

## НЯКОИ МЕТОДИЧЕСКИ ПОДХОДИ ЗА СЪСТАВЯНЕ НА ЗАДАЧИ ЗА ОЛИМПИАДИ

<sup>1</sup>Сава Гроздев, <sup>2</sup>Веселин Ненков

<sup>1</sup>Българска академия на науките

<sup>2</sup>Технически колеж - Ловеч

**Резюме.** За разлика от задачите, включени в курсовете на обучение или давани на изпити по математически дисциплини, задачите за олимпиади трябва да осигуряват възможност за проявяване на творчество и нестандартно мислене от страна на състезателите. Ето защо е желателно те да предполагат наличието на повече от един метод за намиране на решение. В статията са предложени задачи от такъв тип, като са описани различни подходи за тяхното решаване.

**Keywords:** methodology, olympiad problems, complex numbers, matrix, recurrence equation

Решаването на задачи, включени в курсовете на обучение или давани на изпити, включва прилагане на добре познати и изучавани методи и прийоми и не изисква особена изобретателност. Задачите, които са предназначени за решаване по време на олимпиади, трябва коренно да се отличават с наличие на проблем, който може да се реши творчески и нестандартно. Н. Колмогоров цитира един афоризъм, съгласно който „голямото научно откритие се отличава от хубавата задача, давана на олимпиада, само по това, че за решаване на задача за олимпиада се изискват 5 часа, а за получаването на крупен научен резултат – 5000 часа“ (Колмогоров, 1988).

Освен състезателен характер олимпиадите имат и сериозен принос за повишаване на подготовката на част от студентите и учениците. Тази част не е голяма като брой, но е изключително качествена. Това са млади хора, които имат потенциал да се занимават в бъдеще с творческа дейност и да допринасят за развитието на науката. Затова е важно задачите да бъдат такива, че да имат характер на малки научни изследвания. Така както една задача от практиката (не задължително математическа) може да се реши с прилагане на различни подходи, то и до решението на състезателна задача следва да се стига с използване на знания от различни дялове на математиката. В по-нататъшното изложение са представени такива примери.

**Задача 1.** Да се намерят всички  $2 \times 2$  матрици  $A$  с еднакви елементи по главния диагонал, за които  $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$  ( $A^T$  е транспонираната матрица на  $A$ ).

Нека  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ . Тогава  $A.A^T = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & a(b+c) \\ a(b+c) & a^2 + c^2 \end{bmatrix}$ . Следователно елементите на матрицата  $A$  удовлетворяват системата:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a(b+c) = 14 \\ a^2 + c^2 = 20 \end{cases}$$

Ще предложим два различни подхода за решаване на тази задача – алгебричен и геометричен.

**Първи подход.** Изразяваме от второто уравнение  $b+c = \frac{14}{a}$ . Изваждаме от третото уравнение на системата първото и получаваме  $(c-b)(c+b) = 7$  или  $(c-b)\frac{14}{a} = 7$ , откъдето  $c = \frac{a}{2} + b$ . Заместваме в третото уравнение и стигаме до следната система от две уравнения с две неизвестни:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ 5a^2 + 4ab + 4b^2 = 80 \end{cases}$$

Събираме двете уравнения, предварително умножени съответно по 80 и  $-13$ . Получаваме хомогенното уравнение:

$$15a^2 - 52ab + 28b^2 = 0.$$

След като разделим двете му страни на  $a^2$  и положим  $t = \frac{b}{a}$ , стигаме до квадратното уравнение

$$28t^2 - 52t + 15 = 0 \text{ с корени } t_1 = \frac{5}{14}, t_2 = \frac{3}{2}.$$

*Първи случай:*

$$b = \frac{5}{14}a. \text{ След заместване в първото уравнение на системата намираме } a = \pm \frac{14}{\sqrt{17}}.$$

$$\text{Следователно } b = \pm \frac{5}{\sqrt{17}}, c = \frac{a}{2} + b = \pm \frac{12}{\sqrt{17}}.$$

*Втори случай:*

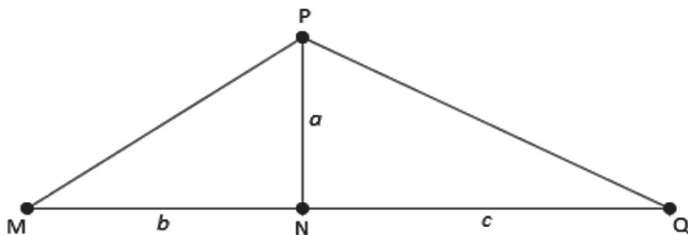
$$b = \frac{3}{2}a. \text{ След заместване в първото уравнение на системата намираме } a = \pm 2.$$

$$\text{Следователно } b = \pm 3, c = \frac{a}{2} + b = \pm 4.$$

Окончателно решенията на първоначалната система са:

$$\left(\frac{14}{\sqrt{17}}, \frac{5}{\sqrt{17}}, \frac{12}{\sqrt{17}}\right), \left(-\frac{14}{\sqrt{17}}, -\frac{5}{\sqrt{17}}, -\frac{12}{\sqrt{17}}\right), (2, 3, 4) \text{ и } (-2, -3, -4).$$

**Втори подход.** Построяваме два правоъгълни триъгълника  $MNP$  и  $NPQ$  с катети  $NP = a$ , катети  $MN = b$ ,  $NQ = c$  и хипотенузи съответно  $MP = \sqrt{13}$  и  $PQ = \sqrt{20}$ .



За лицето на  $\triangle MPQ$  имаме  $S_{\triangle MPQ} = \frac{(b+c) \cdot a}{2}$ , но от системата  $a \cdot (b+c) = 14$  и следователно  $S_{\triangle MPQ} = \frac{14}{2} = 7$ .

От друга страна,  $S_{\triangle MPQ} = \frac{MP \cdot PQ \cdot \sin \angle MPQ}{2}$ , откъдето  $\sin \angle MPQ = \frac{7}{\sqrt{65}}$ .

Оттук следва, че  $\cos \angle MPQ = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right)^2} = \pm \frac{4}{\sqrt{65}}$ .

За  $\triangle MPQ$  прилагаме косинусова теорема:

$$MQ^2 = MP^2 + PQ^2 - 2 \cdot MP \cdot PQ \cdot \cos \angle MPQ.$$

*Първи случай:*

$$(b+c)^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{4}{\sqrt{65}}.$$

Получаваме  $(b+c)^2 = 17$ , откъдето  $b+c = \pm\sqrt{17}$ . Тогава  $a = \pm \frac{14}{\sqrt{17}}$ ,  $b = \pm \frac{5}{\sqrt{17}}$  и  $c = \pm \frac{12}{\sqrt{17}}$ .

*Втори случай:*

$$(b+c)^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right).$$

Получава се  $(b+c)^2 = 49$ , откъдето  $b+c = \pm 7$ . Тогава  $a = \pm 2$ ,  $b = \pm 3$  и  $c = \pm 4$ .

След непосредствена проверка определяме решенията на системата:

$$\left( \frac{14}{\sqrt{17}}, \frac{5}{\sqrt{17}}, \frac{12}{\sqrt{17}} \right), \left( -\frac{14}{\sqrt{17}}, -\frac{5}{\sqrt{17}}, -\frac{12}{\sqrt{17}} \right), (2, 3, 4) \text{ и } (-2, -3, -4).$$

Окончателно всички търсени матрици са:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ \sqrt{17} & \sqrt{17} \\ 12 & 14 \\ \sqrt{17} & \sqrt{17} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ -\sqrt{17} & -\sqrt{17} \\ 12 & 14 \\ -\sqrt{17} & -\sqrt{17} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Задача 2.** Ако  $a, b \neq 0, u, v$  са реални числа, да се докаже, че

$$r_n = \frac{v - u(a - \sqrt{b})}{2\sqrt{b}}(a + \sqrt{b})^n - \frac{v - u(a + \sqrt{b})}{2\sqrt{b}}(a - \sqrt{b})^n \quad (1)$$

е реално число за всяко  $n=0,1,2,\dots$ :

а) при  $u = 0, v = 1$ ;

б) при произволни  $u$  и  $v$ .

Ако  $b > 0$ , то е очевидно, че  $r_n$  е реално число. Остава да се разгледа случаят  $b < 0$ .

Ще предложим три принципно различни подхода за решаване на задачата, предполагащи наличието на различни теоретични знания и умения на състезателя.

**Първи подход** (чрез развиване по формулата за Нютонов бином)

а) При  $u = 0, v = 1$  след преобразуване получаваме:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[ (a + \sqrt{b})^n - (a - \sqrt{b})^n \right] = \frac{1}{2\sqrt{b}} \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (\sqrt{b})^k (1 - (-1)^k) = \\ &= \frac{2}{2\sqrt{b}} \sum_{\substack{k=0 \\ k-\text{нечетно}}}^n C_n^k a^{n-k} (\sqrt{b})^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k-\text{нечетно}}}^n C_n^k a^{n-k} b^{\frac{k-1}{2}}. \end{aligned}$$

Последният израз в равенството показва, че  $r_n$  е реално число.

б) При произволни реални  $u$  и  $v$  след преобразуване получаваме:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[ (v - u(a - \sqrt{b}))(a + \sqrt{b})^n + (-v + u(a + \sqrt{b}))(a - \sqrt{b})^n \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[ \sum_{k=0}^n C_n^k (v - u(a - \sqrt{b})) a^{n-k} (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k (-v + u(a + \sqrt{b})) a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[ \sum_{k=0}^n C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^k - \sum_{k=0}^n C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k u \sqrt{b} a^{n-k} (\sqrt{b})^k - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n C_n^k v a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k u a a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k u \sqrt{b} a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[ \sum_{k=0}^n C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^k (1 - (-1)^k) + \sum_{k=0}^n C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^k ((-1)^k - 1) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^n C_n^k u \sqrt{b} a^{n-k} (\sqrt{b})^k (1 + (-1)^k) \right].$$

Последната сума представяме във вида  $r_n = r'_n + r''_n$ , където  $r'_n$  е сумата на събираемите при четни стойности на  $k$ , а  $r''_n$  – сумата на събираемите при нечетни стойности на  $k$ . Тъй като числата  $r'_n = \frac{2}{2\sqrt{b}} \sum_{k-\text{четно}} C_n^k u a^{n-k} (\sqrt{b})^{k+1}$  и  $r''_n = \frac{2}{2\sqrt{b}} \left[ \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^k - \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^k \right] = \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^{k-1} - \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^{k-1}$  са реални, то  $r_n$  е също реално число.

### Втори подход

а) Разглеждаме матрицата с реални елементи  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$ , за която  $\text{tr}(A) = 2a$  и  $\det(A) = a^2 - b$ . От изследванията на Р. Николаев и Й. Петков (Николаев & Петков, 2014) следва, че

$$A^n = a_n A - b_n E,$$

където  $a_n$  удовлетворява рекурентното уравнение

$$a_n - \text{tr}(A)a_{n-1} + \det(A)a_{n-2} = 0 \quad (2)$$

и

$$b_n = \det(A)a_{n-1}.$$

На (2) съответства характеристично уравнение

$$x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = 0$$

с корени  $x_{1,2} = a \pm \sqrt{b}$ , откъдето

$$a_n = c_1(a + \sqrt{b})^n + c_2(a - \sqrt{b})^n.$$

Като използваме, че

$$a_0 = 0 = c_1 + c_2 \text{ и } a_1 = 1 = c_1(a + \sqrt{b}) + c_2(a - \sqrt{b}),$$

$$\text{намираме } c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\sqrt{b}}.$$

Получава се (1) в случая  $u=0, v=1$ . Като се има предвид, че  $A$  е матрица с реални елементи, то и  $A^n$  е матрица с реални елементи за всяко  $n=0,1,2,\dots$ . Следователно  $r_n$  е реално число за всяко  $n=0,1,2,\dots$  при  $u=0, v=1$ .

б) Като използваме тази идея, можем да направим следното обобщение: нека  $r_n$  удовлетворява рекурентното уравнение

$$r_n = 2ar_{n-1} - (a^2 - b)r_{n-2}, \quad (3)$$

като  $r_0 = u, r_1 = v$ . Тогава за  $r_n$  ще се получи точно равенство (1). Тъй като  $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ , то от (3) следва, че и  $r_2 \in \mathbb{R}$  (по условие  $a, b \in \mathbb{R}$ ). Пак от (3) се получава, че за всяко  $n=0, 1, 2, \dots$  числото  $r_n$  е реално за произволни реални числа  $a, b \neq 0, u, v$ .

**Трети подход** (чрез аритметични действия с комплексни числа)

Ако означим  $v - ua + u\sqrt{b} = z_1$  и  $a + \sqrt{b} = z_2$ , то

$$r_n = \frac{1}{2i \cdot \text{Im } z_2} (z_1 z_2^n - \overline{z_1 z_2^n}).$$

Означаваме  $z_2^n = z_3$  и  $z_1 z_3 = z_4$ . Тогава

$$r_n = \frac{1}{2i \cdot \text{Im } z_2} (z_4 - \overline{z_4}) = \frac{1}{i \cdot 2 \text{Im } z_2} \cdot 2 \text{Im } z_4 \cdot i = \frac{\text{Im } z_4}{\text{Im } z_2} \in \mathbb{R}.$$

Предложената задача е подходяща от гледна точка на това, че има различни, основаващи се на методическо разнообразие, начини за решаване и избраният подход от състезателя би съответствал на неговата индивидуална подготовка и творческо мислене<sup>2</sup>.

