Educational Research
Научно-методически статии

НЯКОИ МЕТОДИЧЕСКИ ОБОБЩЕНИЯ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЕДИН ТИП ЗАДАЧИ ОТ ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА

Росен Николаев, Йордан Петков
Икономически университет – Варна

Резюме. В настоящата статия, на основата на подходящо подбрани задачи, е изведена обобщена формула за пресмятане на произволна степен на квадратна матрица от втори ред с помощта на рекурентни редици. Разработката има методологически характер, като акцентът е поставен върху последователността от разсъждения на авторите - от идеята за съставяне на подобен вид задачи до обобщение, даващо възможност за директното им решаване.

Keywords: 2×2 matrices, recurrent sequence, characteristic equation, methodology.

На редица студентски олимпиади по математика (както на вътрешноуниверситетски кръгове, така и на Националната студентска олимпиада по математика) се предлагат задачи, свързани със степените на дадена (или дадени) матрица. В повечето случаи тази степен е обвързана с годината, в която се провежда съответното състезание. Много често при съставянето на подобни задачи се срещат редица трудности, свързани с откриване на определени зависимости, които са в сила за някои от степените на матриците.

Целта в настоящата статия е на основата на подходящо подбрани задачи и последователност от разсъждения при тяхното решаване да се предложи обобщена формула за пресмятане на A^n, където A е произволна квадратна матрица от втори ред. Следва да се отбележи, че подобни обобщени формули се срещат в публикации на други автори, като (Blatz,1968), (Williams,1992), (McLaughlin,2004). За разлика от тях в тази разработка е направен опит да се предложи един „по-естествен“ подход, акцентиращ върху етапите на изследователския процес при обобщаване на дадена конкретна задача. Според нас той има значение от методологична гледна точка за пътя, по който би могъл да тръгне всеки занимаващ се с някаква конкретна проблематика, за да достигне до изводи с по-общ характер и по-широка приложимост.

Като начало ще разгледаме следната задача.

Задача 1. Дадена е матрицата $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Да се намери обратната матрица на A^{2014}.

Решение: Един от „традиционните” подходи при решаване на такива задачи е последователното повдигане на A на степени с цел да се установи зависимост, позволяваща пресмятането на произволна нейна степен. Прилагайки този подход, намираме последователно:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix};$$

$$A^3 = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix};$$

$$A^4 = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Сравнявайки елементите на получените матрици, можем да забележим, че във всяка следваща степен на A елементите от първия стълб нарастват с 1, а елементите от втория намаляват с 1. Затова допускаме, че елементите на матрицата A^k се получават по формулите[1]:

$$\begin{gathered} a_{11}^{(k)} = a_{11} + k - 1 = k + 1, \\ a_{12}^{(k)} = a_{12} - k + 1 = -k, \\ a_{21}^{(k)} = a_{21} + k - 1 = k, \\ a_{22}^{(k)} = a_{22} - k + 1 = -k + 1 \end{gathered} \tag{1}$$

или

$$A^k = \begin{Vmatrix} k+1 & -k \\ k & -k+1 \end{Vmatrix}.$$

От предходните изчисления се вижда, че формули (1) са в сила за $k = 1, 2, 3, 4$. Допускаме, че са в сила и за произволна степен $k > 4$. Съгласно метода на математическата индукция остава да покажем тяхната валидност и за степен k+1, т.е. че

$$A^{k+1} = \begin{Vmatrix} k+2 & -k-1 \\ k+1 & -k \end{Vmatrix}.$$

Наистина $A^{k+1} = A^k . A = \begin{Vmatrix} k+1 & -k \\ k & -k+1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k+2 & -k-1 \\ k+1 & -k \end{Vmatrix}.$

Сега, използвайки формули (1), лесно можем да намерим, че

$$A^{2014} = \begin{Vmatrix} 2014+1 & -2014 \\ 2014 & -2014+1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2015 & -2014 \\ 2014 & -2013 \end{Vmatrix}.$$

Детерминантата на матрицата A^{2014} е $\det(A^{2014}) = -2015.2013 + 2014^2 = 1$. За търсената обратна матрица получаваме

$$(A^{2014})^{-1} = \frac{1}{\det(A^{2014})} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2013 & 2014 \\ -2014 & 2015 \end{Vmatrix}.$$

Матрицата A^k, $k > 2$ има същата детерминанта (равна на 1) и същата следа (равна на 2) като матрицата A.

Сега ще предложим подобна задача, но при нея закономерностите за намиране елементите на A^k, $k = 2, 3, ...$, се откриват не така лесно, както при предходната задача.

Задача 2. Дадена е матрицата $A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$. Да се намери матрицата A^{2014}.

Решение: Прилагаме описания в задача 1 подход с последователно повдигане на матрицата A на степени, с цел да се установи закономерност при получаване на елементите на всяка следваща матрица. Пресмятаме последователно:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{Vmatrix};$$

$$A^3 = \begin{Vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{Vmatrix};$$

$$A^4 = \begin{Vmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{Vmatrix}.$$

Сравнявайки елементите на получените матрици, можем да установим следните зависимости:

$$a_{11}^{(2)} = 2a_{11} + 1,\ a_{11}^{(3)} = 2a_{11}^{(2)} + 1 = 4a_{11} + 3,\ a_{11}^{(4)} = 2a_{11}^{(3)} + 1 = 8a_{11} + 7;$$

$$a_{12}^{(2)} = 2a_{12} - 1,\ a_{12}^{(3)} = 2a_{12}^{(2)} - 1 = 4a_{12} - 3,\ a_{12}^{(4)} = 2a_{12}^{(3)} - 1 = 8a_{12} - 7;$$

$$a_{21}^{(2)} = 2a_{21} + 2,\ a_{21}^{(3)} = 2a_{21}^{(2)} + 2 = 4a_{21} + 6,\ a_{21}^{(4)} = 2a_{21}^{(3)} + 2 = 8a_{21} + 14;$$

$$a_{22}^{(2)} = 2a_{22} - 2,\ a_{22}^{(3)} = 2a_{22}^{(2)} - 2 = 4a_{22} - 6,\ a_{22}^{(4)} = 2a_{22}^{(3)} - 2 = 8a_{22} - 14.$$

Затова допускаме, че елементите на матрицата A^k се получават по формулите:

$$a_{11}^{(k)} = 2^{k-1}a_{11} + 2^{k-1} - 1 = 2^{k+1} - 1;$$

$$a_{12}^{(k)} = 2^{k-1}a_{12} - 2^{k-1} + 1 = -2^k + 1; \qquad (2)$$

$$a_{21}^{(k)} = 2^{k-1}a_{21} + 2^k - 2 = 2^{k+1} - 2\,;$$
$$a_{22}^{(k)} = 2^{k-1}a_{22} - 2^k + 2 = -2^k + 2$$

или

$$A^k = \begin{Vmatrix} 2^{k+1} - 1 & -2^k + 1 \\ 2^{k+1} - 2 & -2^k + 2 \end{Vmatrix}.$$

Формули (2) са в сила за k=1, 2, 3, 4. Допускаме, че са в сила и за произволна степен $k > 4$. Съгласно метода на математическата индукция остава да покажем тяхната валидност и за степен k+1, т.е. че

$$A^{k+1} = \begin{Vmatrix} 2^{k+2} - 1 & -2^{k+1} + 1 \\ 2^{k+2} - 2 & -2^{k+1} + 2 \end{Vmatrix}.$$

Наистина $A^{k+1} = A^k.A = \begin{Vmatrix} 2^{k+1} - 1 & -2^k + 1 \\ 2^{k+1} - 2 & -2^k + 2 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2^{k+2} - 1 & -2^{k+1} + 1 \\ 2^{k+2} - 2 & -2^{k+1} + 2 \end{Vmatrix}.$

Сега, използвайки формули (2), лесно можем да намерим, че

$$A^{2014} = \begin{Vmatrix} 2^{2015} - 1 & -2^{2014} + 1 \\ 2^{2015} - 2 & -2^{2014} + 2 \end{Vmatrix}.$$

Детерминантата на матрицата A^k е равна на 2^k, а следата й е равна на $2^k + 1$.

Като недостатъци на приложения подход при решаване на двете задачи може да отбележим:

- индивидуален подход към всяка матрица;
- голям обем изчисления, особено в началото, до откриване на зависимостите;
- в повечето случаи (като задача 2) трудно се забелязват зависимостите.

Ще предложим един обобщен подход, основан на характеристичния полином на матрица и рекурентни редици, позволяващ намирането на елементите на произволна степен на матрицата с размерност 2×2.

Да разгледаме следната задача.

Задача 3. Дадена е матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,2}$ със следа tr(A)=t (t∈R) и детерминанта det(A)=1. Да се намери матрицата A^n (n>1).[2]

Решение: Характеристичното уравнение на матрицата A с размерност 2×2 има вида (Gradshteyn & Ryzhik,2000):

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

или, в случая,

$$\lambda^2 - t\lambda + 1 = 0\,.$$

Съгласно теоремата на Хамилтон-Кейли (Gradshteyn & Ryzhik,2000) всяка матрица удовлетворява характеристичното си уравнение, т.е. изпълнено е равенството

$$A^2 - tA + 1.E = \mathbf{0}, \qquad (3)$$

където E е единичната матрица с размерност 2×2, а $\mathbf{0}$ е съответната нулева матрица.

От уравнението (3) получаваме

$$A^2 = tA - 1.E. \qquad (3')$$

Умножавайки двете страни с матрицата A, последователно намираме:

$A^3 = tA^2 - 1.A = (t.t-1)A - tE = (t^2-1)A - tE;$

$A^4 = (t^2-1)A^2 - tA = (t(t^2-1)-t)A - (t^2-1)E = (t^3-2t)A - (t^2-1)E\,;$

$A^5 = (t^3-2t)A^2 - (t^2-1)A = (t(t^3-2t)-(t^2-1))A - (t^3-2t)E = (t^4-3t^2+1)A - (t^3-2t)E\,.$

Ако представим матрицата A^n във вида $A^n = a_nA - b_nE$, за коефициентите a_n и b_n се забелязват следните зависимости[3]:

$$a_0 = 0\,,\ b_0 = -1\,,\ a_1 = 1\,,\ b_1 = 0 \text{ и за } n \ge 2:$$

$$a_n = ta_{n-1} - a_{n-2}\,; \qquad (4)$$

$$b_n = a_{n-1}\,. \qquad (5)$$

Наистина, нека $A^{n-1} = a_{n-1}A - b_{n-1}E$, където $a_{n-1} = ta_{n-2} - a_{n-3}$; $b_{n-1} = a_{n-2}$. След като умножим двете страни на равенството $A^{n-1} = a_{n-1}A - b_{n-1}E$ с A, получаваме

$A^n = a_{n-1}A^2 - b_{n-1}A = a_{n-1}tA - a_{n-1}E - b_{n-1}A = (a_{n-1}t - b_{n-1})A - a_{n-1}E = (a_{n-1}t - a_{n-2})A - a_{n-1}E\,.$

Следователно посочените рекурентни връзки (4) и (5) са в сила за произволна степен на матрицата A.

За да изразим в явен вид a_n и b_n, разглеждаме рекурентно зададената редица от коефициенти пред A:

$$\{a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = t, \ldots, a_n = ta_{n-1} - a_{n-2}\}.$$

На рекурентната връзка (4) съответства характеристичното уравнение[4] $x^2 - tx + 1 = 0$ с дискриминанта $D = t^2 - 4$. Разглеждаме два случая.

I случай. $D \ne 0 \Leftrightarrow t \ne \pm 2$. Характеристичното уравнение има два различни корена (реални или комплексни) $x_{1,2} = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}$. Формулата за общия член на редицата има вида (Greene & Knuth,1982):

$$a_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n = c_1\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n.$$

За $n = 0$ и $n = 1$ получаваме системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} a_0 = 0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = c_1\left(\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right), \end{array}\right.$$

откъдето $c_1 = -c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-4}}$.

Тогава

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n\right], \qquad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^{n-1}\right],\ n \ge 1 \qquad (7)$$

и

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n\right]A - \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^{n-1}\right]E.$$

II случай. $D \neq 0 \Leftrightarrow$ t $\neq \pm 2$. Характеристичното уравнение има два еднакви корена $x_{1,2} = \dfrac{t}{2}$. Формулата за общия член на редицата в този случай има вида (Greene & Knuth,1982):

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 n x_1^n = \left(\frac{t}{2}\right)^n (c_1 + nc_2).$$

Замествайки в нея n=0 и n=1, получаваме системата уравнения

$$\left|\begin{aligned} & a_0 = 0 = c_1 \\ & a_1 = 1 = \frac{t}{2}(c_1 + c_2) \end{aligned}\right.,$$

откъдето $c_1 = 0, c_2 = \dfrac{2}{t}$.

Тогава

$$a_n = n\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1},\ n \ge 1 \qquad (8)$$

$$b_n = (n-1)\left(\frac{t}{2}\right)^{n-2},\ n \ge 1 \qquad (9)$$

и $A^n = n\left(\dfrac{t}{2}\right)^{n-1} A - (n-1)\left(\dfrac{t}{2}\right)^{n-2} E$.

Ще използваме получените формули за пресмятане на A^n, за да намерим матрицата A^{2014} от задача 1.

Матрицата $A=\begin{Vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$ има следа $tr(A)=t=2$ и детерминанта $\det(A)=d=1$. Дискриминантата е $D=t^2-4=0$. Следователно, по формули (8) и (9):

$$A^{2014}=2014\left(\frac{2}{2}\right)^{2013}\begin{Vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}-2013\left(\frac{2}{2}\right)^{2012}\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2015 & -2014\\ 2014 & -2013\end{Vmatrix}.$$

Изследванията дотук ни водят към идеята да се изведе формула за пресмятане на A^n, където A е произволна 2×2 матрица, т.е. с произволна следа $tr(A)=t$ и произволна детерминанта $\det(A)=d$. Ще формулираме следната теорема.

Теорема. Ако A е квадратна 2×2 матрица със следа $tr(A)=t$ и детерминанта $\det(A)=d$ $(t,d\in \mathrm{R})$, то матрицата A^n може да се представи във вида

$$A^n=a_nA-b_nE, \tag{10}$$

където $a_0=0$, $b_0=-1$, $a_1=1$, $b_1=0$ и за $n\geq 2$ a_n удовлетворява уравнението

$$a_n-ta_{n-1}+da_{n-2}=0, \tag{11}$$

а

$$b_n=da_{n-1}. \tag{12}$$

Доказателство: Доказателството на теоремата ще направим по индукция, като следваме направените в частния случай разсъждения.

Матрицата A удовлетворява характеристичното си уравнение, т.е. $A^2-tA+dE=0$, откъдето $A^2=tA-dE$. Допускаме, че за някое $k>2$ матрицата A^k може да се представи във вида (10). Ще покажем, че матрицата A^{k+1} се представя във вида $A^{k+1}=a_{k+1}A-b_{k+1}E$, където $a_{k+1}-ta_k+da_{k-1}=0$ и $b_{k+1}=da_k$.

Умножаваме двете страни на равенство (10) с A. Получаваме

$$A^{k+1}=a_kA^2-b_kA=a_k(tA-dE)-b_kA=(ta_k-b_k)A-da_kE=(ta_k-da_{k-1})A-da_kE.$$

Следователно $a_{k+1}=ta_k+da_{k-1}$ или $a_{k+1}-ta_k+da_{k-1}=0$ и $b_{k+1}=da_k$, с което теоремата е доказана.

Доказаната теорема позволява с разсъждения, аналогични на разгледания преди това частен случай, да бъдат изведени формули за непосредствено пресмятане на коефициентите a_n и b_n.

Разглеждаме рекурентно зададената редица:

$$\{a_0=0, a_1=1, a_2=t,\ldots, a_n=ta_{n-1}-da_{n-2}\}.$$

На рекурентната връзка $a_n=ta_{n-1}-da_{n-2}$ съответства характеристичното уравнение $x^2-tk+d=0$ с дискриминанта $D=t^2-4d$.

I случай. $D = t^2 - 4d \neq 0$. Характеристичното уравнение има два различни корена (реални или комплексни) $x_{1,2} = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - 4d}}{2}$. Следователно

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n = c_1\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^n.$$

За $n = 0$ и $n = 1$ получаваме съответно

$$\left|\begin{aligned} &a_0 = 0 = c_1 + c_2 \\ &a_1 = 1 = c_1\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4d}}{2}\right) + c_2\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4d}}{2}\right) \end{aligned}\right.,$$

откъдето $c_1 = -c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-4d}}$.

Тогава

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{t^2-4d}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^n - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^n\right],\ n \geq 0 \qquad (13)$$

$$b_n = \frac{d}{\sqrt{t^2-4d}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^{n-1}\right],\ n \geq 1 \qquad (14)$$

и

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{t^2-4d}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^n - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^n\right]A - \frac{d}{\sqrt{t^2-4d}}\left[\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{t-\sqrt{t^2-4d}}{2}\right)^{n-1}\right]E.$$

II случай. $D = t^2 - 4d = 0$, $t \neq 0$[5]. Характеристичното уравнение има два еднакви корена $x_{1,2} = \dfrac{t}{2}$. Следователно $a_n = c_1 x_1^n + c_2 n x_1^n = \left(\dfrac{t}{2}\right)^n (c_1 + nc_2)$.

За n=0 и n=1 получаваме съответно

$$\left|\begin{aligned} &a_0 = 0 = c_1 \\ &a_1 = 1 = \frac{t}{2}(c_1 + c_2) \end{aligned}\right.,$$

откъдето $c_1 = 0, c_2 = \frac{2}{t}$.
Тогава:

$$a_n = n\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1}, \; n \geq 0 \tag{15}$$

$$b_n = d(n-1)\left(\frac{t}{2}\right)^{n-2}, \; n \geq 1 \tag{16}$$

и $A^n = n\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} A - d(n-1)\left(\frac{t}{2}\right)^{n-2} E$.

Ще използваме получените формули за пресмятане на A^n, за да намерим матрицата A^{2014} в задача 2.

Матрицата $A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$ има следа $tr(A)=t=3$ и детерминанта $\det(A)=d=2$. Дискриминантата е $D = t^2 - 4d = 1$, а $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. Следователно, по формули (13) и (14):

$$A^{2014} = \frac{1}{1}\left(2^{2014} - 1^{2014}\right).\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} - \frac{2}{1}\left(2^{2013} - 1^{2013}\right).\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3.2^{2014} - 3 & -2^{2014} + 1 \\ 2.2^{2014} - 2 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2^{2014} - 2 & 0 \\ 0 & 2^{2014} - 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2^{2015} - 1 & -2^{2014} + 1 \\ 2^{2015} - 2 & -2^{2014} + 2 \end{Vmatrix}.$$

С помощта на формулираната теорема ще решим още две задачи, в първата от които $\det(A) \neq 1$ и се получава двукратен корен на характеристичното уравнение, а с втората предлагаме вариант, при който корените на характеристичното уравнение са комплексни.

Задача 4. Дадена е матрицата $A = \begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$. Да се намери матрицата A^n.

Решение: Матрицата A има следа $t=6$ и детерминанта $d=9$. Характеристичното уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$ има дискриминанта $D = 0$ и два еднакви корени $x_1 = x_2 = 3$. По формули (15) и (16), след преобразуване, се получава:

$$A^n = n.3^{n-1}\begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - 9(n-1)3^{n-2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = 3^{n-1}\begin{Vmatrix} n+3 & -n \\ n & -n+3 \end{Vmatrix}.$$

Задача 5. Дадена е матрицата $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{Vmatrix}$. Да се намери матрицата A^n.

Решение: Матрицата A има следа t=0 и детерминанта d=1. Характеристичното уравнение $x^2 + 1 = 0$ има отрицателна дискриминанта $D = -4$ и два комплексни корена $x_1 = i$, $x_2 = -i$. По формули (13) и (14), след преобразуване, се получава:

$$A^n = \frac{1}{2i}\left(i^n - (-i)^n\right)\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{Vmatrix} - \frac{1}{2i}\left(i^{n-1} - (-i)^{n-1}\right)\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{i^n}{2}\begin{Vmatrix} 2i(-1+(-1)^n)+1+(-1)^n & -i(-1+(-1)^n) \\ 5i(-1+(-1)^n) & -2i(-1+(-1)^n)+1+(-1)^n \end{Vmatrix}.$$

В заключение можем да направим следното обобщение. Ако искаме да намерим вида на A^n, където A е произволна 2×2 матрица, можем да използваме следния алгоритъм:

1) Пресмятаме $t = tr\,(A)$ и $d = \det(A)$.

2) Намираме a_n и b_n по формули (13)-(14) или (15)-(16) в зависимост от това дали $t^2–4d \neq 0$ или $t^2–4d = 0$.

3) Изразяваме A^n чрез $A^n = a_nA - b_nE$.

Описаният алгоритъм може да бъде полезен както при решаване, така и при съставяне на подходящи състезателни задачи, в които се прилагат описаният подход и получените обобщени формули.

БЕЛЕЖКИ

1. Тук a_{ij} $(i, j = 1,2)$ са елементите на матрицата A, а $a_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1,2)$ - елементите на матрицата A^k $(k = 2,3,...)$.
2. Това е един частен случай, тъй като всички такива матрици имат детерминанта, равна на едно.
3. Тук a_0 може да се разглежда като коефициент в изразяването $A^0 = 0.A–(–1).E$, а a_1 - като коефициент в изразяването $A^1 = 1.A–0.E$ $A^1 = 1.\grave{A} - 0.\mathring{A}$.
4. То има същия вид, като характеристичното уравнение на самата матрица A.
5. Ако t=0 и D=0 , то следва, че и d=0. Характеристичното уравнение на матрицата A има вида λ^2=0, откъдето следва, че $A^n = 0$ за всяко $n \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

Blatz, P. J. (1968). *On the Arbitrary Power of an Arbitrary (2×2)-Matrix (in Brief Versions)*. The American Mathematical Monthly, Vol. 75, No. 1, pp. 57-58.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2000). *Tables of Integrals, Series, and Products, 6th ed*. San Diego, CA: Academic Press, pp. 1117-1119.

Greene, Daniel H. and Knuth, Donald E. (1982). *„2.1.1 Constant coefficients – A) Homogeneous equations“*, Mathematics for the Analysis of Algorithms (2nd ed.), Birkhäuser, p. 17.
McLaughlin, James. (2004). *Combinatorial Identities Deriving from the n-th Power of a 2×2 Matrix*. Integers 4, A19, 14 pp.
Williams, Kenneth S. (1992). *The nth Power of a 2×2 Matrix (in Notes)*. Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 5, p. 336.

SOME METHODOLOGICAL GENERALIZATIONS IN THE SOLUTION OF A TYPE OF LINEAR ALGEBRA PROBLEMS

Abstract. In the present article, on the basis of appropriately selected problems, a general formula for calculating a second-order square matrix to an unspecified power is derived using recurrences. The material concerns methodology with a stress on the consistency of the authors' reasoning – starting with the initial idea for composing such type of problems and ending with a conclusion, leading to their direct solutions.

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof.**
University of Economics - Varna
77 „Kniaz Boris I“ blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Dr. Jordan Petkov, Assist. Prof.**
University of Economics - Varna
77 „Kniaz Boris I“ blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: jr_petkov@ue-varna.bg