

# МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА РЕАЛНИ ПРОЦЕСИ И ПРИЛОЖЕНИЯ НА СИСТЕМИТЕ ЗА КОМПЮТЪРНА АЛГЕБРА ЗА ТЯХНОТО ИЗСЛЕДВАНЕ

Тихомир Иванов

Институт по математика и информатика – БАН

**Резюме.** В настоящата статия са представени два приложни проблема от областта на екологията и от компютърната графика. Целта е да бъдат дадени някои примери, позволяващи да се демонстрират приложения на математиката за моделиране на реални процеси. Показано е как системите за компютърна алгебра могат да бъдат използвани като много удобно средство за визуализация и за технически пресмятания, поради което би било полезно да намерят своето място в гимназиалното обучение по математика. Подчертан е обаче фактът, че математическият софтуер не бива да се използва като заместител, а като допълнение към „класическата“ подготовка по математика.

*Keywords:* mathematical modeling, computer algebra systems, education

## 1. Въведение

Живеем във време, когато технологиите са се превърнали в неделима част от живота. Смартфони, таблети, компютри са част от нашето ежедневие – начин за отмора, забавление, контакти с близки и приятели, но и за бърз достъп до информация и личностно обогатяване. В особено голяма степен тази връзка с технологиите се отнася за младите хора и в частност – за учениците. Ето защо внедряването им в образованието по математика (и не само) би дало възможност за един нов, по-близък до учениците начин на възприемане на застъпените теоретични (и често от тяхна гледна точка твърде абстрактни) понятия и обекти. Това всъщност е само едната страна на въпроса. Системите за компютърна алгебра (СКА), за които се говори в настоящата статия, са едно незаменимо средство за всеки професионален математик и за всеки човек, който използва математиката в своята дейност (инженери, физици, икономисти и т.н.). Както е добре известно, процесите от заобикалящия ни свят се описват на езика на математиката. За тяхното изследване все по-широко разпространение намират т. нар. числени симулации. Изчислителните възможности на съвременната техника дават възможност да се отговори на въпроси, които доскоро са изглеждали необозрими. Ето защо уменията за работа с математически

софтуер следва да се разглеждат като важна част от подготовката по математика и от математическата култура на един съвременен млад човек.

В настоящата статия се разглеждат конкретни примери на задачи за моделиране, чието математическо изследване може да бъде възприето от учениците в гимназиалния етап на образование. Основна цел е да се покаже как СКА могат да бъдат използвани за изследване и визуализиране на резултатите. В същото време тези примери отразяват дълбокото убеждение на автора, че при изучаването на математика обектите, с които тя борава, трябва да се разглеждат не просто като нещо абстрактно, но и да се прави връзка с реални процеси, които могат да бъдат описани чрез съответните математически обекти. Разгледаните примерни модели биха могли да послужат за провеждането на учебен час, в който да се покажат приложения на математиката. Друга идея е в часовете, когато се изучават например числови редици, функции и т.н., да се приведе подходящ пример от посочените, който да послужи като обосновка защо е важно изучаването на съответния математически обект.

Преди да започнем същинската част от изложението, ще отбележим, че ще използваме основите на работата със системата Wolfram Mathematica, които бяха представени в сп. „Математика и информатика“, бр. 4, 2014 г.

## **2. Два математически модела от областта на екологията (популационна динамика)**

*Теми: Числови редици, Геометрична прогресия, Графика на функция*

Най-общо казано, популационната динамика е дял от биологията, който се занимава с изучаване на развитието във времето на една популация (например численост, структура и др.), както и влиянието върху нея на жизнената среда, в която тя е поставена, и на взаимоотношенията ѝ с други популации.

Нашата цел ще бъде да опишем как се изменя числеността на дадена популация във времето – важен въпрос в консервационната биология (за опазване на видовото разнообразие), в биотехнологиите (при отглеждането на микроорганизми за индустриални цели), при контрола на вредители и др. За целта ще приведем два модела, като ще коментираме накратко някои изводи, които можем да направим от тях, и ще обясним кога те са приложими. Важно е да се отбележи, че всеки математически модел е всъщност една абстракция на реалния процес – той се основава на определени предположения (допускания), които имат за цел да опростят реалната ситуация достатъчно, за да може математическият модел да се поддава на изследване. Отражават се само най-основните, най-съществените характеристики на разглеждания процес. Последното, разбира се, е твърде субективно и ето защо много често съществуват различни математически модели, които описват един и същи процес. Важно е да се имат предвид техните недостатъци и да е ясно в кои ситуации те са приложими.

