Educational Matters
Научно-методически статии

НОВАЯ СЕРИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ С ШАХМАТНОЙ ТЕМАТИКОЙ: ШАХМАТНАЯ ДОСКА, ЛАДЬИ И ЧИСЛА

Иван Попов
Северный (Арктический) федеральный университет – Архангельск (Россия)

Аннотация. В статье предлагается новая серия олимпиадных задач по математике. Приводится обзор олимпиадных задач, содержание которых направлено на исследования качественного (возможного, допустимого) или количественного расположения ладьи или ладей на шахматной доске. Формулировки новых задач связаны с исследованием сочетания шахматной доской с пронумерованными клетками и расставленными четырьмя ладьями. Ладьи располагаются на шахматной доске таким образом, что каждая бьет две ладьи из трех оставшихся. Другими словами, клетки шахматной доски, в которых расположены ладьи, являются вершинами прямоугольника, сторонами которого являются вертикальные и горизонтальные клетки доски. Всем клеткам шахматной доски сопоставлены числа. Подсчитывается полусумма чисел, закрытых ладьями. Следует определить возможные значения таких полусумм. Шахматной доске с пронумерованными клетками сопоставляется матрица. Прямоугольникам доски сопоставляются соответствующие прямоугольники матрицы, которые называются ее квадратами. Полусуммы называются суммами квадратов матрицы. Вводится величина, равная количеству квадратов матрицы, равных определенному числу. Исследуется эта величина на возможные ее значения и симметричность относительно некоторого числа, если ее рассматривать как функцию одной переменной. Свойства этой величины относится к числовым характеристикам квадратов матрицы. Задачей о четырех ладьях является задача об определении числовых характеристик квадратов матрицы. В статье разбирается пример решения задачи о четырех ладьях и приводится обзор решенных подобных задач с определенными нумерациями клеток.

Ключевые слова: олимпиада по математике; шахматы; шахматная ладья; квадрат матрицы, сумма квадрата матрицы

1. Введение

Олимпиада по математике – интеллектуальное соревнование, выявляющее не только математические знания за определенный класс или курс, но и умения применять знания в нестандартных ситуациях, требующих творческого мышления.

Первая математическая олимпиада в СССР прошла в 1935 году в Москве. Первая Всероссийская олимпиада по математике была проведена в 1960 году, а Всесоюзные олимпиады начинают историю с 1967 года.

Одна из серий олимпиадных задач связана с шахматами. Это и не удивительно. Испокон веков на Руси, в Российской империи, в СССР и в современной России шахматам уделяли и уделяют большое внимание. В любом сборнике олимпиадных задач по математике можно найти задачи с шахматами (Grozdev, 2007), (Galperin & Tolpygo, 1986), (Gorbachev, 2004), (Zaslavsky et al., 2009), (Prassolov, 1991), (Fedorov et al., 2006), (Yakovlev et al., 1992). Первая задача такого содержания появилась в XIII Московской олимпиаде 1950 года со следующей формулировкой: «Имеется шахматная доска с обычной раскраской (границы квадратов считаются окрашенными в черный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на черных полях, и доказать, что большей окружности того же рода начертить нельзя» (Galperin & Tolpygo, 1986).

Первая задача, в которой исследуется движение шахматной фигуры – это задача XVI Московской олимпиады для учеников X классов1953 года: «На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найти все клетки, куда он может попасть ровно за $2n$ ходов» (Galperin & Tolpygo, 1986), (Popov, 2018). Такая фигура как ладья впервые появляется в задаче № 4 XXII Московской олимпиаде для VII класса: «Как должна двигаться ладья на шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать наименьшее число поворотов?» (Galperin & Tolpygo, 1986).

Целью статья является предложение новой серии задач, связанных с шахматной доской с пронумерованными полями и расположенными на ней четырьмя ладьями. Под шахматной доской можно понимать не только доску размером 8×8, но доску размером $m \times n$, где m и n – натуральные числа.

Одной из шахматных фигур является ладья. Как известно, ладья может двигаться по прямым (по горизонтали или вертикали) на любое расстояние, но не может перескакивать через фигуры, стоящие на ее пути.

Будем использовать следующие словосочетания: мирные ладьи; ладьи, не бьющие друг друга. В каждом случае понимается то, что ладьи расположены в разных строках и столбцах шахматной доски. В противовес этим понятиям можно рассмотреть такие понятия как атакующие, бьющие, друг друга ладьи.

Клетки шахматной доски называются запрещенными, если на них нельзя ставить фигуры.

2. Обзор олимпиадных задач

При составлении олимпиадных задач с шахматной тематикой возможны сочетания элементов шахмат (доска, фигуры) и математических объектов (например, чисел). С общими методами решения олимпиадных задач можно ознакомиться в работах (Grozdev, 20017), (Kanel-Belov et al., 2008), (Prasolov, 1991). Отметим, что одним из методов решения является метод раскраски в шахматном порядке. В решении следующей задачи как раз используется этот метод.

Задача. Докажите, что доску размером 10x10 клеток нельзя разрезать на фигурки в форме буквы «Т», состоящей из четырех клеток (Prasolov, 1991: 145).

Раскрасим доску в шахматном порядке. Если предположить, что сделать это возможно, то каждая фигурка содержит либо 1, либо 3 черные клетки, то есть нечетное число. Самих фигурок будет при этом 25 штук. Поэтому они в совокупности содержат нечетное число черных клеток. Но при этом количество черных клеток равно 50. Получили противоречие. ■

2.1. Шахматная доска и ладьи

А. Самой, наверное, известной задачей о ладьях является следующая (Gik, 1983: 34), (Ivanov, 2001: 11), (Savelev, 1979: 128):

Задача. Сколькими способами можно расставить n мирных ладей на шахматной доске размерности $n \times n$?

Ответом является число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. В частности, $8! = 40320$. ■

Многие задачи на расстановку или подсчет количества расстановок ладей на шахматной доске можно переформулировать в задачи по различным разделам математики (комбинаторике, теории групп, теории чисел и так далее). Например, рассмотренная задача эквивалентна задаче о назначениях.

