 285 – 298.
2. Гроздев, С., Ненков, В. (2009). Една крива от втора степен за две точки на Чева. *Математика и математическо образование, 38*, 245 – 248.
3. Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика, 5*, 42 – 61.
4. Ненков, В. (2008) Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика, 2*, 35 – 42.
5. Паскалев, Г., Чобанов, И. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
6. Хитов, Х. (1990). *Геометрия на триъгълника*. София: Народна просвета.

REFERENCES:

1. Grozdev, S., Nenkov, V. (2013). Edin spetsialen vid krivi ot vtora stepen, porodeni ot tochkata na Nagel, Matematika plyus, 2, 44 – 53.
2. Grozdev, S., Nenkov, V. (2014). Kriva na Cheva za tochka ot ravninata na triagalnik. Matematika i informatika, 3, 285 – 298.
3. Grozdev, S., Nenkov, V. (2009). Edna kriva ot vtora stepen za dve tochki na Cheva. Matematika i matematichesko obrazovanie, 38, 245 – 248.
4. Nenkov, V. (2010). Nyakolko svoystva na Foyerbahovata konfiguratsiya. Matematika i informatika, 5, 42 – 61.
5. Nenkov, V. (2008) Obobshtenie na teoremata na Foyerbah. Matematika i informatika, 2, 35 – 42.
6. Paskalev, G., Chobanov, I. (1985). Zabelezhitelni tochki v triagalnika. Sofiya: Narodna prosveta.
7. Hitov, H. (1990). Geometriya na triagalnika. Sofiya: Narodna prosveta.

SOME PROPERTIES OF A TYPE OF CURVES, GENERATED BY A NAGEL POINT

Abstract. The paper considers a generalization of a geometric problem from the International Mathematical Olympiad in 2013.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg