НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАД. Л. ЧАКАЛОВ"

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА ВЪТРЕШЕН ПРОФИЛИРАЩ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

Задача 1. Да се пресметне числената стойност на израза

$A=(2x-1)^2-(1-x)^2(x+1)^2+(x^2-1)^2-4(-x+2)^2$ при $x=\dfrac{10^6.2^7-25^3.8^4}{5^6.2^{11}}$.

Задача 2. Да се реши уравнението $\left|4x^2+2-(2x+1)^2\right|-3|1-4x|=-6$.

Задача 3. Да се реши уравнението $x^3-x^2-4x+4=0$.

Задача 4. При кои стойности на параметъра a неравенствата

$(3x-1)^2+3(x+2)<3x(2x-1)$ и $\dfrac{2a-1}{3}.x<-3$ са еквивалентни?

Задача 5. В ΔABC е построена ъглополовящата AL ($L \in BC$). Правата през L, която е успоредна на AC, пресича страната AB в точка P. Да се намери $\sphericalangle ALC$, ако $\sphericalangle APL = 130^0$ и $\sphericalangle APL:\sphericalangle ABC = 3:2$.

Задача 6. От две гари едновременно тръгнали един срещу друг два влака. Да се намери след колко часа те ще се срещнат, ако е известно, че единият влак може да измине разстоянието между двете гари за 2 *h* 20 *min*, а другият – за 3 *h* 30 *min*.

Задача 7. За да изработи една поръчка машинни детайли в определен срок, бригада трябва да изработва по 25 детайла дневно. След три дни работа бригадата увеличила дневната си производителност с 5 детайла, поради което изработила 100 детайла над плана за определения срок. Да се намери колко детайла е изработила бригадата и за колко дни.

Задача 8. Точките P и Q са съответно средите на бедрата AC и BC на равнобедрения ΔABC, а CM е височина в същия триъгълник. Нека $\sphericalangle BAC : \sphericalangle PMQ = 5:2$. Да се намери разстоянието от точката Q до правата MP, ако $AC = 8$ см.

Задача 9. Даден е триъгълникът ABC, в който $\sphericalangle ACB = 60^0$. Ъглополовящите AD ($D \in BC$) и BE ($E \in AC$) се пресичат в точката I. Да се докаже, че AE + BD = AB.

Задача 10. Да се реши в цели числа уравнението $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. След еквивалентни преобразувания получаваме

$$A = 4x^2 - 4x + 1 - \left(x^2 - 1\right)^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 - 4\left(4 - 4x + x^2\right) = 12x - 15 \quad \textbf{(2 т.)}$$

Пресмятаме стойността на $x = \dfrac{(2.5)^6.2^7 - 5^6.2^{12}}{5^6.2^{11}} = \dfrac{5^6.2^{12}(2-1)}{5^6.2^{11}} = 2$ **(1,5 т.)**, откъдето $A = 24 - 15 = 9$. **(0,5 т.)**

Задача 2. $\left|4x^2 + 2 - 4x^2 - 4x - 1\right| - 3\left|1 - 4x\right| = -6$ **(1 т.)**, което е еквивалентно с $\left|1 - 4x\right| = 3$ **(1 т.)**.

I сл.) $1 - 4x = 3$, т.е. $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ **(1 т.)**; **II сл.)** $1 - 4x = -3$, т.е. $x_2 = 1$ **(1 т.)**.

Задача 3. След подходящо разлагане на множители даденото уравнението става $(x-1)(x-2)(x+2) = 0$ **(2,5 т.)**. Оттук $x_1 = 1$ **(0,5 т.)**, $x_2 = 2$ **(0,5 т.)** и $x_3 = -2$ **(0,5 т.)**.

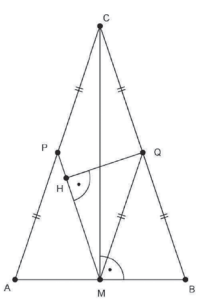
Задача 4. След еквивалентни преобразувания неравенството $(3x-1)^2 + 3(x+2) < 3x(2x-1)$ добива вида $0x < -7$, което няма решение. **(2 т.)**. За

да бъдат еквивалентни двете неравенства, трябва и второто неравенство да няма решение, т.е. $\frac{2a-1}{3}=0$ **(1 т.)**. Следователно неравенствата са еквивалентни при $a=\frac{1}{2}$ **(1 т.)**.

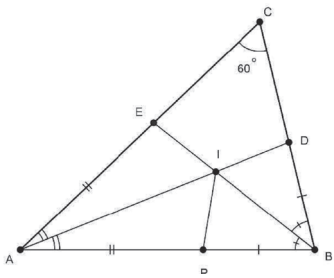
Задача 5. Нека $\sphericalangle ACB = 3x$, а $\sphericalangle ABC = 2x$. Тогава от $(AC \parallel PL) \times AB$ следва, че $\sphericalangle CAB + 130^\circ = 180^\circ$, т.е. $\sphericalangle CAB = 50^\circ$ **(2 т.)**. От теоремата за сбор на ъглите в ΔABC имаме, че $5x + 50^\circ = 180^\circ$, откъдето $x = 26^\circ$ **(1 т.)**. Следователно $\sphericalangle ACB = 78^\circ$ **(0,5 т.)** и $\sphericalangle ALC = 77^\circ$ **(0,5 т.)**.

Задача 6. Нека $S\,(S > 0)$ е разстоянието между двете гари. Тъй като единият влак изминава разстоянието между двете гари за 2 ч. 20 мин. = $\frac{7}{3}$ часа **(0,5 т.)**, то скоростта на този влак е $v = 3S/7\ km/h$ **(0,5 т.)**. Другият влак изминава разстоянието между двете гари за $\frac{7}{2}$ часа **(0,5 т.)** със скорост $v_{II} = \frac{2S}{7} km/h$ **(0,5 т.)**. Нека $t\,(t > 0)$ е времето до срещата. Тогава съставяме уравнението $\frac{3S}{7}.t + \frac{2S}{7}.t = S$ **(1 т.)**, откъдето получаваме че двата влака ще се срещнат след 1 ч. 24 мин. **(1 т.)**.

Задача 7. Нека срокът за изпълнение на поръчката е $x\,(x > 0)$ дни. **(0,5 т.)** Тогава поръчката е за $25x$ детайла **(0,5 т.)**. През първите 3 дни бригадата е изработила 75 детайла **(0,5 т.)**, а през останалите $(x - 3)$ дни – съответно $30\,(x - 3)$ детайла **(0,5 т.)**. Като използваме условието, получаваме уравнението $75 + 30\,(x - 3) = 25x + 100$ **(1 т.)**. Оттук $x = 23$ **(0,5 т.)**. Така намираме, че бригадата е изработила $25.23 + 100 = 675$ детайла за 23 дни **(0,5 т.)**.



Задача 8. От това, че ΔABC е равнобедрен, следва, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 5x$. Тогава $\sphericalangle PMQ = 2x$. **(0,5 т.)** От това, че MQ е медиана в правоъгълния ΔBMC, следва, че $MQ = BQ = CQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC = 4cm$. **(1 т.)** Тогава ΔBMQ е равнобедрен и $\sphericalangle QMB = 5x$. Аналогично $\sphericalangle AMP = 5x$. **(0,5 т.)** Така имаме, че $12x = 180^\circ$, т.е. $x = 15^\circ$ и $\sphericalangle PMQ = 30^\circ$.**(1 т.)** Нека $QH \perp PM$ е търсеното разстояние. Тогава от правоъгълния ΔHMQ с $\sphericalangle HMQ = 30^\circ$ имаме, че $HQ = \frac{1}{2}MQ = 2$. **(1 т.)**



Задача 9. Нека $AP = AE\left(P \in AB\right)$. **(1 т.)** Разглеждаме ΔAEI и ΔAIP:

1) $AE = AP$ (по построение);

2) AI – обща страна;

3) $\sphericalangle EAI = \sphericalangle IAP$. От първи признак за еднаквост на триъгълници, следва че $\Delta AEI \cong \Delta AIP$. **(0,5 т.)** Следователно $\sphericalangle EIA = \sphericalangle AIP$, като съответни ъгли в еднакви триъгълници. **(0,5 т.)** Тъй като $\sphericalangle AIB = 90^\circ + \frac{\sphericalangle ACB}{2} = 120^\circ$, то $\sphericalangle EIA = \sphericalangle AIP = 60^\circ$. **(0,5 т.)** Тогава $\sphericalangle BID = \sphericalangle EIA = 60^\circ$ като върхни ъгли. Оттук $\sphericalangle PIB = 180^\circ - 2.60^\circ = 60^\circ$. Разглеждаме ΔBIP и ΔBID:

1) $\sphericalangle BIP = \sphericalangle BID = 60^\circ$; 2) BI – обща страна; 3) $\sphericalangle PBI = \sphericalangle DBI$. По втори признак за еднаквост на триъгълници следва, че $\Delta BIP \cong \Delta BID$. **(0,5 т.)** Тогава $BD = BP$, като съответни страни в еднакви триъгълници. **(0,5 т.)** Следователно $AB = AB + PB = AE + BD$. **(0,5 т.)**

Задача 10. Записваме даденото уравнение във вида $\left(x^3+1\right)\left(x^2+x+1\right) = y^2$ **(0,5 т.)**.

Тъй като $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, то уравнението няма решение при $x \le -2$.

Очевидно двойките $(-1;0)$, $(0;-1)$ и $(0;1)$ са решения на уравнението. **(1 т.)** Нека $x > 0$. Понеже $x^3 + 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2$, то най-големият общ делител на $x^3 + 1$ и $x^2 + x + 1$ дели 2, т.е. е 1 или 2. **(0,5 т.)** Но $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$ е нечетно число, следователно числата $x^3 + 1$ и $x^2 + x + 1$ са взаимно прости и за да бъде произведението им точен квадрат, е необходимо всяко от тях да е точен квадрат. **(1 т.)** Но при $x > 0$ са изпълнени неравенствата $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$. Следователно $x^2 + x + 1$ не може да бъде точен квадрат. Ето защо даденото уравнение няма други решения освен посочените по-горе. **(1 т.)**

Темата е предложена от Илия Костов,
преподавател по математика и информатика в НПМГ "Акад. Л. Чакалов"