НЯКОИ НЕСТАНДАРТНИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМИ

Запрян Запрянов, Николай Райков

Резюме. В математическата литература са известни немалко нестандартни идеи, подходи и методи за решаване на по-трудни уравнения, неравенства и системи. За успешното решаване на такъв вид задачи е необходимо да се овладеят съществуващите методи и да се затвърдят уменията да се правят задълбочени логически разсъждения, изискващи съобразителност, досетливост и комбинативност. В книгата (Запрянов & Райков, 2012) са разгледани 11 нестандартни метода, като всеки от тях е разяснен и илюстрован с решението на много задачи. Нейната основна цел е да повиши математическата култура на читателя в рамките на училищния курс по математика и да засили интереса към овладяване на нестандартни подходи и методи за решаване на задачи с повишена трудност.

Keywords: problem solving, equation, inequality, system, non-standart problem, method.

Книгата (Запрянов & Райков, 2012) е полезна за учениците от математическите школи, математическите гимназии и изучаващите математика като ЗИП, подготвящите се за участия в състезания и олимпиади, кандидат-студенти по математика и иформатика и студенти по математика от педагогическите специалности. Ще бъде полезна и за учителите, които желаят да разширят и задълбочат знанията и уменията на учениците си за решаване с нестандартни методи на уравнения, неравенства и системи, повечето от които са с параметри. Книгата ще представлява интерес и за всички читатели, които искат да се научат да вникват по-дълбоко в логическата страна на процеса на решаването на задачи, да повишат математическата си култура и интелектуалното си равнище.

В настоящата статия са решени 11 задачи за частична илюстрация на прилагането на всеки от разгледаните методи.

1. Метод на свободния параметър

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които неравенството $|ax^2 - 3x - 4| \leq 5 - 3x$ е изпълнено за всяко число $x \in [-1; 1]$.

Решение. Нека неравенството $|ax^2 - 3x - 4| \leq 5 - 3x$ е изпълнено за всяко $x \in [-1; 1]$. Тогава то е изпълнено при $x = -1$, $x = \dfrac{1}{3}$ и $x = 1$.

При $x = -1$ имаме $|ax^2 - 3x - 4| \le 5 - 3x \Leftrightarrow -(5 - 3x) \le ax^2 - 3x - 4 \le 5 - 3x \Leftrightarrow -(5 + 3) \le a + 3 - 4 \le 5 + 8 \Leftrightarrow$ (1) $-7 \le \boldsymbol{a} \le \mathbf{9}$.

При $x = \dfrac{1}{3}$ намираме $\left|\dfrac{1}{9}a - 1 - 4\right| \le 5 - 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{a}{9} - 5\right| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le \dfrac{a}{9} - 5 \le 4 \Leftrightarrow$ (2) $\mathbf{9} \le \boldsymbol{a} \le 81$

При $x = 1$ получаваме $|a - 7| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le a - 7 \le 2 \Leftrightarrow$ (3) $5 \le a \le 9$.

От неравенствата (1), (2) и (3) следва, че $9 \le a \le 9$, т.е. $a = 9$.

Така доказахме, че за да бъде даденото неравенство изпълнено за всяко $x \in [-1; 1]$, необходимо условие е $a = 9$.Сега ще докажем, че $a = 9$ е и достатъчно условие, за да бъде изпълнено за всяко $x \in [-1; 1]$ даденото неравенство. Наистина при $a = 9$ имаме

$$|9x^2 - 3x - 4| \le 5 - 3x \Leftrightarrow -5 + 3x \le 9x^2 - 3x - 4 \le 5 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 9x^2 - 9 \le 0 \\ 9x^2 - 6x + 1 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 9(x-1)(x+1) \le 0 \\ (3x-1)^2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-1;1].$$

С това доказахме, че само $a = 9$ удовлетворява условието на задачата.

2. Метод на мини-макса

Задача 2. Да се реши уравнението $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Решение. Допустимите стойности на x са $x \in [2; 4]$. Опитът да се реши уравнението чрез повдигане в квадрат на двете му страни (за всяко x имаме $x^2 - 6x + 11 > 0$) води до уравнение от осма степен. Затова прилагаме метода на мини-макса. Тъй като $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 \ge 2$. Ще докажем, че и лявата страна на даденото уравнение е по-малка или равна на 2. Действително за квадрата на лявата страна имаме

$$y^2 = \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)}.$$

Понеже $(x - 2)(4 - x) = -8 + 6x - x^2 = 1 - (x - 3)^2$, то $y^2 \le 4$, като равенството се достига при $x = 3$. Тогава лявата страна y достига максимума си $y = 2$ при $x = 3$. И така, лявата страна на даденото уравнение е по-малка или равна на 2, т.е. има максимум, който се получава при $x = 3$, а дясната има минимум, равен на 2, който също се получава при $x = 3$. Това означава, че даденото уравнение има единствено решение $x = 3$.

3. Смяна ролята на неизвестното в параметъра

Задача 3. Решете уравнението (1) $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$, където $a > 0$ е реален параметър.

Решение. Относно неизвестната променлива x уравнението е сложно, затова ще сменим ролите на x и a, т.е. в началото ще решим уравнението (1) относно a. За целта записваме уравнението (1) във вида: (2) $2a^2 - (3x^2 + 2x)a + x^4 + x^3 = 0$. Като решим уравнението (2), получаваме $a_1 = \dfrac{x^2}{2}$ и $a_2 = x^2 + x$.

Така чрез уравнението $2\left(a - \dfrac{x^2}{2}\right)(a - x^2 - x) = 0$ свеждаме решението на задачата към намирането на корените на следните две квадратни уравнения $x^2 = 2a$ и $x^2 + x - a = 0$, откъдето получаваме $x_{1,2} = \pm\sqrt{2a}$ и $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$.

4. Въвеждане на параметър и изолиране на параметъра

Задача 4. При кои стойности на параметъра a уравнението

(1) $(x^2 + 9)\cos ax = 2(x^2 - 3x + 9)$ има решения? Намерете тези решения.

Решение. От даденото уравнение можем да изолираме параметъра a, като намерим $\cos ax = \dfrac{2\left(x^2 - 3x + 9\right)}{x^2 + 9}$. Но $|\cos ax| \le 1$, затова (2) $\dfrac{2x^2 - 6x + 18}{x^2 + 9} \le 1$. От последното неравенство следва $2x^2 - 6x + 18 \le x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \le 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 3$. Това означава, че равенството в (2) е възможно само при $x = 3$, т.е. когато $\cos a3 = 1$ или $3.a = 2k\pi$, $k \in Z$. Следователно при $a = \dfrac{2k\pi}{3}$ уравнението (1) има единствено решение $x = 3$, а при други стойности на a уравнението (1) няма решение.

5. Дискриминантен метод

Задача 5. Решете системата $\left|\begin{array}{l} x^2 + 2x\sin y + 1 = 0 \\ 8|x|y\left(x^2 + y^2\right) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{array}\right.$

Решение. От първото уравнение получаваме

$$x_{1,2} = \frac{-\sin y \pm \sqrt{\sin^2 y - 1}}{1} = -\sin y \pm \sqrt{\sin^2 y - 1}\,.$$

Но $D_1 = \sin^2 y - 1 \le 0$, т.е. $\sin^2 y = 1$ или $\sin y = \pm 1$. Следователно $y = \frac{\pi}{2}$ или $y = -\frac{\pi}{2}$. При $y = \frac{\pi}{2}$ за x намираме $x = -1$, но при тези стойности на x и y второто уравнение на дадената система не се удовлетворява. При $y = -\frac{\pi}{2}$ имаме $x = 1$ и тези стойности на неизвестните удовлетворяват и двете уравнения на системата.

6. Прилагане на свойството симетричност (четност)

Задача 6. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които системата

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 14 \end{vmatrix}$$

има точно две решения.

Решение: Дадената система е симетрична относно двете неизвестни x и y. Затова, ако $(x_0; y_0)$ е нейна решение, то тя има още три други решения: $(-x_0; -y_0)$, $(y_0; x_0)$, $(-y_0; -x_0)$. Но решенията $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ трябва да са различни, защото в противен случай $x_0 = -x_0$ и $y_0 = -y_0$, т.е. двойката $(0; 0)$ трябва да е решение, а тя не удовлетворява второто уравнение на дадената система. Решенията $(x_0; y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$ трябва също да са различни, защото в противен случай $x_0 = -y_0$ и $y_0 = -x_0$, т.е. $x_0 + y_0 = 0$, което означава, че отново не е удовлетворено второто уравнение на дадената система. Тогава дадената система ще има точно две решения, когато решенията $(-x_0; -y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$ съвпадат, т.е. когато $-x_0 = -y_0$ или $y_0 = x_0$. При $y_0 = x_0$ от второто уравнение на дадената система намираме $4x^2 = 14$, т.е. $x_0^2 = \frac{7}{2}$. Следователно $x_0 = \sqrt{\frac{7}{2}}$ и $x_0 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$. При тези стойности на x_0 от първото уравнение на дадената система следва $\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 2(1 + a)$ т.е. $a = \frac{5}{2}$. С това намерихме, че необходимо условие, за да има дадената система точно две решения, е $a = \frac{5}{2}$. Сега ще установим, че това условие е и достатъчно. Наистина, при $a = \frac{5}{2}$ дадената система има вида $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 = 7 \\ (x+y)^2 = 14. \end{vmatrix}$ Тази система е равносилна на системите

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 = 7 \\ x + y = \sqrt{14}, \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 = 7 \\ x + y = -\sqrt{14}, \end{vmatrix}$$

решенията на които са $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

7. Прилагане на свойството монотонност

Задача 7. Намерете всички двойки реални числа x и y, удовлетворяващи уравнението

(1) $(x+y)\left[\log_3\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)-\log_3 2\right]+(x^2+y^2-1)^2=0.$

Решение. От $x + y + \dfrac{1}{x+y} > 0$ следва, че $\dfrac{(x+y)^2+1}{x+y} > 0$, т.е. $x + y > 0$. Тъй като $x + y > 0$, можем да използваме известното неравенство $x + y + \dfrac{1}{x+y} \geq 2$. Тогава $\log_3\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right) \geq \log_3 2$, т.е. лявата страна на уравнението (1) е сбор от две неотрицателни събираеми. Тогава равенството е възможно само когато и двете събираеми са равни на нула. Но $x + y > 0$, затова $\left|\begin{array}{l}\log_3\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)-\log_3 2=0\\ x^2+y^2-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l}x+y+\dfrac{1}{x+y}=2\\ x^2+y^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(x+y)^2-2(x+y)+1=0\\ x^2+y^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\left[(x+y)^2-1\right]^2=0\\ x^2+y^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow (2)\left|\begin{array}{l}x+y=1\\ x^2+y^2=1\end{array}\right.$$

Решенията на системата (2), а следователно и на уравнението (1) са двойките (0; 1) и (1; 0).

8. Метод на отделяне на точен квадрат

Задача 8. Решете системата $\left|\begin{array}{l}-y^2-2y+2=\sqrt{x-y}\\ x+8y=\sqrt{x-y-9}.\end{array}\right.$

Решение. Отделяме точен квадрат от лявата страна на първото уравнение на системата $3-(y+1)^2=\sqrt{x-y}$. Тогава дадената система записваме в еквивалентния й вид $\left|\begin{array}{l}-\left(y+1\right)^2=\sqrt{x-y}-3\\ x+8y=\sqrt{x-y-9}.\end{array}\right.$ От първото уравнение на последната система следва $\sqrt{x-y}-3 \leq 0$, т.е. $0 \leq x-y \leq 9$. Тъй като от второто уравнение на системата имаме $x-y-9 \geq 0$, т.е. $x-y \geq 9$, можем да приложим метода на мини-макса и получаваме $x-y=9$ и $x+8y=0$. Така от системата $\left|\begin{array}{l}x-y=9\\ x+8y=0\end{array}\right.$ намираме $x = 8$ и $y = -1$.

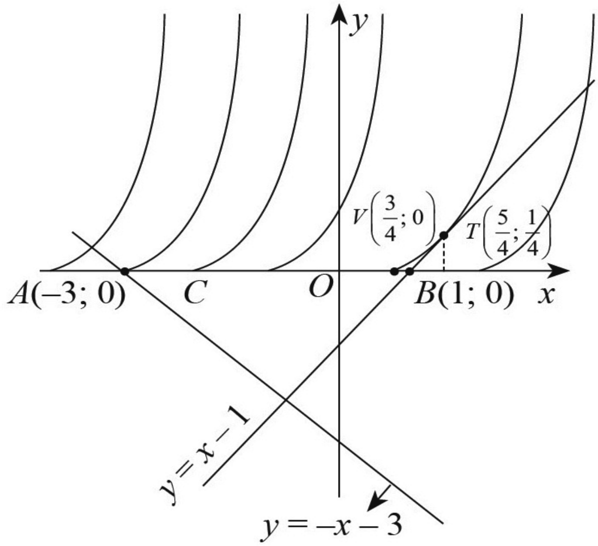
9. Тригонометрични субституции и геометрични интерпретации

Задача 9. Намерете при кои стойности на параметъра a системата

(1) $\begin{cases} y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \\ x = a + \sqrt{y} \end{cases}$ има поне едно решение.

Решение. Като отделим точни квадрати на изразите, свързани с променливите x и y в първото уравнение на системата (1), получаваме $y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = (y + 2)^2 - (x + 1)^2 = (y + x + 3)(y - x + 1) = 0$. Геометричният образ на това уравнение са графиките на двете прави $y = -x - 3$ и $y = x - 1$, които пресичат абсцисната ос съответно в точките $A(-3; 0)$ и $B(1; 0)$. За системата (1) е в сила еквивалентността

$$\begin{cases} (y+x+3)(y-x+1)=0 \\ \sqrt{y} = x - a \end{cases} \Leftrightarrow (2) \begin{cases} (y+x+3)(y-x+1)=0 \\ y = x^2 - 2ax + a^2 \ (x \geq a). \end{cases}$$



Тази система съдържа освен променливите x и y още и параметъра a. Условието $x \geq a$, отнасящо се за второто уравнение, означава, че от параболите трябва да се разглеждат само онези точки, които са надясно от върховете им $V(a; 0)$, включително и самите върхове (вж. фигурата). Когато параметърът a се изменя от –μ до +μ, върхът $V(a; 0)$ на параболите се "движи" по абсцисната ос отляво надясно.

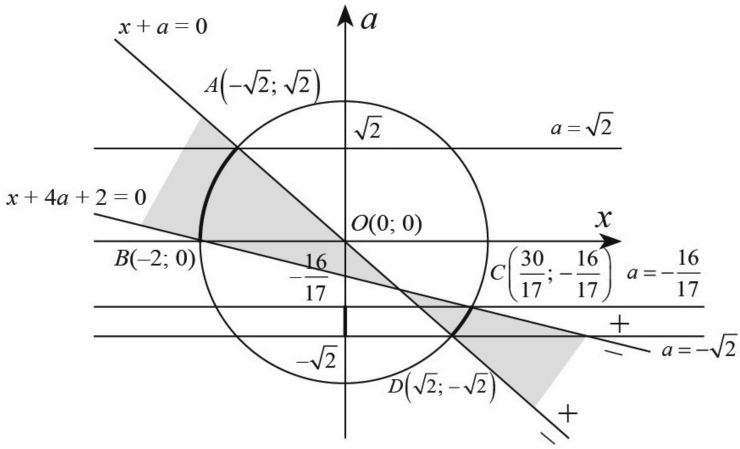
Координатите на общите точки на двете прави и десните клонки на параболите дават решенията на системата (2). Последната "движеща" се полупарабола, която има обща точка с правата $y = -x - 3$, е полупараболата с връх $V(a;\ 0)$, съвпадащ с точката $A(-3;\ 0)$. Следващите "движещи" се полупараболи нямат общи точки с никоя от двете прави $y = -x - 3$ и $y = x - 1$. За да намерим първата обща точка T на "движеща се" по-нататък полупарабола с правата $y = x - 1$, търсим допирателната права към тази полупарабола. За целта търсим за коя стойност на параметъра a системата $\left|\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = x^2 - 2ax + a^2 \end{array}\right.$ има единствено решение. Така получаваме $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 1 = 0$, $D = \cancel{4a^2} + 4a + 1 - \cancel{4a^2} - 4 = 0$, т.е. $a = \dfrac{3}{4}$ и $x_1 = x_2 = \dfrac{2a+1}{2}$ $= \dfrac{2.\frac{3}{4}+1}{2} = \dfrac{5}{4}$. Това означава, че $T\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right)$ и $V\left(\dfrac{3}{4};0\right)$. Следователно дадената система има поне едно решение при $a \in (-\mu;\ -3] \cup \left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$ и няма решение при $a \in \left(-3;\dfrac{3}{4}\right)$.

10. Метод на областите

Задача 10. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които системата

(1) $\left|\begin{array}{l} (x + 4a + 2)(x + a) \le 0 \\ x^2 + a^2 = 4 \end{array}\right.$ има решение.

Решение. Разглеждаме множеството от точки в равнината Oxa, които удовлетворяват уравнението $(x + 4a + 2)(x + a) = 0$. Това са точките от правите $a = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}$ и $a = -x$. Тези прави разделят равнината $(x;\ a)$ на четири области. Във всяка от тези области лявата страна на неравенството от системата (1) има постоянен знак. Знаците на полуравнините, получени от правата $x + 4a + 2 = 0$, определяме, като използваме началото на координатната система $O(0;\ 0)$, а за правата $x + a = 0$, като използваме точката $B(-2;\ 0)$. Областите, в които е удовлетворено неравенството в системата (1), са затъмнени на фигурата. Множеството от точките от равнината Oxa, които удовлетворяват уравнението $x^2 + a^2 = 4$, са точките от окръжност с център в началото на координатната система и радиус, равен на 2. Тогава общите точки на тази окръжност и затъмнената област в равнината $(x,\ a)$ (двете дъги



$\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$) имат координати, които са решения на системата (1). Всъщност ординатите на тези точки са търсените стойности на параметъра a, т.е. $a \in (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4)$, където a_1 и a_4 са ординатите на пресечните точки на правата $x + a = 0$ и окръжността $x^2 + a^2 = 4$, а a_2 и a_4 са пресечните точки на правата $x + 4a + 2 = 0$ и окръжността. Като решим съответните системи $\left|\begin{array}{l} x + a = 0 \\ x^2 + a^2 = 4 \end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l} x + 4a + 2 = 0 \\ x^2 + a^2 = 4, \end{array}\right.$ получаваме търсените стойности на параметъра a. Те са $a \in \left[-\sqrt{2}; -\frac{16}{17}\right] \cup \left[0; \sqrt{2}\right]$.

11. Решаване на някои уравнения и системи с помоща на нестроги неравенства

Задача 11. Решете уравнението $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \dfrac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)} = 1.$

Решение. Допустимите стойности на x получаваме от условията $9 - x^2 \geq 0$ и $\sqrt{9-x^2} \neq 3$: $x \in [-3; 0) \cup (0; 3]$. Полагаме $\sqrt{9-x^2} = y$, $y \geq 0$ и намираме $9 - x^2 = y^2$, т.е. $x^2 = 9 - y^2$. Тогава даденото уравнение добива вида $\dfrac{9-y^2}{3+y} + \dfrac{1}{4(3-y)} = 1.$

Тъй като всяко от събираемите в лявата страна на даденото уравнение е неотрицателно, то от неравенството между средноаритметично и средногеометрично следва

$$\frac{9-y^2}{3+y}+\frac{1}{4(3-y)}\geq 2\sqrt{\frac{9-y^2}{3+y}.\frac{1}{4(3-y)}}=2\sqrt{\frac{9-y^2}{4(9-y^2)}}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1.$$

Това означава, че даденото уравнение е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{9-y^2}{3+y}+\dfrac{1}{4(3-y)}\geq 1\\[2ex] \dfrac{9-y^2}{3+y}+\dfrac{1}{4(3-y)}=1.\end{array}\right.$$

Следователно, най-малката стойност на лявата част на неравенството е равна на 1, която се достига тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $\dfrac{9-y^2}{3+y}=\dfrac{1}{4(3-y)}$. Като вземем предвид, че $y\in[0;3)$, получаваме уравнението

$$4(3-y)^2=1\Leftrightarrow 4y^2-24y+35=0,$$

което има корени $y_1=\dfrac{5}{2}$ и $y_2=\dfrac{7}{2}$. Но $x^2=9-y^2$, затова $x_1=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ и $x_2=-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. И двата корена x_1 и x_2 принадлежат на допустимите стойности $x\in[-3;0)\cup(0;3]$. С това задачата е решена.

В тази статия са дадени само кратки разяснения за споменатите методи. По-подробен анализ на тези методи и решените 160 задачи могат да се намерят в (Запрянов & Райков, 2012).

ЛИТЕРАТУРА

Запрянов, З. & Райков, Н. (2012). *Как да решаваме лесно трудни задачи*. София: Просвета.

✉ **Запрян Запрянов**
професор, доктор на математическите науки
ж. к. "Младост I", бл.102, вх.10, ап.174
1784 София

✉ **Николай Райков**
ул. "Стрешер" 11, ет.2, ап. 9
1606 София
E-mail: nik.raikov@abv.bg

SOME NON-STANDARD METHODS IN PROBLEM SOLVING OF EQUATIONS, INEQUALITIES AND SYSTEMS

Abstract. A considerable number of non-standard ideas, approaches and methods are known in the mathematical references to solve more difficult equations, inequalities and systems. For a successful solving of such problems it is necessary to master the existing methods and to become positive in the skill of deep logic reasoning which requires quick wits, guessing and combinative ability. Eleven non-standard methods are considered in the book (Zapryankov & Raikov, 2012) and each of them is explained and illustrated by the solutions of many problems. The main goal of the book is to increase the mathematical culture of the reader in the limits of the school mathematical course and to strengthen the interest of mastering non-standard approaches and methods in problem solving of tasks with higher difficulty.

✉ **Zapryan Zapryanov**
Professor, DSc in Mathematics
Mladost 1, bl. 102, vh..10, ap.174
1784 Sofia

✉ **Nikolay Raikov**
Stresher Street, 11, fl. 2, ap. 9
1606 Sofia
E-mail: nik.raikov@abv.bg