

НЯКОЛКО ПРИЛОЖЕНИЯ НА ТЕОРЕМАТА НА МЕНЕЛАЙ ЗА ВПИСАНИ ОКРЪЖНОСТИ

Александра Йовкова, Ирина Христова, Лили Стефанова
Природо-математическа гимназия – Ловеч

Резюме. Разглеждат се няколко задачи, свързани с допирните точки на вписаните в триъгълник окръжности. Основен елемент в решаването на тези задачи е използването на теоремата на Менелай. Разработката е отличена със златен медал на международния конкурс „Математика и проектиране“ в Москва, Русия през м. май 2017 г.

Keywords: Menelaus theorem; circle; center; triangle; tangent

В геометрията триъгълника е добре известна следната теорема на Менелай: ако ABC е произволен триъгълник, а точките M , N и T лежат съответно върху правите BC , CA и AB , то точките M , N и T лежат на една права тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CT}{AT} = 1$.

Ще покажем как се решават няколко задачи за вписани в триъгълник окръжности, основен елемент в решенията на които е използването на теоремата на Менелай.

Задача 1. Окръжността k е вписана в триъгълника ABC ($AB > CB$) и се допира до страните BC и AB съответно в точките U и W . Правите AC и WU се пресичат в точка T . Втората допирателна τ към k през точката T пресича страните AB и BC съответно в точките M и N . Да се намерят отношенията $m = \frac{AM}{BM}$ и $n = \frac{BN}{CN}$.

Решение. Нека $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ и τ се допира до k в точката P . От условието следват равенствата

$$(1) \quad AM = \frac{mc}{m+1}, \quad BM = \frac{c}{m+1},$$

$$(2) \quad BN = \frac{na}{n+1}, \quad CN = \frac{a}{n+1}.$$

Тъй като $BU = BW = p - b$, $MW = BW - BM$ и $NU = BU - BN$, то

$$(3) \quad MP = MW = \frac{(m+1)a - (m+1)b + (m-1)c}{2(m+1)},$$

$$(4) \quad NP = NU = \frac{(1-n)a - (n+1)b + (n+1)c}{2(n+1)}.$$

От (3) и (4) следва

$$(5) \quad MN = \frac{(m+1)a - (m+1)(n+1)b + m(n+1)c}{(m+1)(n+1)}.$$

От косинусовата теорема за триъгълника MNB имаме равенството $MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2 \cdot BM \cdot BN \cdot \cos \beta$, а по косинусовата теорема за ABC е изпълнено $\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Оттук, използвайки (1), (2) и (5), след някои преобразования се получава равенството

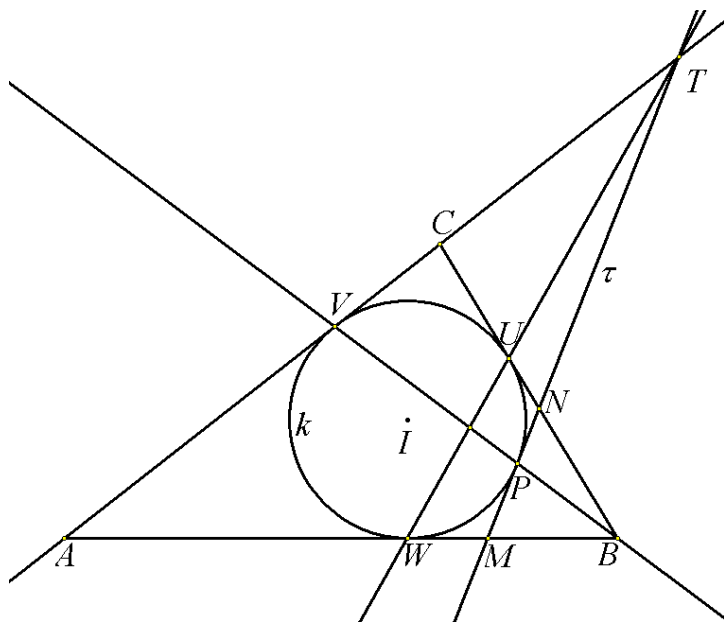
$$(6) \quad mn = \frac{(p-b)m - (p-a)n}{p-c}.$$

От друга страна, имаме $\frac{AW}{BW} = \frac{p-a}{p-b}$ и $\frac{BU}{CU} = \frac{p-b}{p-c}$. По теоремата на Менелай за правата (WUT) и $\triangle ABC$ получаваме $\frac{AW}{BW} \cdot \frac{BU}{CU} \cdot \frac{CT}{AT} = 1$. Оттук следва

$$(7) \quad t = \frac{CT}{AT} = \frac{p-c}{p-a}.$$

От (6), (7) и теоремата на Менелай за правата (MNT) и $\triangle ABC$ следва $mnt = \frac{(p-b)m - (p-a)n}{p-c} \cdot \frac{p-c}{p-a} = 1$. Оттук и (6) получаваме равенствата

$$(8) \quad m = \frac{2(p-a)}{p-b}, \quad n = \frac{p-b}{2(p-c)}.$$



Задача 2. Окръжността k е вписана в триъгълника ABC ($AB > CB$) и се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките U , V и W . Правите AC и WU се пресичат в точката T . Втората допирателна τ към k през точката T се допира до k в точка P . Да се докаже, че точките B , P и V лежат на една права.

Решение. Използваме означенията от предишната задача. Тъй като $t = \frac{CT}{AT}$,

то $CT = \frac{bt}{1-t}$. Използвайки (7), получаваме

$$(9) \quad CT = \frac{b(p-c)}{c-a}.$$

От второто равенство (2) и второто равенство (8) следва

$$(10) \quad CN = \frac{4a(p-c)}{3a+b-c}.$$

От косинусовата теорема за триъгълника CNT имаме равенството $TN^2 = CT^2 + CN^2 + 2 \cdot CT \cdot CN \cdot \cos \gamma$, а по косинусовата теорема за триъгълника ABC е изпълнено $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Оттук и равенствата (9) и (10) получаваме

$$(11) \quad TN = \frac{(p-c)(bc+4ca+ab-2a^2+b^2-2c^2)}{(c-a)(3a+b-c)}.$$

Сега от равенствата (3), (4) и (8) следва

$$(12) \quad NP = \frac{2(p-b)(p-c)}{3a+b-c}, \quad MP = \frac{2(p-a)(p-b)}{3c+b-a}.$$

От първото равенство (12) и (11) следва

$$(13) \quad TP = \frac{2(p-a)(p-c)}{c-a}.$$

От второто равенство (12) и (13) получаваме

$$(14) \quad \frac{MP}{TP} = \frac{(p-b)(c-a)}{(p-c)(3c+b-a)}.$$

Използвайки второто равенство (1) и първото равенство (8), намираме, че $BM = \frac{2c(p-b)}{3c+b-a}$. Оттук получаваме

$$(15) \quad \frac{AB}{MB} = \frac{3c+b-a}{2(p-b)}.$$

Сега от (9) и $CV = p-c$ следва, че $TV = CT + CV = \frac{2(p-c)(p-a)}{c-a}$.

