

## МОДЕЛ НА ЛЕОНТИЕВ С MS EXCEL

Велика Кунева<sup>1)</sup>, Мариян Милев<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Аграрен университет – Пловдив

<sup>2)</sup>Софийски университет „Св. Климент Охридски“

**Резюме.** В настоящата разработка е представено приложно решаване на балансов модел на Леонтиев с помощта на софтуер MS Excel. Едно от предимствата на алгоритмичното решаване на подобни задачи чрез подходящ софтуер е значителното разширяване на практическото им приложение, свързано с обработката на данни и изпълнение многобройни изчислителни операции. От друга страна, това позволява по-дълбок анализ на взаимовръзките между отделните групи при зададени различни изходни данни или промяна на самите фактори в структурата на модела.

**Ключови думи:** балансов модел на Леонтиев; модел приходи – разходи; MS Excel; алгоритмичното решаване; анализ на данни

### 1. Въведение

През 30-те години на XX век руският икономист Василий Леонтиев (1905 – 1999), работещ в САЩ, започва изследване на междуотрасловата структура на американската икономика. Той създава математически модел за междуотраслов баланс, като разглежда и описва взаимните връзки между 500 отрасли. Решаването на модела дава възможност да се прогнозира обемът на производството, който да задоволява междуотрасловите и пазарните потребности. За теорията си и създадения и решен математически модел през 1973 г. Леонтиев получава Нобелова награда за икономика.

Моделът на Леонтиев се използва за моделиране на регионалните и националните икономики, както и за моделиране на световната икономика. Моделът на Леонтиев се разглежда в два варианта:

- *затворен* – когато разглежданата икономика произвежда продукцията само за задоволяване на производствените нужди;
- *отворен* – когато освен за собствени нужди произвежда и продукцията за крайни потребители.

Освен това моделът може да бъде *статичен* или *динамичен* в зависимост от това дали се разглежда за даден конкретен момент, или във времето. Ще разгледаме *статичния отворен* модел на Леонтиев (Leontief 1986), (Dietzenbacher et al. 2011). От друга страна, ако се приеме, че преките разходи

имат случаен характер, то е необходимо да се разгледа отворен стохастичен модел на Леонтиев (Kozicka 2021).

В глава 2 е постулиран математически статичен отворен модел на Леонтиев (табл. 1) и за демонстрация е решена практическа задача от такъв вид само с два отрасли (табл. 2). В глава 3 чрез MS Excel се решава практическа задача в рамките на отворена регионална икономика с три отрасли и чрез определяне на числените стойности на обемите на произвеждана продукция се дава практически извод за балансирана икономика. В заключението са направени практически изводи за сложността и предимствата на представеното приложно решение на задачи от модела на Леонтиев и се дават насоки за бъдеща работа за развитието на алгоритмичното решаване на подобни практически задачи.

## 2. Статичен отворен модел на Леонтиев

Нека за по-голяма прегледност приемем, че в даден регион са развити три отрасли. Да считаме, че те произвеждат продукция в обеми (в млн. лв.), която ще наричаме *обща продукция*. Част от продукцията на всеки отрасъл се използва за задоволяване на собствените нужди, друга част е предназначена за потребление от другите отрасли, а трета – за задоволяване нуждите на пазара. Продукцията за нуждите на пазара на всеки отрасъл се нарича *краен продукт* (*крайна продукция*) на отрасъла.

Разпределението на продукцията може да се опише с помощта на т. нар. „Таблица на междуотрасловите връзки“ (табл. 1).

Таблица 1

| Отрасъл | Обем обща продукция (млн. лв.) | Междуетраслови потоци |          |          | Краен продукт |
|---------|--------------------------------|-----------------------|----------|----------|---------------|
|         |                                | 1.                    | 2.       | 3.       |               |
| 1.      | $x_1$                          | $x_{11}$              | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $d_1$         |
| 2.      | $x_2$                          | $x_{21}$              | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $d_2$         |
| 3.      | $x_3$                          | $x_{31}$              | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $d_3$         |

Въз основа на тази таблица можем да напишем следните линейни уравнения, наречени *балансиови уравнения* на производствата:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + d_1 \\
 x_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{23} + d_2 \\
 x_3 &= x_{31} + x_{32} + x_{33} + d_3
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

където  $x_{ij}$  е продукцията, която  $i$ -тият отрасъл дава на  $j$ -тия.

В практиката обикновено се счита, че количествата, отделени за всеки отрасъл, са пропорционални на количествата обща продукция, т.е. всеки отрасъл консумира продукция от друг отрасъл, пропорционална на собственото му производство.

Да означим коефициентите на пропорционалност с  $c_{ij}$ . Те се наричат *коефициенти на преките разходи* и изразяват каква част от продукцията на  $i$ -тия отрасъл ( $i = 1, 2, 3$ ) се използва за производство на единица продукция от  $j$ -тия отрасъл ( $j = 1, 2, 3$ ). В практиката обикновено се задават тези коефициенти. Като заместим  $x_{ij}$  в (1) с  $c_{ij}x_j$ , получаваме:

$$\begin{aligned}x_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + d_1 \\x_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + d_2 \\x_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + d_3\end{aligned}\tag{2}$$

Системата (2) представлява математическо описание на отворения междуетраслов баланс на една регионална икономика и се нарича *математически модел на междуетрасловия баланс* или *балансов модел на Леонтиев*. Известен е още и като модел „приходи – разходи“ („input – output“ model) (Leontief 1986).

За системата (2) да въведем следните означения:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  – матрица-стълб на общата продукция;  $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$  – матрица-стълб на крайната продукция и  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$  – матрицата на преките разходи;

Тогава можем да запишем (2) в матричен вид:  $X = CX + D$ , или  $(E - C)X = D$ , където  $E$  е единична матрица от трети ред. В (Kozicka 2021) е разгледан отворен стохастичен модел на Леонтиев, при който матриците  $C$  и  $D$  са случайни.

**Поставяме следната задача:** При известна матрица на преките разходи  $C$  и матрица на крайната продукция  $D$ , да се намери матрицата  $X$  на общата продукция.

*Решението* на уравнението е  $X = (E - C)^{-1}D$ . Матрицата  $(E - C)^{-1}$  се нарича *матрица на коефициентите на пълните (вътрешнозаводски) разходи*.

С намирането на матрицата  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  се определя общата продукция за

всеки отрасъл.

Задачата може да се реши и по отношение на крайната продукция  $D$ , при известни  $C$  и  $X$ . Моделът, който разгледахме, е при предположението за три отрасли. Тогава матрицата  $C$  на преките разходи ще бъде квадратна матрица от трети ред.

Като пример да разгледаме следната:

**Задача 1.** Да разгледаме отворена регионална икономика с два отрасли: енергетика и промишленост. В таблица 2 са посочени разходите, които се правят от всеки отрасъл за производство на единица продукция (коефициентите на преките разходи), както и количествата крайна продукция (в млн. лв.).

Таблица 2

| Отрасъл      | Енергетика | Промишленост | Крайна продукция<br>(млн. лв.) |
|--------------|------------|--------------|--------------------------------|
| Енергетика   | 0,2        | 0,6          | 100                            |
| Промишленост | 0,1        | 0,4          | 200                            |

Каква трябва да е стойността на общата продукция на всеки отрасъл, за да бъде балансиран моделът?

**Решение:**

А. От дадената таблица изразяваме матрицата от коефициентите на преките разходи:

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ и намираме } E - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Б. Търсим  $(E - C)^{-1}$ . Ще припомним, че ако  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  е неособена

квадратна матрица, то  $A^{-1} = \frac{1}{D_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ ,

където  $A_{ij}$  са адюнгираните количества на елементите  $a_{ij}$  на матрицата  $A$  и  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ , където  $D_{ij}$  са съответните поддетерминанти на елементите  $a$ .

Намираме най-напред детерминантата  $D$  на матрицата  $E - C$ :

$$D = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,48 - 0,06 = 0,42$$

и

$$(E - C)^{-1} = \frac{1}{0,42} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

В. Намираме  $X = (E - C)^{-1} \cdot D$ :  $X = \frac{1}{0,42} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix},$

$$X = \frac{100}{42} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 170 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } X \approx \begin{pmatrix} 429 \\ 405 \end{pmatrix}.$$

**Отговор.** За да бъде балансирана икономиката, отрасъл „Енергетика“ трябва да произведе продукция за 429 млн. лв., а отрасъл „Промисленост“ – за 405 млн. лв.

### 3. Решаване на балансовия модел на Леонтиев чрез MS Excel

**Задача 2.** Да разгледаме отворена регионална икономика с три отрасли – електроника (Е), растениевъдство (Р) и автомобилостроене (А). Данните са разположени в таблица 3. Да се определи обемът на производство на всеки отрасъл така, че моделът да бъде балансиран.

Таблица 3

| Отрасъл           | Е   | Р   | А   | Пазар |
|-------------------|-----|-----|-----|-------|
| Електроника       | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 400   |
| Растениевъдство   | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 300   |
| Автомобилостроене | 0.3 | 0.5 | 0.2 | 100   |

#### Решение

Подобно на представения алгоритъм в (Kuneva et al. 2021), ще представим приложно решаване на задача 2 с помощта на приложението MS Excel. Стартираме MS Excel и в работния лист попълваме елементите на единичната матрица и матрицата на преките разходи. Подобен алгоритмичен подход за решаване практически задачи чрез MS Excel позволява по-дълбок анализ при промяна на изходните данни. По този начин може да се направи и анализ на взаимовръзките между отделните групи при промяна на самите фактори в структурата на разглеждания балансов модел. Например в модифициран

модел на основата на Власов-Леонтиев е изследвано взаимодействието „почва – стена“ в (Qijian et al. 2014).

След въвеждане на матриците  $E$  и  $C$  избираме областта от таблицата, в

|    | A | B | C   | D    | E    | F    | G   | H   | I |
|----|---|---|-----|------|------|------|-----|-----|---|
| 1  | E | 1 | 0   | 0    | C    | 0,2  | 0,3 | 0,1 |   |
| 2  |   | 0 | 1   | 0    |      | 0,1  | 0,4 | 0,2 |   |
| 3  |   | 0 | 0   | 1    |      | 0,3  | 0,5 | 0,2 |   |
| 4  |   |   |     |      |      |      |     |     |   |
| 5  |   |   |     |      |      |      |     |     |   |
| 6  |   |   |     |      |      |      |     |     |   |
| 7  |   |   | E-C | 0,8  | -0,3 | -0,1 |     |     |   |
| 8  |   |   |     | -0,1 | 0,6  | -0,2 |     |     |   |
| 9  |   |   |     | -0,3 | -0,5 | 0,8  |     |     |   |
| 10 |   |   |     |      |      |      |     |     |   |
| 11 |   |   |     |      |      |      |     |     |   |
| 12 |   |   |     |      |      |      |     |     |   |
| 13 |   |   |     |      |      |      |     |     |   |

Фигура 1. Намиране на  $E - C$

случая D7:F9, в която да се пресметне матрицата  $E - C$  (фиг. 1), като за целта в клетката D7 въвеждаме формулата =B1:D3-F1:H3.

|    | A | B | C            | D        | E        | F        | G   | H   | I |
|----|---|---|--------------|----------|----------|----------|-----|-----|---|
| 1  | E | 1 | 0            | 0        | C        | 0,2      | 0,3 | 0,1 |   |
| 2  |   | 0 | 1            | 0        |          | 0,1      | 0,4 | 0,2 |   |
| 3  |   | 0 | 0            | 1        |          | 0,3      | 0,5 | 0,2 |   |
| 4  |   |   |              |          |          |          |     |     |   |
| 5  |   |   |              |          |          |          |     |     |   |
| 6  |   |   |              |          |          |          |     |     |   |
| 7  |   |   | E-C          | 0,8      | -0,3     | -0,1     |     |     |   |
| 8  |   |   |              | -0,1     | 0,6      | -0,2     |     |     |   |
| 9  |   |   |              | -0,3     | -0,5     | 0,8      |     |     |   |
| 10 |   |   |              |          |          |          |     |     |   |
| 11 |   |   |              |          |          |          |     |     |   |
| 12 |   |   | $E - C^{-1}$ | 1,589958 | 1,213389 | 0,502092 |     |     |   |
| 13 |   |   |              | 0,585774 | 2,552301 | 0,711297 |     |     |   |
| 14 |   |   |              | 0,962343 | 2,050209 | 1,882845 |     |     |   |
| 15 |   |   |              |          |          |          |     |     |   |
| 16 |   |   |              |          |          |          |     |     |   |

Фигура 2. Намиране на обратната матрица на  $E - C$

След пресмятането на матрицата  $E - C$  избираме област от таблицата със същите размери, в примера това е D12:F14 (фиг. 2), в която да пресметнем обратната матрица на  $E - C$ . За целта в най-горната най-лява клетка въвеждаме формулата =MINVERSE(D7:F9) и стартираме пресмятането с натискане на бутона Enter.

В клетките I12:I14 записваме матрицата  $D$  и пресмятаме матрицата на резултата  $X = (E - C)^{-1} \cdot D$ , като в избрана клетка, в примера това е E:17, напишем формулата =MMULT(D12:F14;I12:I14) за умножаване на двете матрици (фиг. 3).

|    | A | B | C                          | D        | E        | F        | G   | H   | I   | J |
|----|---|---|----------------------------|----------|----------|----------|-----|-----|-----|---|
| 1  | E | 1 | 0                          | 0        | C        | 0,2      | 0,3 | 0,1 |     |   |
| 2  |   | 0 | 1                          | 0        |          | 0,1      | 0,4 | 0,2 |     |   |
| 3  |   | 0 | 0                          | 1        |          | 0,3      | 0,5 | 0,2 |     |   |
| 4  |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 5  |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 6  |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 7  |   |   | E-C                        | 0,8      | -0,3     | -0,1     |     |     |     |   |
| 8  |   |   |                            | -0,1     | 0,6      | -0,2     |     |     |     |   |
| 9  |   |   |                            | -0,3     | -0,5     | 0,8      |     |     |     |   |
| 10 |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 11 |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 12 |   |   |                            | 1,589958 | 1,213389 | 0,502092 |     | D   | 400 |   |
| 13 |   |   |                            | 0,585774 | 2,552301 | 0,711297 |     |     | 300 |   |
| 14 |   |   |                            | 0,962343 | 2,050209 | 1,882845 |     |     | 100 |   |
| 15 |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 16 |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 17 |   |   | $X = (E - C)^{-1} \cdot D$ |          |          | 1050,209 |     |     |     |   |
| 18 |   |   |                            |          |          | 1071,13  |     |     |     |   |
| 19 |   |   |                            |          |          | 1188,285 |     |     |     |   |
| 20 |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |
| 21 |   |   |                            |          |          |          |     |     |     |   |

Фигура. 3. Обемът на производство за всеки отрасъл

**Отговор:** За да бъде балансирана икономиката, отраслите електроника, растениевъдство и автомобилостроене трябва да произведат продукцията в обеми 1050, 1071 и 1188 млн. лв., съответно.

#### 4. Заключение

Предложеното описание на класическия балансов модел на Леонтиев и представеното алгоритмично решение на дадена икономическа задача от такъв вид показват лесната компютърна имплементация на съответния математически модел и ефективна приложимост на софтуерни приложения като MS Excel. Чрез тях не само значително се ускоряват изчислителните процедури, но може да се направи по-дълбок анализ на взаимовръзките

между отделните фактори при задаване на различни изходни данни или промяна на самите фактори в структурата на модела. От друга страна, се улеснява разбирането и използването на редица математически формули в модели като този на Леонтиев, както и понятия като матрица, вектор, линейно оптимизиране, и в същото време, това позволява да се направят реални практически изводи за икономически понятия и фактори като труд, ограничени ресурси, междуотраслов баланс и др.

## REFERENCES

- DIETZENBACHER, E., LAHR, M., 2004, *Wassily Leontief and Input-Output Economics*, Cambridge University Press, ISBN-10: 0521832381.
- KOZICKA, M., An approach to stochastic input-output modeling, *Mathematical Methods in Economics and Finance – m<sup>2</sup>ef*, vol. 9/10, no. 1, 2014/2015
- KUNEVA, V., MILEV, M., GOCHEVA, M., 2021. Modeling the transportation assessment with MS Excel Solver, *AIP Conference Proceedings*, vol. 2333. ISBN 15005-1-15005-10.
- LEONTIEV, W., 1986, *Input-output economics*. Second edition. Oxford University Press, New York Oxford, ISBN: 0195035275.
- QIJIAN, L., Tian, Y., Deng, F., 2014, Dynamic analysis of flexible cantilever wall retaining elastic soil by a modified Vlasov – Leontiev model, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 63, August 2014, pp. 217 – 225.

## LEONTIEF MODEL WITH MS EXCEL SOLVER

**Abstract.** This article presents an applied solution of the Leontiev's balance model using MS Excel software. One of the advantages of the algorithmic solution of such tasks through appropriate software is the significant expansion of their practical application related to data processing and performing numerous computational operations. On the other hand, this allows a deeper analysis of the interrelationships between the individual groups given different initial data or changing the factors themselves in the structure of the model.

**Keywords:** balance model of Leontief; revenue-expenditure model; MS Excel; algorithmic solution; data analysis

✉ **Dr. Velika Kuneva, Assoc. Prof.**

ORCID iD: 0000-0001-6112-681X

Chair “Mathematics and Informatics”

Faculty of Economics, Agricultural University

12, Mendelev Blvd.

4000 Plovdiv, Bulgaria

E-mail: kuneva@au-plovdiv.bg, kuneva.1977@abv.bg

✉ **Dr. Mariyan Milev, Assoc. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-1756-3358

SCOPUS: 35119326600

Chair “Statistics and econometrics”

Faculty of Economics and Business Administration

Sofia University “St. Kliment Ohridski”

125, Tzarigradsko shosse, bl. 3

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: m.milev@feb.uni-sofia.bg