

МОДЕЛ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЕДИН КЛАС ЗАДАЧИ ЗА ПОСТРОЕНИЕ С ДИНАМИЧЕН СОФТУЕР

Ваня Бизова-Лалева

Национална търговска гимназия

Резюме: В статията се разглеждат практически задачи, чиито решения се свеждат до построяване на геометрични фигури. Представен е иновативен модел за построяване на геометрични фигури, за които е известна зависимост между дължините на две отсечки от фигурата с общ край. Моделът е реализиран, чрез приложението GeoGebra.

Keywords: school mathematics, construction of geometric figures, geometric place of points, dynamic model, GeoGebra

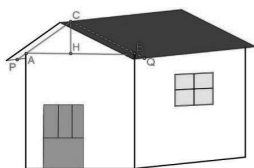
Резултатите на нашите ученици в PISA 2012 показват, че българските ученици имат проблеми с моделиране на практически задачи. Те се справят с елементарни изчисления, но не могат да приложат теоретичните си знания на практика. Това налага по-сериозно обучение в тази посока. Статията е посветена на построяването на геометрични фигури, до които се свеждат решенията на практически задачи от различни области. Построенията се извършват с линейка и пергел, които са инструменти от приложението GeoGebra.

За всяка геометрична фигура е дадена зависимост (сбор, разлика, произведение, частно и др.) между дължините на две отсечки от фигурата с общ край. По тази причина дължината на едната от отсечките се избира за параметър, а другата се изразява чрез него. Общата точка на отсечките принадлежи на две окръжности с радиуси, равни на дължините отсечките и центрове – вторите краища на отсечките. Основната построятелна задача в разглеждания модел е: “Построяване на общите точки на две окръжности с фиксирани центрове, радиусите на които са функции на един параметър”. Такива окръжности ще наричаме „динамични окръжности с фиксирани центрове”. Моделът на „динамичните окръжности” е въведен от Гъров & Бизова-Лалева (2013), където е използван за онагледяване на разстоянието, изминато от материални обекти при праволинейно равномерно движение. В разглеждания модел „определящите” точки от фигурите се построяват като сечение на три геометрични места на точки, обикновено едното е статично, а другите две – „динамични окръжности с фиксирани центрове”.

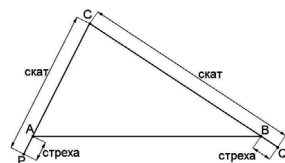
Да разгледаме следната практическа:

Задача 1. (строителство) Основата на новострояща се жилищна сграда има форма на правоъгълник с дължина 12 m и ширина 8 m. Покривът на сградата е двускатен. Билото му е успоредно на голямата основа на сградата. От всички страни има стрехи с дължина 0,7 m. Ъгълът при върха на покрива е 102° и десният скат е с 2 m по-широк от левия. Да се начертае вертикален разрез на покривната конструкция, който е перпендикулярен на билото му. Да се измерят дължините на скатите.

Решение: Разглеждаме сградата (изобразена на фиг. 1) и разрез на покривната конструкция, който е перпендикулярен на билото (фиг. 2).



фиг. 1

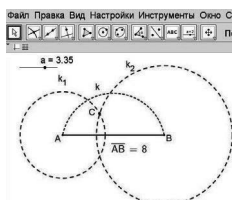


фиг. 2

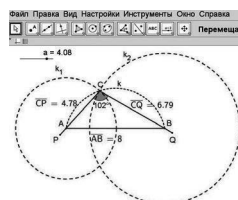
Анализ: Решението на задачата се свежда до построяване на $\triangle ABC$ и точки P и Q върху лъчите CA и CB такива, че $AP = BQ = 0,7m$ (фиг. 2). Точките A и B са построими от условието $AB = 8m$, а точката C от $\angle ACB = 102^\circ$ и зависимостта $BC = AC + 2$ ($CQ = CP + 2$ и $AP = BQ$). Поради връзката между дължините на отсечките AC и BC въвеждаме параметър „ a “ и изразяваме $AC = a$ и $BC = a + 2$. Триъгълникът ABC може да се построи по няколко начина.

Построение: I начин. Построяваме отсечката $AB = 8m$ и дъгата k , от която AB се вижда под ъгъл 102° . Въвеждаме плъзгач  за стойностите на параметъра „ a “. Построяваме динамичните окръжности $k_1(A; r = a)$, $k_2(B; r = a + 2)$ при произволна стойност на параметъра „ a “ и пресечната им точка C (фиг. 3).

С инструмента **Премести**  или  или  Анимация включена променяме стойността на параметъра, докато $C \in k$ (фиг. 4). Взаимното положение на точка C и окръжността k се проверява чрез инструмента **Връзка между два обекта** .



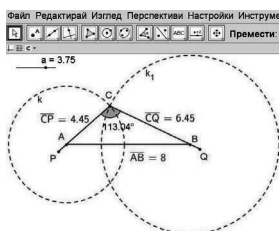
фиг. 3



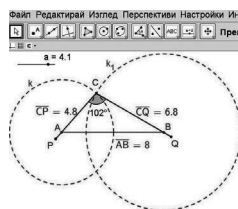
фиг. 4

II начин. Построяваме: отсечката $AB = 8m$; динамичните окръжности $k_1(A; r = a)$ и $k_2(B; r = a + 2)$, при произволна стойност на параметъра „ a “; пресечната им точка C и измерваме $\angle ACB$ с инструмента  (фиг. 5).

Стойността на параметъра „ a “ се променя, докато се получи $\angle ACB = 102^\circ$ (фиг. 6).



фиг. 5

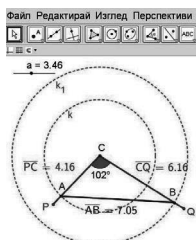


фиг. 6

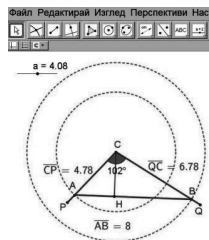
III начин. Построяваме: ъгъл с връх C и мярка 102° ; динамичните окръжности $k_1(C; r = a)$ и $k_2(C; r = a + 2)$, при произволна стойност на параметъра „ a “ и пресечните точки A и B на раменете на ъгъла и окръжностите k_1 и k_2 . С инструмента

Разстояние  се измерва дължината на получената отсечка AB (фиг. 7).

Стойността на параметъра се променя до получаване на дължина $AB = 8m$ (фиг. 8).



фиг. 7



фиг. 8

Доказателството, че построената фигура е търсената, следва от построението. Непозиционната задача за построение има едно решение.

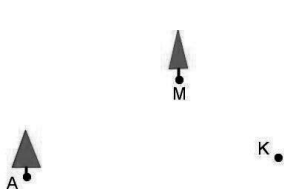
С инструмента **Разстояние**  се измерват височината на билото CH и дължините на скатите CP и CQ (фиг. 8).

Задача 2. (земеразделяне) Зеделски парцел имал форма на правоъгълник. Порой отнесъл границите на парцела и от тях останали само: две дървета A - в един от ъглите му, M - в средата на голямата му страна, несъдържаща A и един триангулачен камък K - във вътрешността на парцела ($AM = 0,5km$, $AK = 0,7km$, $MK = 0,35km$). Да се възстановят границите на парцела, ако:

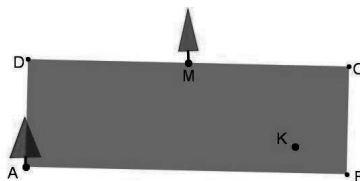
- Едната му страна била три пъти по-голяма от другата;
- Лицето му било $0,24$ кв. км.

Решение: а) На фиг. 9 с точките A , M и K са означени местата на дърветата и камъка, останали след наводнението. Практическата задача преформулираме в позиционна задача за построение: Да се построи правоъгълник $ABCD$, за който върхът A , средата M на страната DC и точка K от вътрешността му са фиксирани точки и $DC = 3AD$.

Анализ: Допускаме, че правоъгълникът $ABCD$ на (фиг. 10) е възстановеният парцел.



фиг. 9

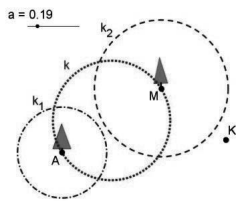


фиг. 10

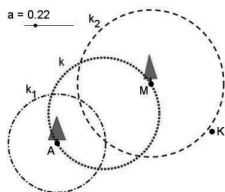
Точката D е определена от условията $\angle ADM = 90^\circ$ и $DM = 1,5DA$. Поради зависимостта между дължините на отсечките DA и DM , въвеждаме параметър „ a ” и ги изразяваме чрез него – $AD = a$ и $DM = 1,5a$.