Нека формулираме следната:

**Задача 3.** Нека  $a, b, c$  и  $d$  са произволни реални числа. Да се докаже, че

$$(a + \sqrt{b})(c + \sqrt{d})^n + (a - \sqrt{b})(c - \sqrt{d})^n$$

е реално число.

Запознатите с комплексни числа лесно ще я решат, като покажат, че числото  $z_1 z_2^n + \overline{z_1 z_2^n}$  е реално, където  $z_1 = a + \sqrt{b}$  и  $z_2 = c + \sqrt{d}$ .

Тези, които не са изучавали комплексни числа и действия с тях, биха могли да я решат по някой от първите два подхода, изложени в решението на задача 1. За тях, разбира се, се изискват знания или за Нютонов бином, или за решаване на рекурентни уравнения.

Накрая ще предложим една задача, която е частен случай на задача 1.

**Задача 4.** Да се докаже, че числото

$$p_n = (6 + i)(2 + 3i)^n + (6 - i)(2 - 3i)^n$$

е реално за всяко  $n = 0, 1, 2, \dots$

Един възможен начин за решаване е, като се приложи казаното по-горе за комплексни числа. Друг подход е чрез използване на задача 1, като  $a = 2, b = -9, u = 2, v = 3$ . Тогава

$$p_n = \frac{1}{6} r_n,$$

където от (3) ще следва, че

$$r_n = 4r_{n-1} - 13r_{n-2}, \quad r_0 = u = 2, r_1 = v = 3.$$

Съгласно задача 1,  $r_n$  е реално число за всяко  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Следователно и  $p_n = \frac{1}{6} r_n$  е реално число за всяко  $n = 0, 1, 2, \dots$

*Изводи, които се налагат по отношение съставянето на състезателни задачи*

1) Задачите, които се предлагат, не трябва да имат единствен, еднозначен метод за решаване, а да имат възможност за прилагане на различни подходи (в зависимост от натрупания теоретичен потенциал), които да водят до намиране на решението.

2) В същото време да няма прекалено „прост“ начин за тяхното решаване, освен ако той не е основан на някакви твърдения, които са извън преподавания материал и изискват (солидна) допълнителна подготовка на състезателите (например стереометрична задача, в която се прилага теоремата на Креле).

3) Нека не изхождаме от гледна точка на уменията на автора на дадена задача, който в повечето случаи е специалист в конкретна област на математиката. На практика се предлагат задачи от различни области, като състезателите не могат да са всезнаещи във всяка област и не е задължително да познават всички теоретични постановки в тях. Следователно трябва да има алтернативни варианти като възможност за решаване на съответните задачи, чрез което да се покаже последователността от мисловни разсъждения, а не познаване само на тънкостите в конкретната материя. Тогава бихме могли да подберем „звездичките“, а не да дадем задача, в която например, ако не знаеш теорема „№  $n$ “ на математика „ $X$ “, да не можеш по никакъв друг начин да намериш решението.

## БЕЛЕЖКИ

1. От второто уравнение на системата непосредствено се вижда, че  $a \neq 0, b \neq -c$ .
2. Авторите не претендират, че предложените подходи за решаване на задачите изчерпват всички възможни.

## ЛИТЕРАТУРА

Колмогоров, А. Н. (1998). „Математика – наука и професия“. Москва.

Николаев, Р. & Петков, Й. (2014). Някои методически обобщения за решаване на един тип задачи от линейната алгебра. *Математика и информатика*, 57 (2), 155 – 165.

## SOME METHODOLOGICAL APPROACHES TO COMPOSE OLYMPIAD PROBLEMS

**Abstract.** In comparison with problems, included in lecture courses or in exams on mathematical subjects, the Olympiad problems should assure possibilities for creativity and non-standard thinking of competitors. Thus, it is quite desirable that such problems allow more than one method to find corresponding solutions. The paper proposes a type of problems with various approaches to their solutions.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS

Acad. G. Bonchev Street, bl. 8

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech

31, Sajko Saev Street

Lovech, Bulgaria

vnenkov@mail.bg