

МЕЖДУНАРОДНА ЖАУТИКОВСКА ОЛИМПИАДА

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Висше училище по застраховане и финанси

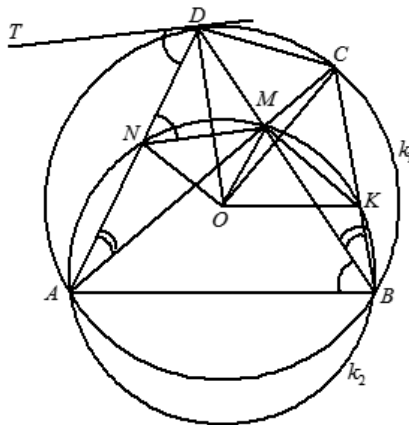
²Технически колеж –Ловеч

Резюме. Разгледани са задачите и техните решени от Международната Жаутиковска олимпиада през 2016 г. Решенията имат методически характер.

Задача 1. Даден е четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка M на диагоналите, който е вписан в окръжност с център O . Описаната окръжност около $\triangle ABM$ пресича страните BC и AD съответно в точки K и N . Да се докаже, че четириъгълниците $NOMD$ и $KOMC$ са равнолицеви.

(Емил Стоянов, България)

Решение. Нека k_1 и k_2 са описаните окръжности съответно около дадения четириъгълник и $\triangle ABM$. Ъглите $\angle CAD$ и $\angle DBC$ са вписани в k_1 и се измерват с дъгата $\widehat{CD}$. Следователно $\angle CAD = \angle DBC$. Тези ъгли са вписани и в k_2 , откъдето заключаваме, че $MN = MK$. Освен това $OD = OC$ като радиуси в k_1 . Получаваме, че четириъгълниците $NOMD$ и $KOMC$ имат равни диагонали. Ще докажем, че тези диагонали са два по два перпендикулярни. Нека TD е допирателната към k_1 в точката D . Тогава $\angle ADT = \angle ABD$, съответно като периферен и вписан ъгъл в k_1 , които се измерват с една съща дъга $\widehat{AD}$. От друга страна, $\angle ABD = \angle MND$, тъй като четириъгълникът $ABMN$ е вписан в k_2 . Тогава $\angle ADT = \angle MND$ и следователно $TD \parallel MN$. Заключаваме, че $MN \perp OD$. По същия начин $MK \perp OC$. Сега твърдението



следва от формулата за лице на четириъгълник с взаимно перпендикулярни диагонали.

Задача 2. Ако $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ е пермутация на числата $1, 2, \dots, 100$, нека $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$. Колко най-много са точните квадрати измежду числата $S_1, S_2, \dots, S_{100}$?

(Наири Седракян, Армения)

Решение. Към редицата $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ добавяме начален член $S_0 = 0$ и разглеждаме членовете $S_{n_0} < S_{n_1} < \dots$, които са точни квадрати, т.е. $S_{n_k} = m_k^2$ (в частност $n_0 = m_0 = 0$). Тъй като $S_{100} = 5050 < 72^2$, числата m_k не надминават 71. Ако $m_{k+1} = m_k + 1$, разликата $S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = 2m_k + 1$ е нечетна. Оттук следва, че поне едно от числата $a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}$ е нечетно. Тъй като нечетните числа, които не надминават 100, са общо 50, измежду разликите $m_{k+1} - m_k$ не повече от 50 са равни на 1. Ако допуснем, че точните квадрати в изходната редица са поне 61, то

$$m_{61} = (m_{61} - m_{60}) + (m_{60} - m_{59}) + \dots + (m_1 - m_0) \geq 50 + 1 \cdot 2 = 72,$$

което е невъзможно. Пример на редица с 60 точни квадрата може да се построи по следния начин. Ако $a_i = 2i - 1$ при $1 \leq i \leq 50$, можем да използваме всички нечетни числа и нека $S_i = i^2$. По-нататък нека $S_{54+4i} - S_{50+4i} = 204 + 8i$. Тогава $S_{54+4i} = (52 + 2i)^2$. Последните 18 члена на редицата са 30, 40, 64, 66, 68, 6, 8, 14, 16, 32, 38, 46, 54, 62, 22, 24, 48 и 56. Сега $S_{87} = 66^2 + 2 \cdot 134 = 68^2$ и $S_{96} = 70^2$.