Построение: Построяваме окръжност k с диаметър AM , от която отсечка AM се вижда под прав ъгъл и динамичните окръжности $k_1 (A; r = a)$ и $k_2 (M; r = 1,5a)$ при произволна стойност на параметъра „ a ” (фиг. 11). Променяме стойностите на параметъра „ a ”, докато получим обща точка на k_1 и k_2 (фиг. 12) и обща точка D на трите геометрични места на точки k , k_1 и k_2 (ако съществува) (фиг. 13). Съществуват две такива точки D и D_1 .

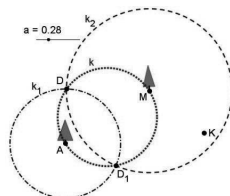
Построяваме точка C като симетрична на D относно M , а B -симетрична на D относно средата на диагонала AC (фиг. 14). Построяваме правоъгълника $AB_1C_1D_1$ (фиг. 15) по аналогичен начин.



фиг. 11

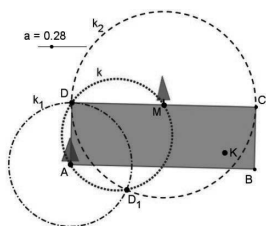


фиг. 12

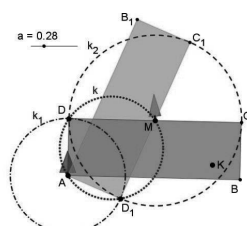


фиг. 13

Тъй като триангулационният камък K лежи във вътрешността на правоъгълника $ABCD$, той е възстановеният земеделски парцел.

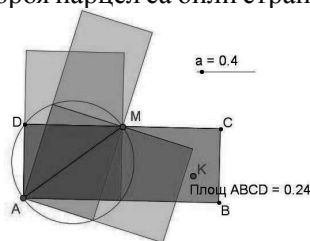


фиг. 14



фиг. 15

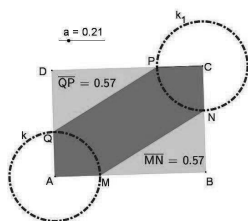
б) От условието за лицето на правоъгълника $ABCD$ следва, че между дължините на отсечките AD и DM съществува зависимостта $AD \cdot DM = 0,12$. Въвеждаме параметър „ a “ и избираме $AD = a$. Тогава $DM = \frac{0,12}{a}$. Точката D се построява като сечение на окръжност k с диаметър AM ($\angle ADM = 90^\circ$) и динамичните окръжности k_1 ($A; r = a$) и k_2 ($M; r = \frac{0,12}{a}$). Върховете B и C се построяват както в предходното условие. Позиционната пострителна задача: „Да се построи правоъгълник $ABCD$ с лице $0,24$ кв. км, за който са дадени върхът A , средата M на страната DC и $DC = 3AD$ “ има четири решения (фиг. 16). От триангулационния камък K се определя, че границите на отнесения от пороя парцел са били страните на правоъгълника $ABCD$.



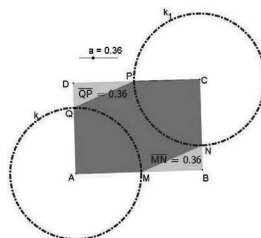
фиг. 16

Задача 3. (разкрояване на фигури) Даден е правоъгълен лист хартия с размери 0,5m на 0,5 m. От него да се изреже детско хвърчило с форма на шестоъгълник с възможно най-големи равни страни.

Решение: Условието за равни страни на търсения шестоъгълник (зависимост между дължините на страните) ни насочва към въвеждането на параметър „ a “ за дължините им и използването на динамични окръжности с центрове двойка противоположни върхове на дадения правоъгълник $ABCD$. Окръжностите $k(A; r = a)$ и $k_1(C; r = a)$ отсичат от страните на правоъгълника равни отсечки и осигуряват равенство на четири от страните на шестоъгълника $AMNCPQ$ (фиг. 17). Променяме стойността на параметъра „ a “, докато получим $MN = PQ = a$ (фиг.18).



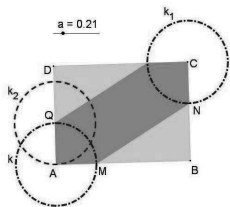
фиг. 17



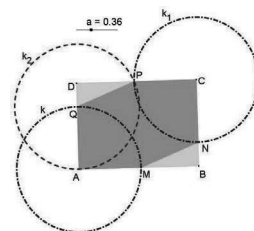
фиг. 18

Задачата може да се реши и чрез въвеждане на динамична окръжност $k_2(Q; r = a)$ (фиг. 19). Стойността на параметъра се променя, докато k_1 , k_2 и отсечката CD се пресекат в една точка (фиг. 20) (проверява се с инструмента **Връзка между два обекта**  $a = b$).

Равенствата $AM = AQ = PQ = CP = CN$ следват от построението, а $MN = PQ$ – от еднаквостта на $\triangle QDP$ и $\triangle NBM$.



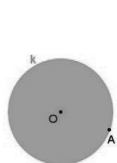
фиг. 19



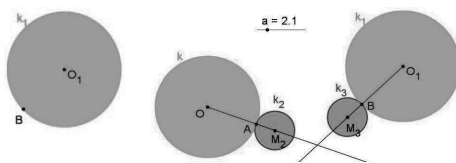
фиг. 20

Задача 4. (проектиране) Хотелски комплекс имал два открити басейна с диаметри 11 m и 12 m и разстояние между центровете им 21,21 m (фиг. 21). Възложена е поръчка за изграждане на два нови детски басейна. Условието на възложителя

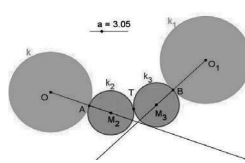
са: новите басейни да имат форма на кръг; да са еднакви; да се допират външно един до друг и до съществуващите басейни съответно в точките, означени с A и B , където са водоизточниците им. Изгответе проект за обектите.



фиг. 21



фиг. 22



фиг. 23

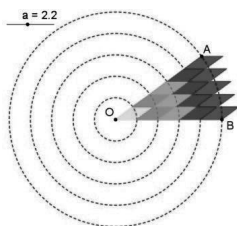
Решение: Задачата се свежда до определяне центровете и радиусите на две външно допиращи се окръжности с равни радиуси, които се допират външно и до дадените окръжности $k(O)$ и $k_1(O_1)$ съответно в точките A и B . Въвеждаме параметър a за радиусите на търсените окръжности. Центровете им M_2 и M_3 са точки от лъчите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{O_1B}$ такива, че $AM_2 = BM_3 = a$, с което се осигурява допирането им до k и k_1 . Построяваме динамичните окръжности $k_2(M_2; r_2 = a)$ и $k_3(M_3; r_3 = a)$ (фиг. 22). Променяме стойността на параметъра a , така че окръжностите да имат една обща точка T (фиг. 23) (проверява се с инструмента **Връзка между два обекта**  $a = b$). Стойността на параметъра $a = 3,05$, показана в този момент, е дължината на радиусите на новите басейни. Определени са и местоположенията на центровете им M_2 и M_3 .

Задача 5. (приложно изкуство) Да се направи проект за декорация на комплект кръгли чинии с диаметри 15 cm, 20 cm и 25 cm. Всяка чиния да се декорира с еднакви цветни ромбове, които да отговарят на следните условия: острият им ъгъл да е 36° , да не се пресичат, да няма празни части с изключение на контура на чинията и радиусът на чинията да е шест пъти по-голям от страната на ромба.

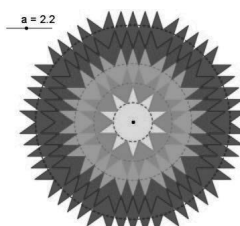
Решение: Поради зависимостта между страната на ромба и радиуса на чинията, формулираме задачата така: „В кръг с радиус $6a$ да се впишат ромбове със страна a и ъгъл 36° така, че да не се пресичат, да няма празни части с изключение на контура на чинията“.

Стойността на острия ъгъл на ромба ($36^\circ \cdot 10 = 360^\circ$) насочва към оцветяването на кръгов сектор с ъгъл 36° . Въвеждаме параметър a за дължината на страната на ромба. Построяваме ъгъл $\angle AOB = 36^\circ$ и окръжности $k_1(O; r = a)$, $k_2(O; r = 2a)$, ..., $k_5(O; r = 5a)$, ако искаме да начертаем пет концентрични венеца от разноцветни ромбове. През пресечните точки на всяко рамо на ъгъла и окръжностите са постро-

ени прави, успоредни на другото му рамо. Тези прави разделят кръговия сектор на еднакви ромбове. На (фиг. 24) е представено едно решение на поставената цветна задача. Следва маркиране и оцветяване на фигурите, както и ротация или централна симетрия на ромбовете от сектора до запълване на кръга (фиг. 25). Подходящо е да се изработи компютърна среда, която да преобразува както контура на фигурата, така и оцветената и част (Гроздев & Чехларова, 2008).

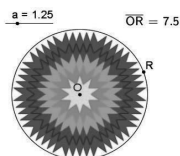


фиг. 24

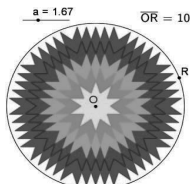


фиг. 25

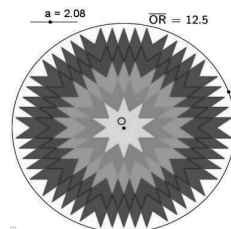
За изработването на матриците за трите вида чинии измерваме радиуса OR на чинията и променяме стойността на параметъра a до достигане на желаните размери на чиниите: $OR = 7,5$ (фиг. 26); $OR = 10$ (фиг. 27) и $OR = 12,5$ (фиг. 28).



фиг. 26



фиг. 27



фиг. 28

Предложеният модел на „динамичните окръжности с фиксирани центрове” е иновативен и може да се приеме като изключително полезен комплексен инструмент на приложението GeoGebra. Задачите за построение от разгледания вид, съдържащи се в (Петров & Ганчев, 1966), (Александров, 1962) и (Рангелова, 2006), предложени за решаване с различни класически методи, могат да се решат с предложения модел. Като недостатък на модела приемаме проверката, която е необходимо да се извършва за определяне на взаимното положение на геометричните обекти чрез инструмента **Връзка между два обекта** .

С прилагането на информационни технологии в обучението се постига многократно ускоряване и съкращаване на много от рутинните операции т.е. оптимизиране на необходимото време за усвояване на знания и умения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторът изказва благодарност към Научен проект МУ13ФМИ002 към НПД на ПУ „Паисий Хилендарски” за частичното финансиране на настоящата работа.

БЕЛЕЖКИ

www.geogebra.org (последно посетен на 8.02.2014 г.)

ЛИТЕРАТУРА

- Александров, И. (1962). *Сборник от геометрични задачи за построение*. София: Народна просвета.
- Гроздев, С. & Чехларова, Т. (2008). Българо-руският проект по методика и информационни технологии в образованието. В: *Интердисциплинарен форум “България и Русия – посоки на взаимност”*, Русе, 14–17 декември 2008, 55- 64. ISBN 978-954-712-451-6.
- Гъров, К. & Бизова-Лалева, В. (2013). Геометричен модел на задачи от движение с използване на динамичен софтуер. *Science and education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, Vol.9. Budapest. ISSN 2308-5258.
- Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2009). *Математика за 8. клас*. София: Анубис. ISBN 9789544268190.
- Петров, К. & Ганчев, И. (1966). *Сборник от задачи за построение по геометрия*. София: Народна просвета.
- Рангелова, П. (2006). *Сборник задачи планиметрия за 9.-10. клас*. Пловдив: Коала прес. ISBN-13:978-954-9455-06-9.

A MODEL FOR CONSTRUCTION PROBLEM SOLVING BY DYNAMIC SOFTWARE

Abstract. The paper considers practical problems, the solutions of which are reduced to the construction of geometrical figures. An innovative model is presented for the construction of geometrical figures, for which a relation between the lengths of two segments with a common extremity from the figure is known. The model is realized by means of GeoGebra application.

✉ **Mrs. Vania Bizova-Laleva**
National High School of Commerce
50, Ruski Av.
Plovdiv, Bulgaria
E-mail: v_laleva@abv.bg