

НОВА ФОРМУЛА ЗА ЛИЦЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК (ЧЕТИВО ЗА VII КЛАС)

Проф. д.п.н. Йордан Табов¹⁾, гл. ас. д-р Асен Велчев²⁾,
гл. ас. д-р Станислав Стефанов²⁾, маг. мат. Хаим Хаимов⁴⁾

¹⁾Институт по математика и информатика на БАН – София

²⁾Технически университет – София

³⁾ Университет по архитектура, строителство и геодезия – София

⁴⁾Варна, ул. „Братя Шкорпил“ 16

Резюме. В статията се извежда формула за лице на четириъгълник с ъгъл между диагоналите 45° , която е частен случай на по-обща формула за лице на произволен четириъгълник (Наймов 2022). Попътно се извеждат формули и за лице на триъгълник с ъгъл 45° (или с ъгъл 135°). Привеждат се и формули за лицата на един вид петоъгълници и шестоъгълници под формата на задачи.

Ключови думи: формула за лице на четириъгълник; петоъгълник; шестоъгълник

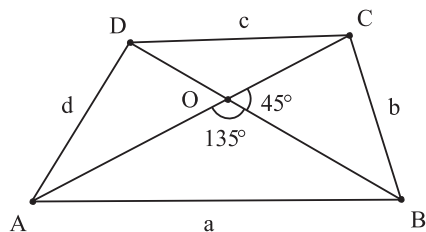
1. Въведение

Формулите за лице на триъгълник и специални видове четириъгълници – успоредник и трапец, са важен инструмент при изследването на различни въпроси от геометрията, в частност при решаването на задачи, в които участват лица на фигури. Към арсенала от тези инструменти отскоро се прибави нова формула за лице на произволен четириъгълник, останала незабелязана през дългите векове на развитие на математиката. Удобно е тя да се изучава в по-горните класове, но един неин частен случай е достъпен и за малки ученици. Тази статия е посветена на въпросната формула, разгледана в този частен случай, когато диагоналите на четириъгълника сключват ъгъл 45° . Ако a , b , c и d са дължините на последователните страни на четириъгълника, като b и d лежат срещу ъгъла от 45° , а S е лицето му (фиг. 1), тази формула е:

$$(1) \quad 4S = a^2 + c^2 - b^2 - d^2$$

2. Формула за лице на триъгълник с ъгъл 45° (с ъгъл 135°)

Преди да пристъпим към доказателството на формула (1), ще изведем специална формула за лице на триъгълник, един от ъглите на който е 45° , както и формула за лице на триъгълник с ъгъл 135° . Те ще ни послужат и в това доказателство.



Фигура 1

Теорема 1. Нека в $\triangle ABC$ дължините на страните BC , CA и AB са съответно a , b и c , а $\angle BAC = 45^\circ$. Тогава лицето S на триъгълника се определя по формулата:

$$(2) \quad 4S = b^2 + c^2 - a^2.$$

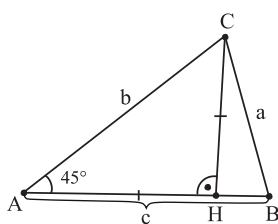
Доказателство. Означаваме с CH височината към страната AB на $\triangle ABC$, $H \in AB$ (виж фигури 2а, 2б и 2в. Възможни са три случая.

1) Нека ъгълът при върха B на триъгълника е остър, т.е. точката H лежи върху страната AB , $H \neq B$ (фиг. 2а).

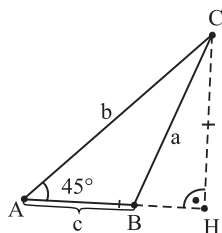
Триъгълниците ACH и BCH са правоъгълни и от Питагоровата теорема $b^2 = AH^2 + CH^2$ и $a^2 = BH^2 + CH^2$ следва:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= (AH^2 + CH^2) - (BH^2 + CH^2) = AH^2 - BH^2 = \\ &= (AH - BH) \cdot (AH + BH) = [AH - (c - AH)] \cdot c, \end{aligned}$$

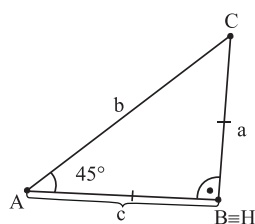
т.е. $b^2 - a^2 = 2 \cdot AH \cdot c - c^2$.



Фигура 2а



Фигура 2б



Фигура 2в

2) Нека сега ъгълът при върха B в $\triangle ABC$ е туп, т.е. точката H лежи на продължението на страната AB (фиг. 2б). В този случай с помощта на Питагоровата теорема получаваме:

$$b^2 - a^2 = (AH^2 + CH^2) - (BH^2 + CH^2) = AH^2 - BH^2 =$$

$$= (AH - BH) \cdot (AH + BH) = c \cdot [AH + (AH - c)],$$

т.е. $b^2 - a^2 = 2 \cdot AH \cdot c - c^2$.

3) Ако ъгълът при върха B в $\triangle ABC$ е прав, т.е. точка H съвпада с точка B (фиг. 2в) и $c = ac = a$, тогава от Питагоровата теорема получаваме:

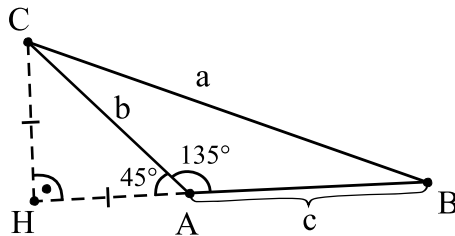
$b^2 - a^2 = c^2 = 2 \cdot c \cdot c - c^2 = 2 \cdot AH \cdot c - c^2$, т.е. едно и също в трите случая.

От друга страна, от равнобедрения правоъгълен $\triangle ACH$ имаме $AH = CH$ (фиг. 2а, 2б и 2в). Тогава $b^2 - a^2 = 2 \cdot AH \cdot c - c^2 = 2 \cdot CH \cdot c - c^2 = 4S - c^2$. Оттук и получаваме непосредствено формулата (2) за лицето S .

Ще докажем и използваме и една формула за лице на триъгълник с ъгъл 135° .

Теорема 2. Нека в $\triangle ABC$ дължините на страните са $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и $\angle BAC = 135^\circ$ (фиг. 3). Тогава лицето S на триъгълника се определя по формулата:

$$(3) \quad 4S = a^2 - b^2 - c^2.$$



Фигура 3

Доказателство. Построяваме височината CH към страната AB на $\triangle ABC$ ($H \in AB$) (Фиг. 3). Понеже $\angle BAC$ е тъп, точката H лежи на продължението на отсечката BA . От правоъгълния $\triangle ACH$, в който $\angle CAH = 45^\circ$, имаме: $AH = CH$. С помощта на Питагоровата теорема получаваме последователно:

$$a^2 - b^2 = (BH^2 + CH^2) - (AH^2 + CH^2) = BH^2 - AH^2 = (BH - AH) \cdot (BH + AH)$$

$$= c \cdot [(c + AH) + AH] = c^2 + 2 \cdot AH \cdot c = c^2 + 2 \cdot CH \cdot c = c^2 + 4S,$$

откъдето непосредствено следва доказваната формула (3).

3. Доказателство на формулата за лице на четириъгълник с ъгъл между диагоналите 45°

Вече можем да докажем дадената в началото формула за лице на четириъгълник с ъгъл между диагоналите 45° .

Теорема 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и O е пресечната точка на диагоналите му (фиг. 1). Ако $\angle BOC = 45^\circ$ и дължините на страните AB, BC, CD и DA са съответно a, b, c и d , то лицето на четириъгълника се определя по формулата:

$$(4) \quad 4S = a^2 + c^2 - b^2 - d^2.$$

Доказателство. Триъгълниците BOC и AOD имат ъгъл 45° , а триъгълниците AOB и COD – ъгъл 135° . Тогава от теореми 1 и 2 за техните лица следва съответно:

$$4S_{ABO} = a^2 - AO^2 - BO^2, 4S_{BCO} = BO^2 + CO^2 - b^2,$$

$$4S_{CDO} = c^2 - CO^2 - DO^2, 4S_{ADO} = DO^2 + AO^2 - d^2.$$

Оттук за лицето S на четириъгълника $ABCD$ получаваме последователно:

$$\begin{aligned} 4S &= 4S_{ABO} + 4S_{BCO} + 4S_{CDO} + 4S_{ADO} = \\ &= (a^2 - AO^2 - BO^2) + (BO^2 + CO^2 - b^2) + (c^2 - CO^2 - DO^2) + (DO^2 + AO^2 - d^2) = \\ &= a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - AO^2 - BO^2 + BO^2 + CO^2 - CO^2 - DO^2 + DO^2 + AO^2 = \\ &= a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = a^2 + c^2 - b^2 - d^2. \end{aligned}$$

С това формула (1) за лицето на разглеждания четириъгълник е доказана.

4. Задачи

Доказаната в предния раздел формула е с широко приложение. С нейна помощ (в общия случай, когато ъгълът α между диагоналите на четириъгълника е произволен) се обобщава класическо твърдение от геометрията, известно като Теорема на Карно за триъгълника (Наймов 2021). Тя се използва и за извеждането на формули за лицата на един вид многоъгълници, както и за намирането на интересни зависимости между техни елементи (Наймов 2022). Предлагаме на читателите сами да приложат тази формула, както и формулата за лице на триъгълник с ъгъл 45° за решаване на следващите три задачи, две от които са снабдени с чертеж.

Задача 1. Нека $ABCDE$ е петоъгълник с пресечна точка O на диагоналите BD и CE , като $\angle BOC = 45^\circ$. Нека и $\angle BAE = 45^\circ$ (фиг. 4). Да се докаже, че ако дължините на страните му са $AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, EA = e$ съответно, то лицето S на петоъгълника се определя по формулата:

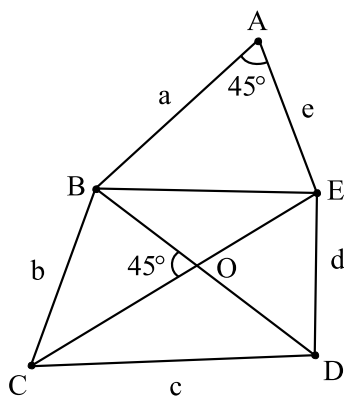
$$4S = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2.$$

Задача 2. Нека $ABCDEF$ е шестоъгълник с пресечна точка O_1 на диагоналите AE и DF и O_2 на диагоналите AC и BD , като $\angle EO_1D = 45^\circ$ и $\angle AO_2D = 45^\circ$ (фиг. 5). Ако дължините на страните му са $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EF = e$ и $FA = f$ съответно, да се докаже, че лицето S на шестоъгълника се определя по формулата:

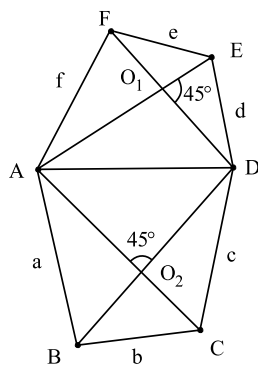
$$4S = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 - f^2.$$

Задача 3. Нека $ABCD$ е четириъгълник с дължина на страната $CD = c$, пресечна точка T на диагоналите, $\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$ и $\angle BTC = 45^\circ$. Докажете, че лицето му е $S = \frac{1}{2}c^2$.

Упътване. Заедно с формула (1) за лице на четириъгълник ползвайте двукратно Питагоровата теорема.



Фигура 4



Фигура 5

5. Заключение

Нека отбележим, че от формула (1) за лице на четириъгълник следва и друга формула за лицето му (Наймов 2021; Наймов 2022), но доказателството ѝ надхвърля рамките на учебния материал за VII клас.

ЛИТЕРАТУРА

ХАИМОВ Х., 2021. Една кратка формула за лице на четириъгълник и нейното приложение, *Математика плюс*, **4**, 68 – 77. ISSN 0861-8321.

ХАИМОВ, Х., 2022. Косинусова и котангенсова теорема за четириъгълник и многоъгълник. Обобщение на една теорема на Карно. *Математика плюс*, **1**, 52 – 64. ISSN 0861-8321.

REFERENCES

- HAIMOV, H., 2021. A short formula for the area of a quadrilateral and its application, *Mathematics plus*, **4**, 68 – 77. [in Bulgarian] ISSN 0861-8321.
- HAIMOV, H., 2022. Cosine and cotangent theorems for quadrilateral and polygon. Generalization of a Carnot theorem. *Mathematics plus*, **1**, 52 – 64. [in Bulgarian] ISSN 0861-8321.

A NEW FORMULA FOR THE AREA OF THE QUADRILATERAL (READING FOR GRADE 7)

Abstract. Here we derive formula for the area of a quadrilateral with angle 45° between the diagonals, which is a special case of a more general formula for the area of a quadrilateral (Haimov 2022). Along the way we obtain formulas for the area of triangles with angle of $45^\circ/135^\circ$. We also give formulas for the area of specific kinds of pentagons and hexagons, in the form of problems.

Keywords: formula for the area of a quadrilateral; pentagon; hexagon

✉ **Prof. DSc. Jordan Tabov**

ORCID iD: 0000-0001-5436-5134

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: tabov@math.bas.bg

✉ **Dr. Asen Velchev, Assist. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-6653-465X

Technical University of Sofia

Sofia, Bulgaria

E-mail: asen_v@abv.bg

✉ **Dr. Stanislav Stefanov, Assist. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-8254-1075

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy

Sofia, Bulgaria

E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Haim Haimov, MSc math.**

ORCID iD: 0000-0002-0914-1059

16, Bratya Shkorpil Str.

Varna, Bulgaria