Задача 3. В Графландия има 60 града, всеки два от които са свързани с път с еднопосочно движение. Да се докаже, че четири от градовете могат да се оцветят в червено, а други четири – в зелено, така че пътищата между червените и зелените градове да са в посока от червен към зелен град.

(Александър Голованов, Русия)

Решение. Ще казваме, че град A обслужва град B , ако пътят между A и B е в посока от A към B . В този случай ще казваме още, че пътят между A и B излиза от A . Така, A обслужва четворката градове B_1, B_2, B_3 и B_4 , ако пътищата между A и B_i са в посока от A към B_i за всяко $i = 1, 2, 3, 4$, т.е. пътищата между A и B_i излизат от A . Ако един град обслужва общо k града, то този град обслужва C_k^4 четворки градове. Нека броят на пътищата, които излизат от всичките 60 града, са $k_1, k_2, \dots, k_{60}$. Това са всички възможни пътища и техният общ брой е $C_{60}^2 = 30.59$. Общият брой обслужвани четворки градове е $S = C_{k_1}^4 + C_{k_2}^4 + \dots + C_{k_{60}}^4$. Ще докажем, че най-малката стойност на тази сума, при условие че $k_1 + k_2 + \dots + k_{60} = 30.59$, е равна на $30 \cdot C_{30}^4 + 30 \cdot C_{29}^4$. Наистина, множеството набори от цели неотрицателни числа $(k_1, k_2, \dots, k_{60})$ със сума 30.59 е крайно и следователно един от тези на-

бори определя минимална сума S . Да допуснем, че за разглежданото множество има две числа $m \geq 4$ и n така, че $m - n \geq 2$. Ако заменим m и n с $m - 1$ и $n + 1$, то сумата ще се намали ($C_m^4 + C_n^4 - C_{m-1}^4 - C_{n+1}^4 = C_{m-1}^3 - C_n^3 > 0$). По този начин най-малката стойност на сумата S се достига за набор от k_i , при който разликата на всеки две числа не надминава 1. Такъв набор е очевидно единствен и е съставен от 30 числа, равни на 30, и 30 числа, равни на 29.

И така, всичките 60 се града се обслужват от не по-малко от $30.C_{30}^4 + 30.C_{29}^4$ четворки. Лесно се проверява, че това число е по-голямо от $3.C_{60}^4$, т.е. от утроения брой на всички четворки. Това означава, че съществува четворка, която обслужва поне четири града, което трябваше да се докаже.

Задача 4. Намерете всички $k > 0$, за които съществува намаляваща функция $g \in \mathfrak{R}$ така, че $g(x) \geq kg(x + g(x))$ за всяко $x > 0$.

(Шукрат Исмаилов, Узбекистан)

Решение. Нека $0 < k \leq 1$. За всяка такава стойност на k е достатъчно да вземем $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогава $x + g(x) > x$ и $g(x) > g(x + g(x)) \geq kg(x + g(x))$ за всяко $x > 0$. Да обърнем внимание, че неравенството от условието на задачата е изпълнено и за всяка друга намаляваща функция $g \in \mathfrak{R}$.