Задача. Пусть требуется назначить n рабочих на n различных работ, причем каждая работа должна выполняться только одним рабочим. Сколькими способами можно осуществить такое назначение? (Gik, 1983: 34).

В общем случае задача о мирных ладьях звучит следующим образом.

Задача. Сколькими способами можно расставить k мирных ладей на шахматной доске размером $m \times n$? (Ivanov, 22001: 11-12).

Ответом является число $C_n^k \cdot C_m^k \cdot k!$, где $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ – биномиальный коэффициент.

В противовес этой задаче можно сопоставить задачу о максимальном числе ладей, каждая из которых бьет не более двух других (Zaslavsky et al., 2009: 336, № 3).

Б. Чаще всего в задачах предполагается, что фигуры имеют один цвет. Если же рассматриваются фигуры разного цвета (черного и белого), то количество вариантов расположения меняется.

Задача. Сколькими способами можно расставить n мирных ладей на шахматной доске размерности $n \times n$, если k из них – белые и $n-k$ – черные? (Zaslavsky et al., 2009: 336, № 3).

Искомое число равняется $n! \cdot C_n^k$. Для доски 8×8 получаем $40320 \cdot C_8^k$ возможностей. ■

В. Также встречаются задачи с ограничениями на расстановку ладей на шахматной доске или на их число.

Задача. Сколькими способами можно расставить n мирных ладей на шахматной доске размерности $n \times n$ так, чтобы ни одна из них не стояла на главной диагонали? (Gik, 1983).

Л. Эйлер предложил рекуррентное соотношение

$$A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2}),\ \ A_1 = 0,\ \ A_2 = 1,\ \ n \geq 3$$

где A_n – число указанных расстановок ладей. В частности,

$$A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 2,\ A_4 = 9,\ A_5 = 4\ ,\ A_6 = 265,\ A_7 = 1854\,.$$

Верна формула

$$A_n = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right),\ n \geq 0\,.$$

Для обычной шахматной доски 8×8 получаем результат: $A_8 = 14833$. ■

Клетки, которые являются запрещенными для постановки в них ладей, могут быть определены следующим образом. Предположим, что на шахматной доске 8×8 в одной из ее клеток расположен король (или слон). Следует определить количество способов расстановки 8 ладей таким образом, чтобы ни одну из них не бил король (слон). Такого сорта задачи (Ivanov, 2001: 251, № 131, 132).

Задача. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размера $m \times n$ две мирные ладьи?

Эта задача равносильна следующей задаче.

Задача. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске четыре ладьи, каждая из которых бьет две из оставшихся трех? (Popov, 2018)

Ответом является число $\dfrac{mn(m-1)(n-1)}{4}$, так как четыре ладьи следует расставлять в вершинах прямоугольника, количество которых вычисляется по указанной формуле. Для обычной шахматной доски 784 способами можно расставить ладьи указанным способом. ■

Г. При решении задач с запрещенными клетками могут помочь ладейные многочлены (Gik, 1983), (Ivanov, 2001), (Riordan, 1963). Многочлен $L(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k x^k$ называется ладейным, если ℓ_k – число способов расстановки k мирных ладей на выделенных клетках доски, считая, что $\ell_0=1$ и ладьи являются неразличимыми. Например, если на доске размерности $n\times n$ разрешается расставить k мирных ладей только на ее одной из диагоналей, то ладейный многочлен имеет вид $L(x)=(1+x)^n$ (Ivanov, 2001: 61). Используя бином Ньютона (Ivanov, 2001: 18), получаем, что для коэффициентов многочлена $L(x)$ справедливо: $\ell_k=C_n^k$ при $0\le k\le n$ и $\ell_k=0$ при $k>n$, поэтому расставить k мирных ладей на диагонали можно C_n^k способами, если $0\le k\le n$.

Д. Формулируются задачи об обходе ладьей полей шахматной доски с определенными условиями, в частности, с условием минимальности пройденных клеток шахматной доски или с условием обхода всех клеток доски.

Можно сформулировать задачу об обходе ладьей всей шахматной доски с условием, что нужно побывать на каждой клетке доски только один раз. При этом следует рассматривать замкнутые и незамкнутые маршруты (Gik, 1983: 41).

Задача. В углу шахматной доски размером $n\times n$ стоит ладья. При каких n, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, она может за n^2 ходов побывать на всех полях доски и вернуться на место? Учитываются только поля, на которых ладья останавливалась, а не те, над которыми она проносилась во время хода. За каждым горизонтальным ходом должен следовать вертикальный, а за каждым вертикальным – горизонтальный (Fedorov et al., 2006: 30).

Можно показать, что при четных n задача имеет решение, при нечетных n задача не разрешима. ■

Задача. Чему равно число кратчайших путей, по которым ладья может перейти из одного углового поля на шахматной доске в другое, диагонально противоположное? (Gardner, 1999: 39), (Popov, 2018).

Ответом является число 3432, равное C_{14}^7. Решение задачи тесно связано с треугольником Паскаля (Gardner, 1999: 41). ■

Также рассматриваются задачи о минимальных путях с «преградами», то есть ряд клеток шахматной доски для ладьи являются запрещенными в том смысле, что на них не только нельзя останавливаться, но и «пролетать». Такие задачи можно найти на сайте https://kopilkaurokov.ru/vneurochka/meropriyatia/konspiekt-stsienariia-dlia-piervogho-ghoda-obuchieniia-shakhmatnyi-turnir.

Е. Можно выделить олимпиадные задачи о выработке стратегии в играх с использованием ладьи или ладей.

Задача. В углу шахматной доски размером $m \times n$ полей стоит ладья. Двое по очереди передвигают ее по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть? (Fedorov et al., 2006: 31).

Стратегия заключается в том, что первому достаточно все время делать наиболее длинные ходы. ■

Подобные задачи (Zaslavsky et al., 2009: 331, № 6, 332, № 8, 9, p. 331, № 1).

Ж. Для шахматных фигур выделяется серия задач об «обстреле» клеток шахматной доски. Для ладьи подобная задача звучит следующим образом.

Задача. Сколькими способами можно расставить n мирных ладей на доске $n \times n$ так, чтобы они держали под обстрелом все поля доски? (Gik, 1983: 36).

Ответом является число $2n^n - n!$. В случае $n = 8$ получаем 33514312 способов. ■

2.2. Шахматная доска, ладьи и числа

В клетки (поля) шахматной доски могут вписываться числа. Расстановке ладей можно сопоставить набор чисел или некоторое число. Приведем примеры таких задач.

Задача. Пусть на каждом поле шахматной доски 8×8 записано произведение номеров горизонтали и вертикали, которым оно принадлежит. Расставить восемь мирных ладей так, чтобы сумма чисел на полях, занимаемых ими, была наибольшей (Gik, 1983: 39).

Ладей следует расположить вдоль главной диагонали и ответом на задачу будет число 204. Обобщая задачу на доску размером $n \times n$, получаем ответ, равный $1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. ■

Задача. На полях шахматной доски вписаны подряд числа от 1 до 64 (на первой горизонтали слева направо – от 1 до 8, на второй – от 9 до 16 и так далее). Поставим на доску восемь мирных ладей. Какие значения может принимать сумма чисел на полях, занятых ладьями? (Gik, 1983: 41).

Ответом является число 260. Для случая доски $n \times n$ получаем число $\dfrac{n^3+n}{2}$ или $\dfrac{n^3+n}{2} + n \cdot (a-1)$, если записываются последовательные числа, начиная с числа a (Gik, 1983: 24). ■

Задача. В клетках шахматной доски размером $n \times n$ расставлены числа: на пересечении k-й строки и m-го столбца стоит число a_{km}. При любой расстановке на этой доске n мирных ладей, сумма закрытых чисел равна одному и тому числу. Докажите, что существует два набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что при всех k и m выполняется равенство $a_{km} = x_k + y_m$ (Galperin & Tolpygo, 1986:121).

Следует показать, что справедливо равенство $a_{km} + a_{11} = a_{k1} + a_{1m}$.

Пусть $k \neq 1$ и $m \neq 1$ (если $k = 1$ или $m = 1$, то равенство справедливо). Расставим n мирных ладей так, что одна ладья закроет число a_{11}, а другая – число a_{km}. Обозначим символом Σ сумму всех чисел, закрытых остальными $n-2$ ладьями. Переставив только две выбранные ладьи так, что первая ладья будет закрывать число a_{k1}, вторая – число a_{1m}, получим по условию задачи равенство $a_{km} + a_{11} + \Sigma = a_{k1} + a_{1m} + \Sigma$, значит, $a_{km} + a_{11} = a_{k1} + a_{1m}$. Поэтому $a_{km} = a_{k1} + (a_{1m} - a_{11}) = (a_{k1} - a_{11}) + a_{1m}$. Обозначив $x_k = a_{k1}$ и $y_m = a_{1m} - a_{11}$ или $x_k = a_{k1} - a_1$ и $y_m = a_{1m}$, получаем требуемое. ■

Эту задачу можно считать обратной задачей к задаче о составлении квадратов доски размерности $n \times n$ с постоянной суммой чисел, записанных на ее полях, и закрытых n мирными ладьями (Gik, 1983: 23).

Шахматную доску с пронумерованными клетками можно воспринимать как матрицу (таблицу).

Задача. Пусть в матрице R размерности $m \times n$ расставлены числа от 0 до $mn-1$ следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & s & \ldots & n-1 \\ n & n+1 & \ldots & n+s & \ldots & n+(n-1) \\ 2n & 2n+1 & \ldots & 2n+s & \ldots & 2n+(n-1) \\ \ldots & & & & & \\ (i-1)n & (i-1)n+1 & \ldots & (i-1)n+s & \ldots & (i-1)n+(n-1) \\ \ldots & & & & & \\ (m-1)n & (m-1)n+1 & \ldots & (m-1)n+s & \ldots & (m-1)n+(n-1) \end{pmatrix}.$$

В матрице R выделяется квадратную подматрицу из последовательных строк и столбцов размерности $t \times t$, где $1 \le t \le \min\{m;n\}$. Пусть это матрица

$$R(s;t)=\begin{pmatrix} s & s+1 & \dots & s+t-1 \\ n+s & n+s+1 & \dots & n+s+t-1 \\ 2n+s & 2n+s+1 & \dots & 2n+s+t-1 \\ \dots & & & \\ (t-1)n+s & (t-1)n+s+1 & \dots & (t-1)n+s+t-1 \end{pmatrix},$$

где $0 \le s \le n(m-t)+n-t$. На числа матрицы $R(s;t)$ расставим t мирных ладей. Суммой $\mathrm{sum}_{R(s;t)}$ матрицы $R(s;t)$ назовем число, равное сумме чисел, закрытых ладьями.

Элементы матрицы $R(s;t)$ могут быть получены как суммы чисел двух наборов $(s;s+1;s+2;\dots;s+t-1)$ и $(0;n;2n;\dots;(t-1)n+s)$, записав первый набор горизонтально, а второй – вертикально. Отсюда получаем, что сумма $\mathrm{sum}_{R(s;t)}$ равна сумме чисел из наборов, и, в частности, равна сумме чисел, стоящих на главной диагонали этого квадрата, а именно равна сумме $s+(n+s+1)+(2n+s+2)+\dots+((t-1)n+s+t-1)=\frac{t}{2}\cdot(2s+(t-1)(n+1))$.

Тогда

$$\mathrm{sum}_{R(s;t)}=\frac{t}{2}\cdot(2s+(t-1)(n+1)).$$

Заметим, что

$$2s+(t-1)(n+1)=R(s;t)_{1,1}+R(s;t)_{t,t},$$

где $R(s;t)_{1,1}$ и $R(s;t)_{t,t}$ – $1{,}1$ - и t,t -элементы матрицы $R(s;t)$ соответственно. Поэтому

$$\mathrm{sum}_{R(s;t)}=\frac{t}{2}\cdot(R(s;t)_{1,1}+R(s;t)_{t,t}).$$

Если t является нечетным и $t=2k+1$, где $k \in N$, то для числа $R(s;t)_{k+1,k+1}$, стоящего на пересечении диагоналей матрицы $R(s;t)$, верно равенство $R(s;t)_{k+1,k+1}=\frac{1}{2}\cdot(R(s;t)_{1,1}+R(s;t)_{t,t})$, поэтому в этом случае

$$\mathrm{sum}_{R(s;t)} = t \cdot R(s;t)_{k+1,k+1}.$$

Например, пусть матрица R имеет размерность 5×8,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 \\ 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 \end{pmatrix}$$

Для матриц

$$R(11;4) = \begin{pmatrix} 11 & [12] & 13 & 14 \\ [19] & 20 & 21 & 22 \\ 27 & 28 & [29] & 30 \\ 35 & 36 & 37 & [38] \end{pmatrix} \text{ и } R(2;5) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & [6] \\ 10 & 11 & [12] & 13 & 14 \\ [18] & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 26 & [27] & 28 & 29 & 30 \\ 34 & 35 & 36 & [37] & 38 \end{pmatrix}$$

справедливо: $\mathrm{sum}_{R(11;4)} = \dfrac{4}{2} \cdot (11+38) = 98$ и $\mathrm{sum}_{R(2;5)} = \dfrac{5}{2} \cdot (2+38) = 100$.

Если мирные ладьи выставлены в указанных скобками местах, то сумма закрываемыми ими числами равна в первом случае 98, во втором случае – 100. Для матрицы $R(2;5)$ справедливо: $\mathrm{sum}_{R(2;5)} = 5 \cdot r_{3,3} = 5 \cdot 20 = 100$. ■

3. Задача о четырех ладьях

Сформулируем следующую задачу о четырех ладьях на шахматной доске с пронумерованными клетками (кратко эту задачу будем называть задачей о четырех ладьях).

*Общая формулировка задачи***.** Пусть на шахматной доске размера $m \times n$ расставлены четыре ладьи так, что каждая бьет две из трех оставшихся. В клетках доски записаны числа. Определяется число $\nu(\mathrm{sum})$, равное количеству одинаковых полусумм sum чисел, закрытых ладьями. Следует определить характеристики величины $\nu(\mathrm{sum})$.

Пример. Будем рассматривать шахматную доску как матрицу. Пусть четыре ладьи закрывают клетки с отмеченными числами в матрице

$$A=\begin{pmatrix}[7] & 5 & [5] & 9\\ [1] & 5 & [7] & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[7] & 5 & 5 & [9]\\ [1] & 5 & 7 & [3]\end{pmatrix}.$$

В двух указанных случаях полусумма выделенных чисел равна

$$\frac{1+5+7+7}{2}=\frac{1+3+7+9}{2}=10.$$

Других вариантов расстановки ладей, в вершинах некоторого прямоугольника, чтобы полусумма закрываемых чисел равнялась 10, нет. Поэтому $v(10)=2$.

Для матрицы A справедливо: $v(9)=1$, $v(10)=2$, $v(11=2$ и $v(12)=1$, во всех остальных случаях $v=0$. ■

Определяемыми характеристиками величины $v(\text{sum})$ могут быть:

1) множество ее значений;

2) свойство симметричности: справедливость равенства

$$v(2a-\text{sum})=v(\text{sum})$$

для некоторого числа a и всех возможных указанных в задаче полусумм sum;

3) наибольшее (наименьшее) значение величины v.

Отдельным вопросом является выяснение области изменения полусумм чисел, которые могут быть закрыты ладьями.

Из условия задачи следует, что ладьи расположены в вершинах некоторого прямоугольника, составленного из полей доски.

Определим следующие понятия.

Подматрицу $\begin{pmatrix}a_{is} & a_{it}\\ a_{js} & a_{jt}\end{pmatrix}$ матрицы A размерности $m\times n$, где $1\le i\le m$, $1\le j\le m$, $1\le s\le n$, $1\le t\le n$, $i<j$, $s<t$, назовем квадратом и обозначим $A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$. По формуле $mn(m-1)(n-1)/4$ вычисляется количество квадратов матрицы A. Сумма квадрата $A(i,s;i,t;j,s;j,t)$ – число, равное $(a_{is}+a_{jt}+a_{it}+a_{js})/2$, которое обозначим $\text{Sum}(A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$ (Popov, 2014), (Popov, 2018).

Количество квадратов матрицы A, сумма каждого из которых равна sum, обозначим $v_A(\text{sum})$.

Число, которое является суммой некоторого квадрата данной матрицы, назовем возможным значением суммы квадрата этой матрицы. Можно сказать, что число sum является возможным значением суммы некоторого квадрата матрицы A, если $v_A(\text{sum})\ge 1$.

Если множество всех возможных значений сумм квадратов матрицы A обозначить V_A, то справедливо равенство

$$\sum_{\text{sum}\in V_A} v(\text{sum}) = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4} \quad .$$

Рассмотрим пример сформулированной задачи о четырех ладьях.

Задача. В клетках первой, второй и так далее строках шахматной доски размером $m \times n$ записаны последовательные целые числа от некоторого числа a до $a+n-1$. На шахматную доску ставятся четыре ладьи так, что каждая бьет две из трех оставшихся. Вычисляется полусумма чисел, закрытых ладьями. Определите количества совпадений получаемых таким образом полусумм.

Если шахматной доске с расставленными числами сопоставить матрицу $R(a)$ размерности $m \times n$, то матрица будет иметь вид:

$$R(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & \dots & a+(n-1) \\ a & a+1 & \dots & a+(n-1) \\ \dots & & & \\ a & a+1 & \dots & a+(n-1) \end{pmatrix}.$$

Примерами являются следующие матрицы:

$$R(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; R(5) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \; R(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Квадрат матрицы $R(a)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a+i & a+j \\ a+i & a+j \end{pmatrix},$$

где $i < j$, $0 \le i \le n-2$ и $1 \le j \le n-1$. Сумма квадрата равна $2a+i+j$. Видим, что сумма квадрата матрицы $R(a)$ не зависит от выбора строк этой матрицы.

Выбрать две строки из m строк можно $C_m^2 = \dfrac{(m-1)m}{2}$ способами.

Определим множество возможных значений сумм квадратов матрицы $R(a)$ (множество значений сумм, которые могут получаться в результате перебора всех квадратов матрицы $R(a)$).

Изменяя j от 1 до $n-1$ при $i=0$, получаем значения сумм квадратов $2a+1, 2a+2, \ldots, 2a+n-1$. Придавая теперь i значения от 0 до $n-2$, получаем значения сумм квадратов $2a+n, 2a+n+1, \ldots, 2a+2n-3$. Получаем, что суммы квадратов матрицы $R(a)$ принимают все целые значения из отрезка

$$[2a+1; 2a+2n-3].$$

Количество возможных значений равно $(2a+2n-3)-(2a+1)+1=2n-3$, то есть равно $2n-3$. Видим, что количество возможных значений нечетно. Серединой отрезка $[2a+1; 2a+2n-3]$ является число $2a+n-1$.

Определим значения величины $v_{R(a)}(\mathrm{sum})$.

Если $\mathrm{sum} \in [2a+1; 2a+2n-3]$, то для некоторых i и j верно равенство $\mathrm{sum} = 2a+i+j$. Найдем ограничения на величину i. Так как $j = \mathrm{sum} - 2a - i$, $i < j$, $0 \le i \le n-2$ и $1 \le j \le n-1$, то

$$\begin{cases} 1 \le \mathrm{sum} - 2a - i \le n-1, \\ 0 \le i \le n-2, \\ i < \mathrm{sum} - 2a - i, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{sum} - 2a - n + 1 \le i \le \mathrm{sum} - 2a - 1, \\ 0 \le i \le n-2, \\ i < \mathrm{sum}/2 - a. \end{cases}$$

Сравним величины $\mathrm{sum} - 2a - 1$ и $\mathrm{sum}/2 - a$.

Если sum – четное число, то $i \le \dfrac{\mathrm{sum}}{2} - a - 1$ и

$$(\mathrm{sum} - 2a - 1) - (\mathrm{sum}/2 - a - 1) = \mathrm{sum}/2 - a = (2a+i+j)/2 - a = (i+j)/2 > 0,$$

значит, $\mathrm{sum}/2 - a - 1 < \mathrm{sum} - 2a - 1$.

Если sum – нечетное число, то $i \le \dfrac{\mathrm{sum}-1}{2} - a$ и

$$(\mathrm{sum} - 2a - 1) - ((\mathrm{sum}-1)/2 - a) = (\mathrm{sum}+1)/2 - a - 1 = (i+j-1)/2 \ge 0,$$

значит, $(\mathrm{sum}-1)/2 - a \le \mathrm{sum} - 2a - 1$.

Получаем решение системы относительно величины i:

– если sum – четное число, то

$$\max\{0; \mathrm{sum} - 2a - n + 1\} \le i \le \min\{n-2; \mathrm{sum}/2 - a - 1\};$$

– если sum – нечетное число, то

$$\max\{0; \mathrm{sum} - 2a - n + 1\} \le i \le \min\{n-2; (\mathrm{sum}-1)/2 - a\}.$$

Возможное число изменений величины i равно возможному числу квадратов с суммой sum, то есть равно $v_{R(a)}(\mathrm{sum})$.

Найдем более простые формулы для подсчета $v_{R(a)}(\mathrm{sum})$.

Рассмотрим случай, в котором $a = 0$. Множество возможных значений сумм квадратов матрицы $R(0)$ имеет вид: $[1;\ 2n-3]$.

Величины i и j принимают $n-1$ значений каждая, так как $0 \le i \le n-2$ и $1 \le j \le n-1$. Рассмотрим матрицу X размерности $(n-1)\times(n-1)$, элементы которой равны суммам $i+j$, если $i<j$, и «х» – в противном случае,

$X =$

$i \setminus j$	1	2	3	…	$n-2$	$n-1$
0	1	2	3	…	$n-2$	$n-1$
1	×	3	4	…	$n-1$	n
2	×	×	5	…	n	$n+1$
…						
$n-2$	×	×	×	…	×	$2n-3$

На главной диагонали матрицы X – $(i+1, j)$-элементы, являющиеся нечетными числами.

Пусть $\mathrm{sum} \in [1; 2n-3]$. Величина $v_{R(0)}(\mathrm{sum})$ равна количеству чисел sum в матрице X, и для нее верно свойство симметричности относительно числа $n-1$:

$$v_{R(0)}(\mathrm{sum}) = v_{R(0)}(2(n-1)-\mathrm{sum}),\ \mathrm{sum} \in [1; 2n-3].$$

Действительно, числа sum и $2(n-1)-\mathrm{sum}$ расположены в матрице X симметрично относительно побочной диагонали, и их количества в матрице X равны.

Рассмотрим два случая.

А) Пусть sum – нечетное число. Тогда $\mathrm{sum} \ge 1$.

Распишем число sum в виде суммы: $\mathrm{sum} = \dfrac{\mathrm{sum}-1}{2} + \dfrac{\mathrm{sum}+1}{2}$. Обозначим $i = \dfrac{\mathrm{sum}-1}{2}$ и $j = \dfrac{\mathrm{sum}+1}{2}$. Видим, что $i \ge 0$, $j \ge 1$ и $i < j$. Так как $i+1 = \dfrac{\mathrm{sum}+1}{2}$, то $(i+1; j)$-элемент матрицы X находится на главной диагонали.

Все элементы в матрице X, идущие вверх параллельно побочной диагонали от $(i+1;j)$-элемента, равны числу sum. Количество таких элементов в матрице X равно $\min\{i+1;n-j\}$. Тогда

$$v_{R(0)}(\mathrm{sum})=\frac{(m-1)m}{2}\cdot\min\left\{\frac{\mathrm{sum}+1}{2};n-\frac{\mathrm{sum}+1}{2}\right\}.$$

Если $\mathrm{sum}\in[1;\ n-1]$, то $\frac{\mathrm{sum}+1}{2}\le n-\frac{\mathrm{sum}+1}{2}$ и тогда

$$v_{R(0)}(\mathrm{sum})=\frac{(m-1)m}{2}\cdot\frac{\mathrm{sum}+1}{2},$$

то есть при нечетном числе sum верно равенство

$$v_{R(0)}(\mathrm{sum})=\frac{(m-1)\cdot m\cdot(\mathrm{sum}+1)}{4},\ \mathrm{sum}\in[1;n-1].$$

Если sum – нечетное число из отрезка $[n-1;2n-3]$, то

$$v_{R(0)}(\mathrm{sum})=v_{R(0)}(2(n-1)-\mathrm{sum}).$$

Б) Пусть sum – четное число. Тогда $\mathrm{sum}\ge 2$.

Учитывая симметричность величины $v_{R(0)}$ относительно числа $n-1$, можем считать, что $\mathrm{sum}\in[1;n-1]$.

Обозначим $i=\frac{\mathrm{sum}-2}{2}$ и $j=\frac{\mathrm{sum}+2}{2}$. Видим, что $i\ge 0$, $j\ge 2$, $i<j$ и $\mathrm{sum}=i+j$. При этом $i+1=\frac{\mathrm{sum}}{2}$ и $j-1=\frac{\mathrm{sum}}{2}$. Тогда $(i+1;j-1)$-элемент в матрице X расположен на ее главной диагонали. Количество элементов, равных числу sum в матрице X, равно количеству элементов этой матрицы, равных числу $\mathrm{sum}-1$. Действительно, так как

$$\mathrm{sum}=i+j=(i-1)+(j+1)=(i-2)+(j+2)=\ldots=(i-i)+(j+i),$$

то в матрице X элементы $(i+1;j)$, $(i;j+1)$, $(i-1;j+2)$, …, $(1;j+i)$ равны числу sum, и их количество равно $i+1$. Заметим, что $i+j$ является номером матрицы X, так как $1\le i+j=\mathrm{sum}\le n-1$.

Далее, так как $i+j=\mathrm{sum}$, то $i+(j-1)=\mathrm{sum}-1$. По условию sum – четное число; в матрице X элементы главной диагонали – нечетные числа. Поэтому $j\ge 2$, значит, $j-1$ есть номер столбца матрицы X. Из равенств

$$\text{sum}-1 = i+(j-1) = (i-1)+j = (i-2)+(j+1) = \ldots = (i-i)+(j+(i-1)),$$

получаем, что элементы $(i+1; j-1)$, $(i; j)$, $(i-1; j+1)$, …, $(1; j+(i-1))$ равны числу $\text{sum}-1$, и их количество равно $i+1$. Заметим, что $j+(i-1)$ является номером столбца матрицы X, так как $j+(i-1) = \text{sum}-1 \le (n-1)-1 = n-2$.

Следовательно, количества элементов, равных sum и $\text{sum}-1$, совпадают и равны $i+1$.

Учитывая, что $\text{sum}-1$ – нечетное число, то справедливо:

$$v_{R(0)}(\text{sum}) = v_{R(0)}(\text{sum}-1) = \frac{(m-1)\cdot m\cdot((\text{sum}-1)+1)}{4} = \frac{(m-1)\cdot m\cdot \text{sum}}{4},$$

то есть при четном числе sum верно равенство

$$v_{R(0)}(\text{sum}) = \frac{(m-1)\cdot m\cdot \text{sum}}{4}, \quad \text{sum}\in[1; n-1].$$

Если sum – четное число из отрезка $[n-1; 2n-3]$, то

$$v_{R(0)}(\text{sum}) = v_{R(0)}(2(n-1)-\text{sum}).$$

Рассмотрим теперь общий случай относительно числа a.

Рассмотренную матрицу X обозначим $X(0)$. По числу a составим матрицу $X(a)$, получаемую из матрицы $X(0)$ путем прибавления ко всем ее элементам числа $2a$. Элементы в матрице $X(a)$ есть всевозможные суммы квадратов матрицы $R(a)$.

Очевидно, что количество элементов в матрице $X(a)$, равных sum, равно количеству элементов в матрице $X(0)$, равных $\text{sum}-2a$. Поэтому для матрицы $R(a)$ получаем:

$$v_{R(a)}(\text{sum}) = v_{R(0)}(\text{sum}-2a), \ \text{sum}\in[2a+1; 2a+2n-3].$$

Величина $v_{R(a)}$ симметрична относительно числа $2a+n-1$, поэтому

$$v_{R(a)}(\text{sum}) = v_{R(a)}(2(2a+n-1)-\text{sum}), \ \text{sum}\in[2a+1; 2a+2n-3].$$

Окончательно,

– если sum – четное число из отрезка $[2a+1; 2a+n-1]$, то

$$v_{R(a)}(\text{sum}) = \frac{(m-1)\cdot m\cdot(\text{sum}-2a)}{4};$$

– если sum – нечетное число из отрезка $[2a+1; 2a+n-1]$, то

$$v_{R(a)}(\text{sum}) = \frac{(m-1)\cdot m\cdot(\text{sum}-2a+1)}{4};$$

– если sum – число из отрезка $[2a+n-1;2a+2n-3]$, то

$$v_{R(a)}(\mathrm{sum}) = v_{R(a)}(2(2a+n-1)-\mathrm{sum}).$$

Величина $v_{R(a)}(\mathrm{sum})$ в обоих случаях есть линейная функция от sum. Тогда максимальное значение величины $v_{R(a)}(\mathrm{sum})$ равно $v_{R(a)}(2a+n-1)$:

– $v_{R(a)}(2a+n-1) = \dfrac{(m-1)\cdot m\cdot(n-1)}{4}$, если n – нечетное число;

– $v_{R(a)}(2a+n-1) = \dfrac{(m-1)\cdot m\cdot n}{4}$, если n – четное число.

Пример. Для матрицы $R(-3)$ размерности 3×7,

$$R(-3) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

определим числовые характеристики ее квадратов.

Возможными значениями сумм квадратов матрицы $R(-3)$ являются все числа из отрезка $[-5;5]$.

Определить значения величины v можно двумя способами: по матрице $X(-3)$ или по полученным выше формулам.

А. Определим значения величины v по матрице $X(-3)$.

В данном случае

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \times & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \times & \times & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \times & \times & \times & 7 & 8 & 9 \\ \times & \times & \times & \times & 9 & 10 \\ \times & \times & \times & \times & \times & 11 \end{pmatrix}, \qquad X(-3) = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ \times & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \times & \times & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \times & \times & \times & 1 & 2 & 3 \\ \times & \times & \times & \times & 3 & 4 \\ \times & \times & \times & \times & \times & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица $X(-3)$ получается из матрицы $X(0)$ путем прибавления ко всем ее элементам числа $2a=-6$.

В матрице $X(-3)$ число -5 встречается один раз. В матрице $R(-3)$ выбрать две строки из трех можно $\dfrac{(m-1)m}{2} = \dfrac{2\cdot 3}{2} = 3$ способами. Тогда число квадратов матрицы $R(-3)$, сумма каждого из которых равна -5, равно $1 \cdot 3 = 3$. Рассуждая аналогичным образом, по матрице $X(-3)$ получаем таблицу 1 значений сумм квадратов матрицы и количества квадратов с данной суммой.

Таблица 1. Суммы квадратов и количество квадратов матрицы $R_{3\times 7}(-3)$

sum	-5	-4	-3	-2	-1	0
v(sum)	3	3	6	6	9	9
sum	5	4	3	2	1	0
v(sum)	3	3	6	6	9	9

Б. Определим значения величины v аналитически.

В данном случае:

– $v_{R(-3)}(\text{sum}) = \dfrac{3 \cdot (\text{sum} + 6)}{2}$, если sum – четное число из отрезка $[-5;0]$, то есть $\text{sum} \in \{-4;-2;0\}$;

– $v_{R(-3)}(\text{sum}) = \dfrac{3 \cdot (\text{sum} + 7)}{2}$, если sum – нечетное число из отрезка $[-5;0]$, то есть $\text{sum} \in \{-5;-3;-1\}$.

Тогда

$$v_{R(-3)}(-4) = 3,\ v_{R(-3)}(-2) = 6,\ v_{R(-3)}(0) = 9,$$
$$v_{R(-3)}(-5) = 3,\ v_{R(-3)}(-3) = 6,\ v_{R(-3)}(-1) = 9.$$

Середина отрезка $[-5;5]$ – число 0. Тогда величина v симметрична относительно числа 0, поэтому справедливо равенство:

$v(\text{sum}) = v(-\text{sum}),\ \text{sum} \in [-5;5]$.

Используя вычисленные значения величины v на отрезке $[-5;0]$ и последнее равенство, получаем таблицу 1.

Наибольшее значение величины $v_{R(-3)}(\text{sum})$ равно $v_{R(-3)}(0) = 9$. ■

4. Обзор решенных задач о четырех ладьях

Рассмотрим задачи о четырех ладьях для шахматной доски размером $m \times n$, для которых уже известны числовые характеристики величины v. В задачах о четырех ладьях следует только указывать, какие и как расставлены числа в клетках шахматной доски.

1. Неотрицательные целые числа от 0 до $mn-1$ расставлены в клетках шахматной доски таким образом, что в первой строке расставлены числа от 0 до $n-1$, во второй – от n до $2n-1$ и так далее (Popov, 2018).

2. Неотрицательные целые числа от 0 до $mn-1$, где n – четное число, расставленыв клетках шахматной доски таким образом, что в первой строке расставлены числа от 0 до $n-1$, во второй – от n до $2n-1$ и так далее, при этом нечетные числа берутся со знаком минус (Popov, 2018).

3. Натуральные целые степени натурального числа a таким образом, что в первой строке расставлены числа $a, a^2, \ldots, a^n$, во второй – числа $a^{n+1}, a^{n+2}, \ldots, a^{2n}$ и так далее, или числа Фибоначчи f_1, f_2, f_3 и так далее, где $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \geq 3$ (Popov, 2018).

Обозначим матрицы, соответствующие шахматной доске с данными расставленными числами, $A(a)$ и F.Значимо то, что для каждого квадрата $A(a)(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$ и $F(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$ матриц $A(a)$ и F их сумма является уникальной, то есть

$$v(\mathrm{Sum}(A(a)(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))) = 1 \text{ и } v(\mathrm{Sum}(F(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))) = 1.$$

Поэтому количество элементов во множествах $V_{A(a)}$ и V_F равно количеству квадратов в этих матрицах, то есть равно числу $\dfrac{mn(m-1)(n-1)}{4}$.

5. Заключительные замечания

В статье рассмотрены задачи, в формулировках которых участвуют шахматная доска и ладья. Также предложена новая серия олимпиадных задач с шахматной тематикой.

Возможны вариации задачи о четырех ладьях. Во-первых, решение задачи меняется от способа нумерации клеток шахматной доски. Во-вторых, в качестве шахматной фигуры можно выбрать не ладью, а любую другу шахматную фигуру. В третьи, можно предложить другие способы движения шахматных фигур на шахматной доске. Все это может привести к формулировкам новых олимпиадных задач.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Копилка уроков. Официальный сайт. [kopilkaurokov.ru. Official website] (URL: https://kopilkaurokov.ru/vneurochka/meropriyatia/konspiekt-stsienariia-dlia-piervogho-ghoda-obuchieniia-shakhmatnyi-turnir)

ЛИТЕРАТУРА

Федоров, Р. М., Канель-Белов, А. Я., Ковальджи, А. К. & Ященко, И. В. (2006). *Московские математические олимпиады 1993 – 2005*. Москва: МЦНМО.

Гальперин, Г. А. & Толпыго, А. К. (1986). *Московские математические олимпиады.* Москва: Просвещение.

Гарднер, М. (1999). *Математические головоломки и развлечения.* Москва: Мир.

Гик, Е. Я. (1983). *Шахматы и математика.* Москва: Наука.

Горбачев, Н. В. (2004). *Сборник олимпиадных задач по математике.* Москва: МЦНМО.

Иванов, Б. Н. (2001). *Дискретная математика. Алгоритмы и программы.* Москва: Лаборатория Базовых знаний.

Канель-Белов, А. Я. & Ковальджи, А. К. (2008). *Как решают нестандартные задачи.* Москва: МЦНМО.

Попов, И. Н. (2014). *Группы RC и RCD: монография.* Архангельск: КИРА.

Попов, И. Н. (2014). Квадраты матриц. *Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции. Часть II.* Архангельск: САФУ, 119 – 127.

Попов, И. Н. (2018). Прикладной характер коэффициентов разложения функции. *Постулат, 8.*

Попов, И. Н. (2018). Квадраты матрицы определенной суммы. *Постулат, 5.*

Попов, И. Н. (2018). Квадраты матрицы со знакопеременными элементами. *Постулат, 6.*

Попов, И. Н. (2018). Суммы квадратов подматриц: множество невозможных сумм квадратов. *Постулат,10.*

Попов, И. Н. (2018). Суммы квадратов матрицы. *Постулат, 4*.

Попов, И. Н. (2018). Уникальные матрицы. *Постулат, 7.*

Прасолов, В. В. (1991). *Задачи по планиметрии. Ч. 2.* Москва: Наука.

Риордан, Дж. (1963). *Введение в комбинаторный анализ.* Москва: Изд-во Иностранной литературы.

Савельев, Л. Я. (1979). Лекции по комбинаторике. *Олимпиады. Алгебра. Комбинаторика.* Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 103 – 176.

Воробьев, Н. Н. (1978). *Числа Фибоначчи.* Москва: Наука.

Яковлев, Г. Н., Купцов, Л. П., Резниченко, С. В. & Гусятников, П. Б. (1992). *Всероссийские математические олимпиады школьников* Москва: Просвещение.

Заславский, А. А., Пермяков, Д. А., Скопенков, А. Б., Скопенков, М. Б. & Шаповалов, А. В. (2009). Математика в задачах. *Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду.* Москва: МЦНМО.

REFFERENCES

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics*: The Bulgaria Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

Fedorov, R. M., Losev, A. J., Kovaldji, A. K. & Yaschenko, I. V. (2006). *Moscow mathematical Olympiad 1993 – 2005.* Moscow: MCCME.

Galperin, G. K. & Tolpygo, A. K. (1986). *Moscow mathematical Olympiads.* Moscow: Education.

Gardner, M. (1999). *Mathematical puzzles and entertainment.* Moscow: Mir.

Gik, E.Ya. (1983). *Chess and mathematics.* Moscow: Science.

Gorbachev, N. V. (2004). *Collection of Olympiad problems in Mathematics.* Moscow: MCCME.

Ivanov, B. N. (2001). *Discrete mathematics. Algorithms and programs.* Moscow: Laboratory of Basic knowledge.

Kanel-Belov, A.I. & Kovalji, A. K. (2008). *How to solve non-standard problems.* Moscow: MCCME.

Popov, I. N. (2014). *RC and RCD groups: monograph.* Arkhangelsk: KIRA.

Popov, I. N. (2014). Squares of matrices. *Research activities of schoolchildren in the field of mathematics, applied mathematics and Informatics: materials of the Sixth regional scientific-practical conference. PartII.* Arkhangelsk: NArFU, 119 – 127.

Popov, I. N. (2018). The applied nature of the expansion coefficients of the functions. J. *Postulat, 8*.

Popov, I. N. (2018). The squares of the matrix of a certain sum. J. *Postulat, 5*.

Popov, I. N. (2018). The squares of the matrix with alternating elements. J. *Postulat, 6*.

Popov, I. N. (2018). The sum of the squares of submatrices: many impossible sum of squares. J. *Postulat, 10.*

Popov, I. N. (2018). The sum of the squares of the matrix. J. *Postulat, 4*.

Popov, I. N. (2018). Unique matrix. J. *Postulat, 7*.

Prasolov, V. V. (1991). *Problems of planimetry. Part 2.* Moscow: Science.

Riordan, J. (1963). *Introduction to combinatorial analysis.* Moscow: Publishing House of Foreign literature.

Savelev, L.Ya. (1979). Lectures on the combinatorics. *Olympics. Algebra. Combinatorics.* Novosibirsk: Science.Siberianbranch, 103 – 176.
Vorobev, N. N. (1978). *Fibonacci Numbers.* Moscow: Science.
Yakovlev, G. N., Kuptsov, L. P., Reznichenko, S. V. & Gusyatnikov, P. B. (1992). *All-Russian mathematical Olympiads.* Moscow: Education.
Zaslavsky, A. A., Permyakov, D. A., Skopenkov, A. B., Skopenkov, M. B. & Shapovalov, A. V. (2009). Mathematics in tasks. *Collection of materials visiting schools of the Moscow team at the All-Russian mathematical Olympiad.* Moscow: MCCME.

A NEW SERIES OF OLYMPIAD CHESS PROBLEMS: CHESS BOARD, ROOK AND NUMBERS

Abstract. The present article proposes a new series of Olympiad problems in Mathematics. It provides an overview of the Olympiad problems, the content of which aims at studying qualitative (possible, acceptable) or quantitative locations of a rook or rooks on a chessboard. The formulations of new tasks are related to the study of combinations of a chessboard with numbered cells and four rooks on it. The rooks are placed on the chessboard in such a way that each of them beats two of the remaining three. All cells of the chessboard are supplied with numbers. The sum of the numbers covered by the rooks is calculated and is called half-sum. It is necessary to determine the possible values of such half-sums. A matrix is juxteposed to a chessboard with numbered cells. The rectangles of the chessboard are associated with corresponding rectangles of the matrix, which are called its squares. The half-sum is called a sum of square matrices. Enter a number equal to the number of the square matrices. This number is studied for its possible values and its symmetry with respect to a certain number, if it is considered as a function of one variable. The properties of this number refer to the numerical characteristics of the square matrices. The four rooks problem turns out to be a problem of determining the numerical characteristics of the square matrices. The article deals with an example of solving the four rooks problem and provides an overview of such problems solved for certain cell numbers.

Keywords: olympiad math problem; chess; chess rook; square of the matrix, sum of the squares of a matrix

✉ **Dr. Ivan Popov, Assoc. Prof.**
Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov
17, Severnaya Dvina Emb.
163002 Arkhangelsk, Russia
E-mail: PopovIvanNik@yandex.ru