Оттук и равенството $AV = p-a$ получаваме

$$(16) \quad \frac{TV}{AV} = \frac{2(p-c)}{c-a}.$$

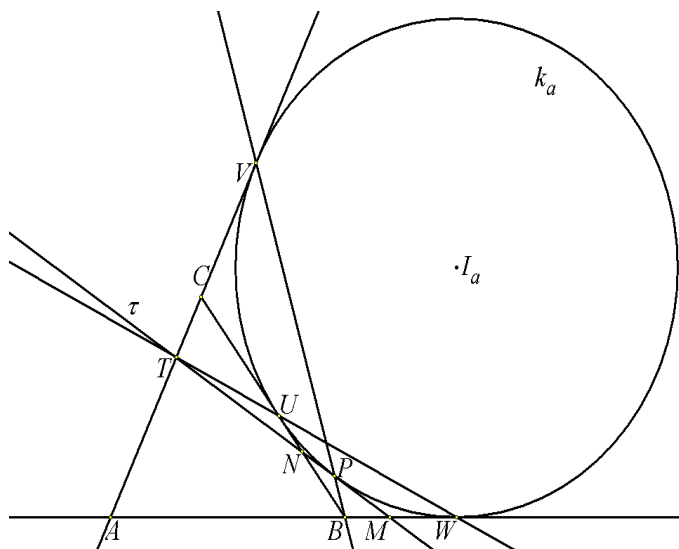
От (14), (15) и (16) следва, че $\frac{AB}{MB} \cdot \frac{MP}{TP} \cdot \frac{TV}{AV} = 1$. Според теоремата на Менелай по отношение $\triangle AMT$ това означава, че точките B , P и V лежат на една права.

В разгледаните задачи можем да заменим вписаната окръжност с външно-вписана окръжност. Така получаваме следните две задачи.

Задача 3. Окръжността k_a е външновписана за триъгълника ABC , която се допира до страната BC и до продълженията на страните CA и AB съответно в точките U , V и W . Правите AC и WU се пресичат в точката T . Втората допирателна τ към k_a през точката T пресича продължението на AB и страната BC съответно в точките M и N . Намерете отношенията

$$m = \frac{AM}{BM} \text{ и } n = \frac{BN}{CN}.$$

Задача 4. Окръжността k_a е външнописана за триъгълника ABC , която се допира до страната BC и до продълженията на страните CA и AB съответно в точките U , V и W . Правите AC и WU се пресичат в точката T . Втората допирателна τ към k_a през точката T се допира до k в точка P . Да се докаже, че точките B , P и V лежат на една права.



Решенията на задачи 3 и 4 са аналогични съответно на решенията на задача 1 и задача 2. В задача 3 се получават равенствата

$$(17) \quad m = \frac{2p}{p-c}, \quad n = \frac{p-c}{2(p-b)}.$$

Ще разгледаме и две задачи за пресичане на прави в една точка.

Задача 5. Окръжността k е вписана в триъгълник ABC ($AB > CB$) и се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките U , V и W . Правите AC и WU се пресичат в точката T . Втората допирателна τ към k през точката T се допира до k в точката P и пресича страните AB и BC съответно в точките M и N . Да се докаже, че правите AN , BV , CM и UW се пресичат в една точка F .

Решение. В началото ще докажем, че правите BV , CM и UW се пресичат в една точка F . От косинусовата теорема за триъгълниците UWB и ABC следва равенството

$$(18) \quad UW = \frac{2(p-b)}{ca} \sqrt{ca(p-c)(p-a)}.$$

Нека $BV \cap UW = F$. От теоремата на Менелай за ΔUNT и правата (BPF) следва

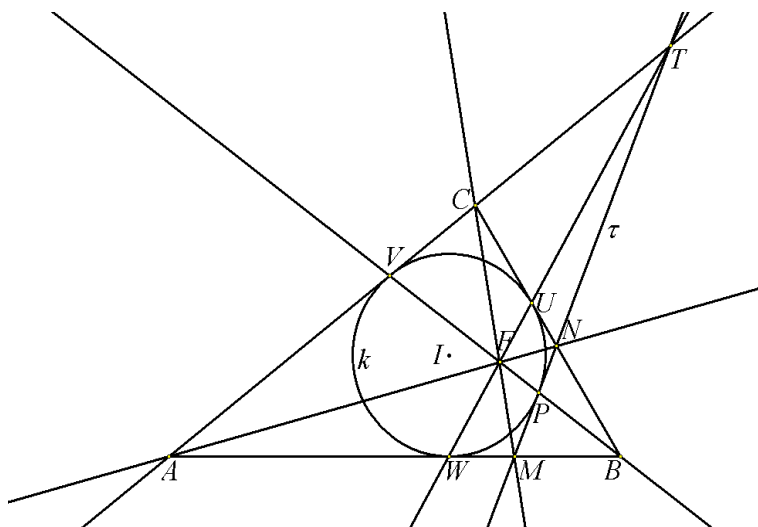
$$(19) \quad \frac{UB}{NB} \cdot \frac{NP}{TP} \cdot \frac{TF}{UF} = 1.$$