Нека $k > 1$ и да допуснем, че съществува намаляваща функция $g \in \mathfrak{R}$, за която $g(x) \geq kg(x + g(x))$ за всяко $x > 0$. Ако $s = \frac{1}{k}$, то $sg(x) \geq g(x + g(x))$. Нека $x > 0$ е фиксирано. Разглеждаме редицата $x_0 = x$, $x_{n+1} = x_n + g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тъй като $g(x_{n+1}) = g(x_n + g(x_n)) \leq sg(x_n)$, по индукция следва, че $g(x_n) \leq s^n g(x)$. По-нататък имаме

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + g(x_0) + g(x_1) + \dots + g(x_{n-1}) \leq x + g(x) = sg(x) + \dots + s^{n-1}g(x) = \\ &= x + (1 + s + \dots + s^{n-1})g(x) < x + \frac{1}{1-s}g(x), \end{aligned}$$

откъдето $g(x_n) > g\left(x + \frac{1}{1-s}g(x)\right)$ и следователно $g\left(x + \frac{1}{1-s}g(x)\right) < s^n g(x)$ за всяко естествено число n . Последното е очевидно невъзможно, защото, от една страна, $g\left(x + \frac{1}{1-s}g(x)\right) > 0$, а от друга, $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = 0$.

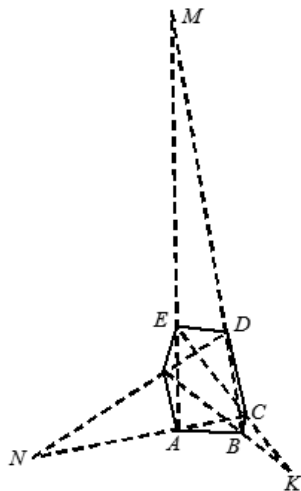
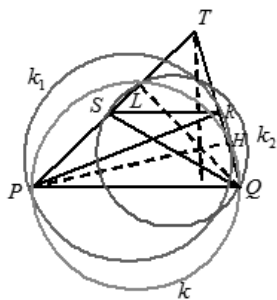
Задача 5. Даден е изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, противоположните страни на който са две по две успоредни. Правите BD и AE , AC и DF , CE и BF се пресичат съответно в точките M , N и K . Да се докаже, че перпендикулярите от M , N и K съответно към правите AB , CD и EF се пресичат в една точка.

(Наири Седракян, Армения)

Решение

Лема. Нека T е пресечната точка на бедрата PS и QR на трапеца $PQRS$. Да се докаже, че височината в $\triangle PQT$ от върха T лежи на радикалната ос на окръжностите с диаметри PR и QS , т.е. с диаметри – диагоналите на трапеца.

Доказателство. Нека k_1 и k_2 са окръжностите с диаметри PR и QS , а k е окръжността с диаметър PQ . С PH означаваме общата хорда на k_1 и k . Тъй като $\angle PHR = \angle PHQ = 90^\circ$ (опират се на диаметри в съответните окръжности), точката H лежи на QR и PH е височина в $\triangle PQT$. Аналогично, ако QL е общата хорда на k_2 и k , то $\angle QLS = \angle QLP = 90^\circ$ (опират се на диаметри в съответните окръжности) и заключаваме, че точката L лежи на PT и QL е височина в $\triangle PQT$. Пресечната точка на PH и QL е ортоцентър на $\triangle PQT$, който има равни степени относно k_1 и k_2 , поради което лежи на радикалната им ос. По същия начин следва, че на тази радикална ос лежи и ортоцентърът на $\triangle SRT$. Тъй като перпендикулярната права през T към PQ минава и през двата ортоцентъра, то тази права е радикалната ос на k_1 и k_2 .



В решението на задачата прилагаме лемата трикратно за трапеците $ABDE$, $CDFA$ и $EFBC$. Перпендикулярите от M , N и K съответно към правите AB , CD и EF са радикални оси последователно на окръжностите с диаметри BE и AD , AD и CF , CF и BE . Следователно тези три перпендикуляра са пресичат в една точка, която е радикалният център на трите окръжности.

Задача 6. Едно естествено число q се нарича *удобен знаменател* за реалното число α , ако $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{10q}$ за някое цяло число p . Да се докаже, че ако за две ирационални числа α и β множествата на удобните им знаменатели съвпадат, то $\alpha + \beta$ или $\alpha - \beta$ е цяло число.

(Александър Голованов, Русия)

Решение. Нека $q_1 < q_2 < \dots$ са всички удобни знаменатели за ирационалните числа α и β . Ясно е, че всяко q_i съществува единствено p_i , за което $|q_i \alpha - p_i| < \frac{1}{10}$. Ще наречем това p_i *удобен числител*, съответстващ на q_i . Първоначално ще разгледаме случая $0 < \alpha, \beta < \frac{1}{10}$. Нека $p_1 < p_2 < \dots$ са удобните числители за α , а $p'_1 < p'_2 < \dots$ са удобните числители за β . По индукция ще докажем, че $p_i = p'_i$ за всяко естествено i . Очевидно $p_1 = p'_1 = 0$. Нека $p_k = p'_k$. Ако $q_{k+1} = q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k$ (защото $|p_k - q_k \alpha| < \frac{1}{10}$ и $|p_{k+1} - q_{k+1} \alpha| = |p_{k+1} - q_k \alpha| < \frac{1}{10}$) и аналогично $p'_{k+1} = p'_k$. Оттук $p_{k+1} = p'_{k+1}$. В случай, че $q_{k+1} > q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k + 1$. Наистина, в растящата аритметична прогресия с първи член $(q_k + 1)\alpha$ и разлика $\alpha < \frac{1}{10}$ първият член е по-малък от $(p_k + 1) - \frac{1}{10}$ и следователно това е така и за членовете, които отстоят от $p_k + 1$ на разстояние, по-малко от $\frac{1}{10}$. Аналогично $p'_{k+1} = p'_k + 1$ и индукцията е завършена. Тъй като $|q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{10}$ и $|q_k \beta - p_k| < \frac{1}{10}$, заключаваме, че $|q_k(\alpha - \beta)| < \frac{1}{5}$ за всяко k и следователно $\alpha = \beta$.

В случая, когато α и β са произволни, разглеждаме числата $q_1 \alpha$ и $q_1 \beta$. При необходимост можем да променим знаците, поради което можем да считаме, че $0 < \{q_1 \alpha\}, \{q_1 \beta\} < \frac{1}{10}$. За числата $\{q_1 \alpha\}$ и $\{q_1 \beta\}$ е изпълнено усло-

вието на задачата и следователно $\{q_1\alpha\} = \{q_1\beta\}$. Това означава, че числото $q_1\alpha - q_1\beta = r$ е цяло и следователно $\alpha - \beta = \frac{r}{q_1}$ е рационално число. Да допуснем, че тази разлика не е цяло число. Тогава можем да умножим числото $\frac{r}{q_1}$ с подходящо естествено число k и да си подсигурием дробната част да се намира в интервала $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Сега ще използваме, че за произволни $0 \leq u < v \leq 1$ и произволно рационално число θ може да се намери естествено число n , така че $\{n\theta\} \in (u; v)$. В частност, съществува n , за което $\{nq_1\alpha\}$ е заключено между $\left\{\frac{-kr}{q_1} - \frac{1}{10}\right\}$ и $\left\{\frac{-kr}{q_1} + \frac{1}{10}\right\}$. Тогава числото $(nq_1 + k)\alpha$ се намира от най-близкото цяло число на разстояние, по-малко от $\frac{1}{10}$. Но тогава и $(nq_1 + k)\beta$ ще се намира от най-близкото цяло число на разстояние, по-малко от $\frac{1}{10}$, което противоречи на условието $\{(nq_1 + k)\alpha - (nq_1 + k)\beta\} = \left\{nr + \frac{kr}{q_1}\right\} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

INTERNATIONAL ZHAUTIKOV OLYMPIAD

Abstract. The problems of the International Zhautikov Olympiad in 2016 and their solutions are considered. Methodological solutions are proposed.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
31, Sajko Saev Str.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg