Educational Research
Научно–методически статии

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПРОЕКЦИЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Владимир Жук
Республиканская специализированная физико-математическая средняя школа-интернат имени О. Жаутыкова

Аннотация. В данной статье рассмотрены методические подходы к задаче нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.
Keywords: skew lines, distance, projection, angle, solid geometry, methodology

Задача нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми является одной из самых сложных, изучаемых в школьном курсе стереометрии. На фоне снижающегося интереса к изучению геометрии и неразвитого пространственного воображения у учащихся 10 классов эта задача вызывает трудности у большинства из них, что для учителя, преподающего математику в старших классах, является методической проблемой.

Сложности при нахождении расстояний между скрещивающимися прямыми, скорее всего, обусловлены тем, что такие прямые не имеют общих точек и не лежат в одной плоскости. Поэтому, сталкиваясь с подобного сорта задачами, порой, не за что «зацепиться». В подавляющем большинстве случаев искать расстояние между скрещивающимися прямыми по определению, то есть, вычисляя длину их общего перпендикуляра, является не самой блестящей идеей.

Таким образом, если общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых явно не прослеживается, то расстояние между ними следует искать опосредованно. Разработано несколько методов, позволяющих сделать это. В частности, расстояние между скрещивающимися прямыми можно искать как расстояние от какой-либо удобной точки одной прямой до параллельной ей плоскости, содержащей вторую прямую, или как расстояние между двумя параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Для решения этой задачи можно привлечь векторы и координаты в пространстве. Существует также формула, выражающая расстояние между скрещивающимися рёбрами тетраэдра через объём данного тетраэдра, длины этих ребер и угол между ними (Grozdev, 2007). Однако, тема «Расстояние между скрещивающимися прямыми» изучается гораздо раньше, чем учащиеся могут использовать векторно-координатный метод в пространстве и метод объёмов, поскольку соответствующие темы ещё не изучены.

К тому же, несмотря на свою действенность, применение координатно-векторного метода может привести к громоздким вычислениям, порой, даже в тех случаях, когда чисто геометрически задача решается несложно. По моему глубокому убеждению, несмотря на то, что при решении некоторых геометрических задач без векторов и координат не обойтись, всё же без лишней надобности не стоит ими увлекаться, поскольку это не способствует развитию у учащихся геометрических представлений, иными словами, «убивает» в них геометрию.

Одним из самых эффективных чисто геометрических методов нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми является метод проекций, который опирается на следующую лемму.

Лемма (см., например, (Шарыгин, И. Ф., 1999, с. 96). *Расстояние между скрещивающимися прямыми расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту плоскость.*

Алгоритм вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми заключается в следующем.

1. Строим плоскость, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых.
2. Находим проекции этих прямых на данную плоскость.
3. Проекция одной из этих прямых на эту плоскость является точкой. Вычисляем расстояние от этой точки до проекции другой прямой на эту плоскость. Это расстояние и будет искомым.

Иногда искомая плоскость, перпендикулярная, одной из скрещивающихся прямых, проглядывается очевидным образом. В некоторых случаях приходится производить дополнительные манипуляции, чтобы построить эту плоскость.

Нами разработаны два новых метода вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми, которые позволяют избежать необходимости построения дополнительных плоскостей. Всё, что требуется, это умение находить расстояние от точки до прямой и расстояние от точки до плоскости.

Вычисление расстояния от точки до прямой может быть сведено к стандартной планиметрической задаче нахождения высоты треугольника. Для большинства многогранников, изучаемых в школьном курсе геометрии, задача вычисления расстояния от точки до плоскости не является сверхсложной, если в качестве этой плоскости выступает плоскость основания или боковой грани многогранника.

Разработанные нами методы опираются на доказанные нами теоремы 1 и 2, которые, в свою очередь, вытекают из приведённой выше леммы. Отметим, что аналогов полученных нами формул нам найти не удалось. Автор будет очень признателен тому, кто укажет источник, где имеются подобные результаты.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в тетраэдре DABC ребро DA перпендикулярно плоскости ABC основания, тогда расстояние d между скрещивающимися прямыми AC и BD может быть вычислено по формуле*

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \tag{1}$$

где a = DA, b = BK – высота треугольника ABC, опущенная из вершины B.

Доказательство. Пусть рёбра AB и AC не перпендикулярны. Достроим треугольник AKB до параллелограмма $AKBB$’ (Рис. 1).

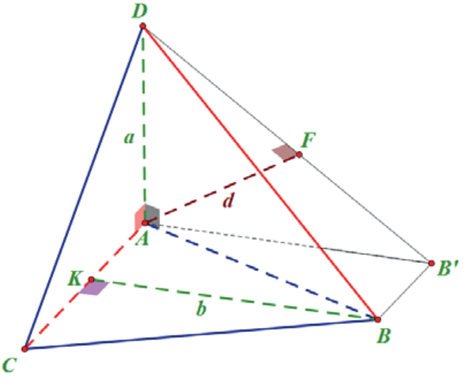


Рис. 1

Так как $BK \perp AC$, то $AKBB'$ – прямоугольник. $AC \perp AD$, $AC \perp AB'$, следовательно, $AC \perp (DAB')$ (выполняется признак перпендикулярности прямой и плоскости). Так как BB' параллельна прямой AC, то ортогональной проекцией BD на плоскость DAB является прямая $B'D$.

Согласно лемме

$d = \rho(A, (B'D)) = AF$,

где AF – высота треугольника DAB.

Треугольник DAB прямоугольный. Значит,

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{B'A^2}.$$

Учитывая, что $B'A = BK$, получаем требуемое равенство (1). Случай $AB \perp AC$ очевиден.

Таким образом, чтобы вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми можно применить следующий алгоритм.

1. Пусть прямая l лежит в плоскости α, а скрещивающаяся с ней прямая m пересекает плоскость α в точке M.

2. Из точки M опустим перпендикуляр MM_0 на прямую l.

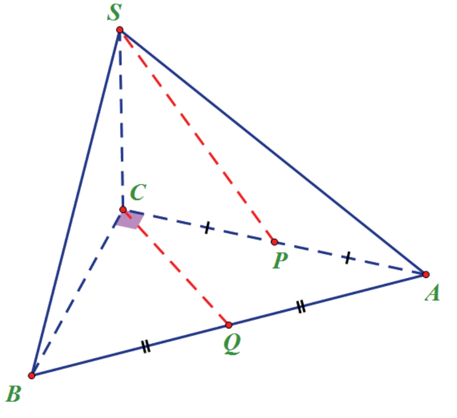
3. На прямой m выберем такую точку N, что её проекция на плоскость α, точка N_0, лежит на прямой l.

4. По формуле (1) расстояние d между прямыми l и m находится из равенства $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{NN_0^2}+\frac{1}{MM_0^2}$.

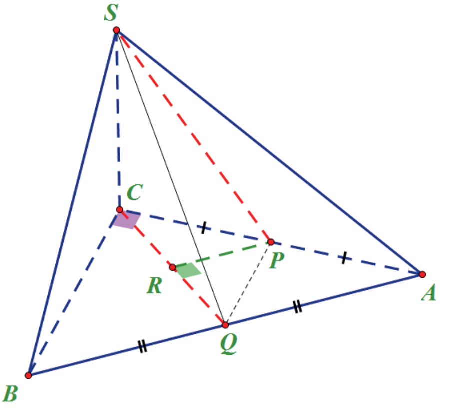
Замечание. Во многих задачах точки N и N_0 можно без труда определить. Если же эти точки явно не проглядываются, то точку N_0 определяем как точку пересечения прямой l и прямой m', являющейся проекцией прямой m на плоскость α. Точка N является точкой пересечения прямой m с перпендикуляром, восстановленным к плоскости α в точке N_0. В случае, когда прямые l и m' параллельны, будем считать, что $NN_0=\infty$, то есть $\frac{1}{NN_0^2}=0$.

Продемонстрируем применение теоремы 1 и указанного метода на следующих задачах.

Задача 1 (Егерев, В. К., В. В. Зайцев & Б. А. Кордемский, 2013, Группа B, № 11.231). *Основанием пирамиды SABC является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы которого* $AB=4\sqrt{2}$. *Боковое ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а его длина равна 2. Найти расстояние между прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая – через точку C и середину ребра AB.*



а)



б)

Рис. 2

Решение. Пусть P – середина ребра AC, а Q – середина ребра AB (Рис. 2а). По условию задачи требуется найти расстояние d между прямыми SP и CQ. Так как

$SC \perp (ABC)$, то согласно теореме 1

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{PR^2},$$

где PR – высота треугольника CPQ . По условию $SC = 2$. Нетрудно заметить, что PR – средняя линия треугольника CAQ (Рис. 2б), следовательно,

$$PR = \frac{1}{2} AQ = \sqrt{2}.$$

Итак,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

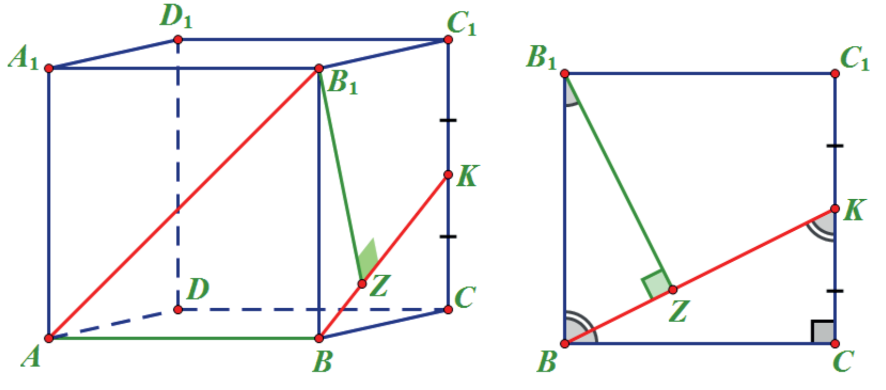
Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2. (Гроздев и др., 2008) *Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BK, где K – середина ребра CC_1.*

Решение. Из точки B_1 опустим перпендикуляр BZ на прямую BK (Рис. 3а). Заметим, также, что $AB \perp (BKB_1)$. Поэтому по теореме 1

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BZ^2},$$

где $d = \rho(AB_{1\ BK})$ – расстояние между прямыми AB_1 и BK.



а) б)

Рис. 3

$AB = 2$, найдём BZ. Для этого рассмотрим квадрат BCC_1B_1 (Рис. 3б). По теореме

Пифагора находим $BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Прямоугольные треугольники BZB_1 и KCB подобны ($\angle BB_1Z = \angle KBZ$). Следовательно,

$$\frac{BZ}{BB_1} = \frac{BC}{BK}.$$

Отсюда

$$BZ = \frac{BC \cdot BB_1}{BK} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом,

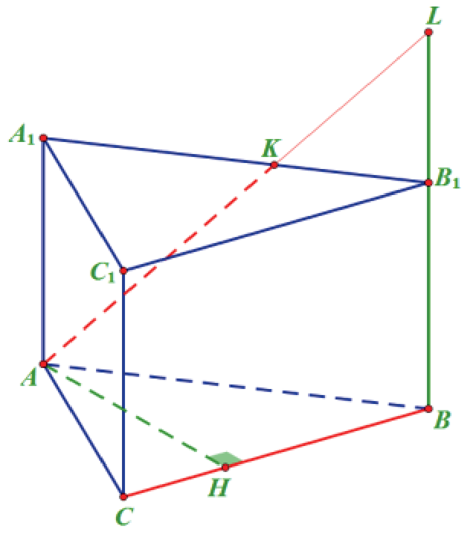
$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{9}{16},$$

значит,

$$d = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задача 3. *В основании прямой треугольной призмы* $ABCA_{\square}1$ $1C$ *лежит треугольник со сторонами* $AB = 5$*,* $BC = 6$*,* $AC = \sqrt{13}$*, боковое ребро равно 6. На ребре* A_1B_1 *выбрана точка* K *так, что* $A_1K{:}KB_1 = 3{:}2$*. Найти расстояние между прямыми* AK *и* BC*.*



Решение. Продлим AK до пересечения с прямой BB_1 в точке L и опустим перпендикуляр AH на прямую BC (Рис. 4). Учитывая, что призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, по формуле (1) получаем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BL^2} + \frac{1}{AH^2},$$

где d – расстояние между прямыми AK и BC.

По теореме косинусов из треугольника ABC находим

$$cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4}{5}.$$

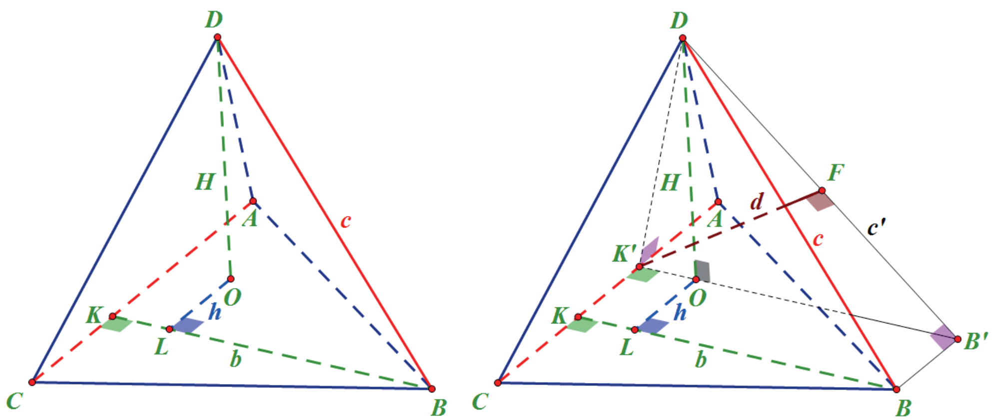
Из прямоугольного треугольника AHB ($\angle AHB = 90^o$) вычислим

$$AH = AB \cdot sin\angle ABC = AB \cdot \sqrt{1 - cos^2\angle ABC} = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3.$$

Треугольники KLB_1 и ALB подобны, поэтому
$$\frac{B_1L}{BL}=\frac{KB_1}{AB}\Leftrightarrow\frac{BL-6}{BL}=\frac{2}{5}.$$
Отсюда получаем $BL = 10$. Итак,
$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{100}+\frac{1}{9}=\frac{109}{900},$$
то есть
$$d=\frac{30}{\sqrt{109}}=\frac{30\sqrt{109}}{109}.$$

Ответ: $\frac{30\sqrt{109}}{109}$.

Теорема 2. *Пусть $H = DO$ – высота тетраэдра $DABC$, а $b = BK$ – высота треугольника ABC, лежащего в основании этого тетраэдра. Тогда расстояние d между скрещивающимися прямыми AC и BD вычисляется по формуле*
$$d=\frac{bH}{\sqrt{c^2-h^2}},\tag{2}$$
где $c = DB$, h – расстояние от точки O, основания высоты тетраэдра, до прямой BK.



а) б)
Рис. 5

Доказательство. Пусть для начала $O\notin(BK)$. Из точки O опустим перпендикуляр OL на прямую BK (Рис. 5а), тогда $h = \rho(O, (BK)) = OL > 0$.

Пусть K' – ортогональная проекция точки O на прямую AC. Достроим треугольник BKK' до параллелограмма $BKK'B'$ (Рис. 5б). Так как $BK \perp AC$, то $BKK'B'$ – прямоугольник, при этом $O \in (B'K')$, $BK = B'K' = b$, $KK' = BB' = h$.

$AC \perp B'K'$ и $AC \perp DO$, значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC \perp (DK'B')$ причём ортогональной проекцией прямой AC на плоскость $DK'B$ является точка K'. Заметим далее, что ортогональной проекцией BD на плоскость $DK'B$ является прямая $B'D$.

Следовательно, по лемме

$$d = \rho(K', (B'D)) = K'F,$$

где $K'F$ – высота треугольника $DK'B'$.

Высота DO тетраэдра $DABC$ является также высотой треугольника $DK'B'$ поэтому

$$\frac{K'F}{DO} = \frac{B'K'}{B'D}.$$

Итак,

$$K'F = \frac{B'K' \cdot DO}{B'D} = \frac{bH}{B'D}.$$

Далее воспользуемся тем фактом, что $BB' \| AC$ и $BB' \perp (DK'B')$. Отсюда, $DB' \perp BB'$. Наконец, применяя теорему Пифагора к треугольнику $DB'B$, получаем $B'D = \sqrt{BD^2 - (BB')^2} = \sqrt{c^2 - h^2}$.

Таким образом,

$$d = K'F = \frac{bH}{\sqrt{c^2 - h^2}}.$$

В случае, когда $O \in (BK)$, то есть $h = 0$, вместо треугольника $DK'B'$ следует рассмотреть треугольник DKB. Дальнейшие рассуждения аналогичны. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 позволяет вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми по следующему алгоритму.

1. Пусть прямая l лежит в плоскости α, а скрещивающаяся с ней прямая m пересекает плоскость α в точке M.

2. Из точки M опустим перпендикуляр MM_0 на прямую l.

3. На прямой m выберем произвольную точку N ($N \neq M$, и опустим из неё перпендикуляр NN_0 на плоскость α.

4. Из точки N_0 опустим перпендикуляр N_0H на прямую MM_0

5. Расстояние d между прямыми l и m находим по формуле (2), то есть

$$d = \frac{MM_0 \cdot NN_0}{\sqrt{MN^2 - N_0H^2}}.$$

В второй алгоритм позволяет обойти достаточно жёсткое требование первого алгоритма, чтобы проекция точки N на плоскость α лежала на прямой l.

Альтернативное решение задачи №3. Из точки K опустим перпендикуляр KP на плоскость ABC (Рис. 6). Так как призма прямая, то точка P, будет лежать на ребре AB. В треугольнике ABC проведём высоту AH, и из точки P опустим перпендикуляр PQ на прямую AH. Применив формулу (2) для нахождения расстояния d между скрещивающимися прямыми AK и BC, получим

$$d = \frac{AH \cdot KP}{\sqrt{AK^2 - PQ^2}}.$$

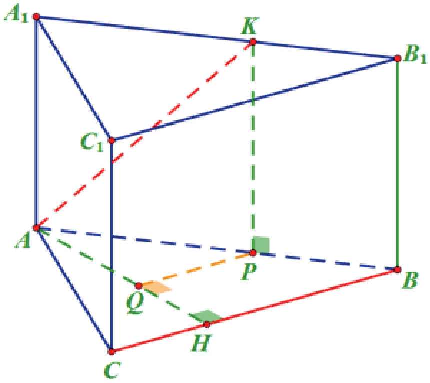


Рис. 6

В предыдущем решении этой задачи было установлено, что $AH = 3$. Также имеем $BH=AB$. $\cos\angle ABC = 4$.

Заметим, что $KP=BB_1=6$, $BP=B_1K=2$, $AP=A_1K=3$. Из прямоугольного треугольника AA_{1K} $\angle AA_{1K} = 90°$) по теореме Пифагора найдём $AK = \sqrt{AA_1^2 + AK^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Из подобия прямоугольных треугольников AQP и AHB следует, что

$$\frac{PQ}{BH} = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}.$$

Отсюда

$$PQ = \frac{3}{5} BH = \frac{12}{5}.$$

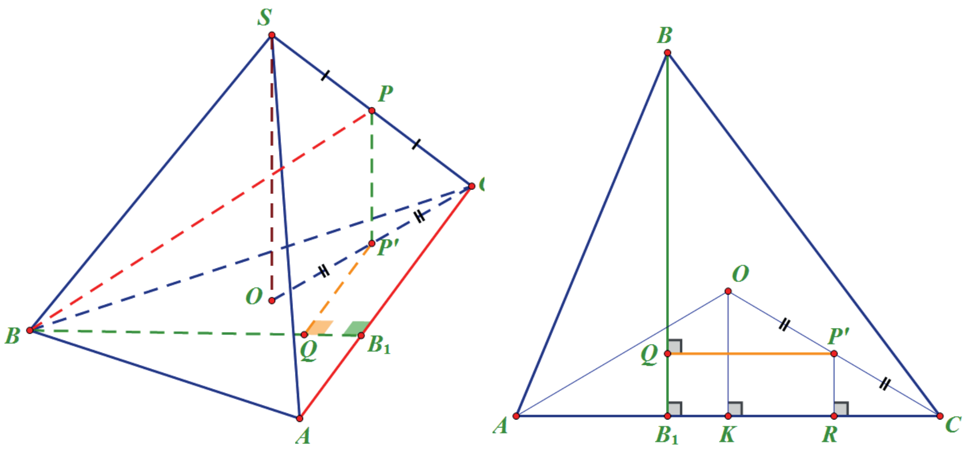
Осталось вычислить

$$d = \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{45 - \frac{144}{25}}} = \frac{30\sqrt{109}}{109}.$$

Ответ: $\frac{30\sqrt{109}}{109}$.

Задача 4. В треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) все боковые рёбра имеют длину $\frac{25\sqrt{17}}{8}$, а в основании лежит треугольник ABC со сторонами AB=13, BC=15, AC=14. Найдите расстояние между прямой AC и медианой BP грани SBC.

Решение. Из точки P опустим перпендикуляр PP' на плоскость ABC. Затем в треугольнике ABC проведём высоту BB', и из точки P' опустим перпендикуляр $P'Q$ на BB' (Рис. 7а).



а) б)

Рис. 7

Применим формулу (2) для нахождения расстояния d между скрещивающимися прямыми AC и BP, получим

$$d = \frac{BB' \cdot PP'}{\sqrt{BP^2 - P'Q^2}}.$$

Используя формулу Герона находим площадь треугольника ABC:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AB)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 84,$$

здесь $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = 21$ – полупериметр треугольника ABC. Теперь без труда находим высоту BB' треугольника ABC

$$BB' = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12.$$

PP' – средняя линия прямоугольного треугольника SOC $\angle SOC = 90^\circ$), где SO – высота пирамиды $SABC$, поэтому

$$PP' = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - CO^2}.$$

Так как $SA = SB = SC = \frac{25\sqrt{17}}{8}$, то точка O – центр описанной около треугольника ABC окружности, а CO – радиус этой окружности, поэтому

$$CO = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{13 \cdot 15 \cdot 14}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}.$$

Итак,

$$PP' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10625}{64} - \frac{4225}{64}} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5.$$

BP – медиана треугольника *SBC*, следовательно,

$$BP = \frac{1}{2}\sqrt{2(SB^2 + BC^2) - SC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{10625}{64} + 225\right) - \frac{10625}{64}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11075}{64}} = \frac{5\sqrt{443}}{16}.$$

Из точек *O* и *P′* опустим на сторону *AC* соответственно, перпендикуляры *OK* и *P′R* (Рис. 7б). Четырёхугольник $QP'RB_1$ – прямоугольник, значит,

$$P'Q = RB_1 = |CB_1 - CR|.$$

Из прямоугольного треугольника BB_{1C} ($\angle BB_1C = 90^o$) по теореме Пифагора находим

$$CB_1 = \sqrt{BC^2 - BB_1^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Поскольку *OK* – серединный перпендикуляр, и *P′R* – средняя линия треугольника *OKC*, то имеем

$$CR = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{4}AC = \frac{7}{2}.$$

Получаем

$$P'Q = \left|9 - \frac{7}{2}\right| = \frac{11}{2}.$$

Осталось вычислить

$$d = \frac{BB' \cdot PP'}{\sqrt{BP^2 - P'Q^2}} = \frac{12 \cdot 5}{\sqrt{\frac{11075}{256} - \frac{121}{4}}} = \frac{960}{\sqrt{3331}} = \frac{960\sqrt{3331}}{3331}.$$

Ответ: $\frac{960\sqrt{3331}}{3331}$.

Итак, нами получены новые формулы для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми (по меньшей мере, аналогов в других источниках пока обнаружить не удалось). На основе полученных результатов разработаны два алгоритма, применение которых продемонстрировано на задачах. Эффективность наших методов предлагаем оценить читателям. Они могут решить рассмотренные в статье задачи классическими способами, и сравнить свои решения с приведёнными здесь.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из центра *O* круга, описанного около прямоугольного треугольника с острым углом 30°, восстановлен к его плоскости перпендикуляр *OD*, длина которого равна 66. Из точки *D* на больший катет опущен перпендикуляр *DK*, равный 10. Найдите

расстояние между прямой DK и прямой, содержащей гипотенузу данного треугольника.

2. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ в основании лежит прямоугольник $ABCD$. Все боковые рёбра равны 13. Найти расстояние между прямыми SA и BD, если AD=6, AB=8.

3. На рёбрах AB, CC_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно точками P, Q и R отмечены середины. Считая ребро куба, равным a, найдите расстояние между прямыми B_1D_1 и:

а) DP; б) DQ; в) DR.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=AA_1=a$, AD=2. На рёбрах CC_1 и AD взяты соответственно точки P и Q такие, что $CR : CC_1 = AQ : AD$ =1:3, на рёбрах AB и A_1B_1 соответственно точками R и V отмечены середины. Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и:

а) PQ; б) PR; в) PV.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a, боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. На рёбрах SD и AD соответственно точками K и L отмечены середины. Найдите расстояние между прямыми KL и:

а) BD; б) AC; в) CD.

ЛИТЕРАТУРА

Шарыгин, И. Ф. (1999). *Геометрия. X – XI кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. заведений*. – М.: Дрофа, 208 с.: ил.

Егерев, В. К., В. В. Зайцев & Б. А. Кордемский (2013). *Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ*. Под. ред. М. И. Сканави – 6-е изд. М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 608 с.: ил.

Гроздев, С., Ц. Байчева, П. Пиперков, К. Кирилова-Лупанова (2008). *Зрелостен изпит. Примерни теми с решения. Математика*. В. Търново: Абагар (ISBN 978-954-427-782-6), 108 с.

Смирнов, В. А. (2009). *Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ*. Под. ред. А. Л. Семёнова, И. В. Ященко. М.: МЦНМО, 272 с., (Готовимся к ЕГЭ).

Родионов, Д. Е., Е. М. Родионов (2004*). Стереометрия в задачах. Пособие для поступающих в вузы.* М.: Ориентир, 232 с.

Литвиненко, В. Н., Г. К. Безрукова (2005). *Задачи по стереометрии (X – XI классы)*. М.: Школьная Пресса, 92, [4] с. / Серия: Готовимся к ЕГЭ («Библиотека журнала «Математика в школе»; Вып. 34.)

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience* (*Theory and Practice*). Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 c.

REFERENCES

Sharygin, I. F. (1999). *Geometriya. X – XI kl.: Ucheb. dlya obshcheobrazovat. ucheb. zavedeniy*. – M.: Drofa, 208 c.: il.

YEgerev, V. K., V. V. Zaytsev, B. A. Kordemskiy (2013). *Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh vo VTUZ'I* . Pod. red. M. I. Skanavi – 6-ye izd. M.: OOO «Izdatel'stvo «Mir i Obrazovaniye»: OOO «Izdatel'stvo «ONIKS-LIT», 608 s.: il.

Grozdev, S., Ts. Baycheva, P. Piperkov, K. Kirilova-Lupanova (2008). *Zrelosten izpit. Primerni temi s resheniya. Matematika.* V. Tarnovo: Abagar (ISBN 978-954-427-782-6), 108 s.

Smirnov, V. A. (2009). *Geometriya. Stereometriya: Posobiye dlya podgotovki k YEGE.* Pod. red. A. L. Semyonova, I. V. Yashchenko. M.: MTSNMO, 272 s., (Gotovimsya k YEGE).

Rodionov, D. YE., YE. M. Rodionov (2004). *Stereometriya v zadachakh. Posobiye dlya postupayushchikh v vuzy.* M.: Oriyentir, 232 s.

Litvinenko, V. N., G. K. Bezrukova (2005). *Zadachi po stereometrii* (X – XI klassy). M.: Shkol'naya Pressa, 92, [4] c. / Seriya: Gotovimsya k YEGE («Biblioteka zhurnala «Matematika v shkole»; Vyp. 34.)

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice).* Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 s.

MODIFICATION OF THE PROJECTION METHOD TO FIND THE DISTANCE BETWEEN SKEW LINES

Abstract. The present paper considers methodological approaches to the problem of finding the distance between skew lines.

✉ **Dr. Vladimir Zhuk**
Teacher in Mathematics
Secondary School for Talented Students
Almaty, Kazhakhstan
E-mail: vladimir_zhuk@mail.ru