От теоремата на Менелай за ΔWMT и правата (BPF) следва

$$(20) \quad \frac{WB}{MB} \cdot \frac{MP}{TP} \cdot \frac{TF}{WF} = 1.$$

От (19) и (20) се получава равенството

$$(21) \quad \frac{UF}{WF} = \frac{UB}{NB} \cdot \frac{NP}{MP} \cdot \frac{MB}{WB}.$$



От решението на задача 1 следват равенствата

$$(22) \quad BM = \frac{2c(p-b)}{3c+b-a}, \quad BN = \frac{2a(p-b)}{3a+b-c}.$$

Сега от равенствата (21), (22) и (12) следва

$$(23) \quad \frac{UF}{WF} = \frac{c(p-c)}{a(p-a)}.$$

От (7) и $UF + WF = UW$ получаваме

$$(24) \quad UF = \frac{2c(p-c)}{b(c+a)-(c-a)^2} \cdot UW, \quad WF = \frac{2a(p-a)}{b(c+a)-(c-a)^2} \cdot UW.$$

От теоремата на Стюарт за триъгълника UWB и секущата BF следва, че е изпълнено равенството $BF^2 \cdot UW = BW^2 \cdot UF + BU^2 \cdot WF - UF \cdot VF \cdot UW$. Оттук и равенствата (18) и (24) получаваме

$$(25) \quad BF = \frac{2(p-b)}{b(c+a)-(c-a)^2} \sqrt{b(p-b)[bp-(c-a)^2]}.$$

Отново от теоремата на Стюарт, но за триъгълника MNB и секущата BP , следва равенството $BP^2 \cdot MN = BM^2 \cdot NP + BN^2 \cdot MP - NP \cdot MP \cdot MN$. Оттук равенствата (22), (12) и $MN = \frac{4(p-b)[bp-(c-a)^2]}{(3c+b-a)(3a+b-c)}$ (следва от резултатите в задача 1), получаваме равенството

$$(26) \quad BP = \frac{p-b}{bp-(c-a)^2} \sqrt{b(p-b)[bp-(c-a)^2]}.$$

Равенствата (25) и (26) ни довеждат до намиране на $PF = BF - BP$ чрез формулата

$$(27) \quad PF = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{[bp-(c-a)^2][b(c+a)-(c-a)^2]} \sqrt{b(p-b)[bp-(c-a)^2]}.$$

От косинусовата теорема за $\triangle BVC$ намираме равенството

$$(28) \quad BV = \frac{1}{b} \sqrt{b(p-b)[bp-(c-a)^2]}.$$

Сега от равенствата $VF = BV - BF$, (25) и (28) следва

$$(29) \quad VF = \frac{4(p-c)(p-a)}{b[b(c+a)-(c-a)^2]} \sqrt{b(p-b)[bp-(c-a)^2]}.$$

От (27) и (29) имаме

$$(30) \quad \frac{VF}{PF} = \frac{bp-(c-a)^2}{b(p-b)}.$$

Нека сега $CM \cap BV = F'$. От теоремата на Менелай за $\triangle PTV$ и правата (CMF') имаме $\frac{PM}{TM} \cdot \frac{TC}{VC} \cdot \frac{VF'}{PF'} = 1$. От (11) и (13) намираме

$$TM = \frac{2(p-a)[bp-(c-a)^2]}{(c-a)(3c+b-a)}, \text{ което заедно с (9), (12) и последното ра-}$$

венство води до

$$(31) \quad \frac{VF'}{PF'} = \frac{bp - (c-a)^2}{b(p-b)}.$$

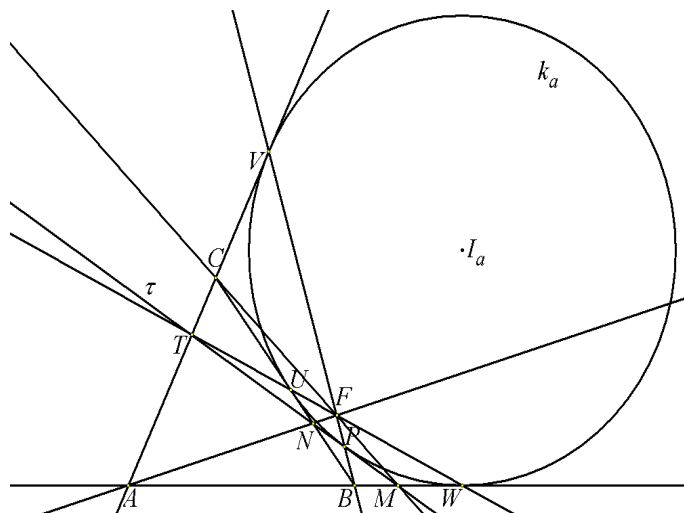
От (30) и (31) имаме $\frac{VF'}{PF'} = \frac{VF}{PF}$. Следователно $F' \equiv F$. Това доказва, че правите BV , CM и UW минават през една точка F .

Остана да докажем, че правата AN също минава през F . Това ще получим с помощта на теоремата на Чева. От (22), $CN = \frac{4a(p-c)}{3a+b-c}$ и $AM = \frac{4c(p-a)}{3c+b-a}$ следва, че е изпълнено равенството $\frac{BN}{CN} \cdot \frac{CV}{AV} \cdot \frac{AM}{BM} = 1$.

Поради това правите AN , BV и CM се пресичат в една точка. Но по доказаното $BV \cap CM = F$, а това означава, че правата AN минава през F .

Съответната задача за външноописана окръжност се формулира така:

Задача 6. Окръжността k_a е външноописана за триъгълника ABC , която се допира до страната BC и до продълженията на страните CA и AB съответно в точките U , V и W . Правите AC и WU се пресичат в точката T . Втората допирателна τ към k_a през точката T се допира до k в точката P и пресича продължението на страната AB и страната BC съответно в точките M и N . Да се докаже, че правите AN , BV , CM и UW се пресичат в една точка F .



Решението на задача 6 е аналогично на решението на задача 5.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Pasclev, G. (1984). *The work in the Mathematics circle*. Part I. Sofia: Narodna prosveta. [Паскалев, Г. (1984). *Работата в кръжока по математика*. Част I. София: Народна просвета.]
- Шарыгин, И. (1986). *Задачи по геометрии. Планиметрия*. Москва: Наука. [Sharygin, I. (1986). *Problems in Geometry. Plane Geometry*. Moscow: Nauka.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

SOME APPLICATIONS OF MENELAUS THEOREM TO INSCRIBED CIRCLES

Abstract. Several problems are considered in connection with the tangent points of circles inscribed in a triangle. A basic instrument in the problem solving is the application of Menelaus theorem. The work is awarded golden medal in the International competition “Mathematics and Projecting” in Moscow, Russia in May 2017.

¹⁾**Ms. Alexandra Yovkova,** ²⁾**Ms. Irina Hristova,** ³⁾**Ms. Lilly Stefanova**

Mathematics High School – Lovech
I, Acad. Urumov St.
5500 Lovech, Bulgaria

E-mail:¹⁾alex.yovkova@gmail.com, ²⁾ihristova11@abv.bg, ³⁾lilly.ts.stefanova@gmail.com