## 2.1. Дискретен модел на експоненциален растеж

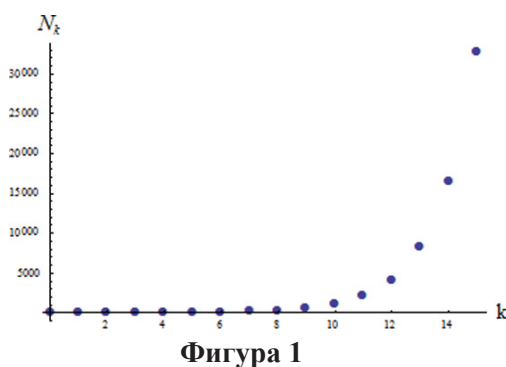
Да приемем за простота, че разглеждаме популация, съставена от едноклетъчни микроорганизми. Нека с  $N_0, N_1, N_2, \dots$  означим броя организми в популацията съответно в моментите от време  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Нека във всеки следващ момент от време допуснем, че индивидите от популацията се възпроизвеждат и от всеки индивид се раждат средно по  $r$  нови индивида. Ако всяка клетка се дели на две например, ще е в сила  $r = 1$ , тъй като се появява една нова клетка.  $r$  ще наричаме коефициент на естествен прираст и ще наложим условието този коефициент да бъде положително число. Тогава в момента от време  $t = k + 1$  числеността на популацията, която в предходния момент от време е била  $N_k$ , ще се увеличи с  $rN_k$  индивида (от всеки индивид се раждат по  $r$  нови). Следователно е в сила зависимостта

$$N_{k+1} = N_k + rN_k. \quad (1)$$

Това е т.нар. дискретен модел на експоненциален растеж (Brauer & Castillo-Chavez, 2010), (Murray, 2002). Да разгледаме конкретен пример – нека в началния момент от време имаме  $N_0 = 2$  индивида (например 2 клетки) и нека  $r = 1$ . Тогава, използвайки зависимостта (1), можем да намерим числеността на популацията в следващите моменти от време. Нека намерим  $N_k$  за  $k = 1, 2, \dots, 15$ . За целта ще построим един прост итеративен процес, като пресмятанията ще организираме в Mathematica:

```
In[1]= n0=1;
      r=1;
      Do[nk+1=nk+rnk,{k,0,14}];
Остава да визуализираме резултатите, за да видим каква информация ни носят те:
In[4]= pts=Table[{k,nk},{k,0,15};
      ListPlot[pts, PlotRange -> All]
```

Получаваме следната фигура (фиг. 1):

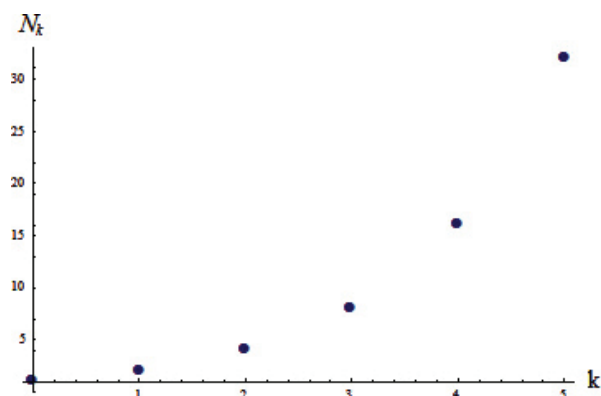


Виждаме, че числеността на популацията расте много бързо. От 2 клетки в началото, само след 15 деления получаваме повече от 30 000! Всъщност видът на

горната графика ни показва и защо говорим за модел на експоненциален растеж – точките лежат на графиката на експоненциална функция.

**Задача.** Използвайки вече направените пресмятания, изследвайте началната фаза на процеса. За целта изобразете числеността на популацията за  $t = 0, 1, \dots, 5$ .

Резултатът от горната задача би трябвало да изглежда така (фиг. 2):



Фигура 2

Ще се върнем на тази графика малко по-късно.

Нека отбележим, че редицата  $\{N_k\}$  е всъщност една геометрична прогресия. Това се вижда много ясно, ако запишем рекурентната зависимост (1) във вида

$$N_{k+1} = (1+r)N_k.$$

Всеки следващ член на редицата се получава от предходния чрез умножение с  $1+r$ . Тогава общия член на редицата можем да запишем във вида  $N_k = N_0(1+r)^{k-1}$ . Имайки предвид, че  $r > 0$ , е ясно, че редицата е неограничена. С други думи, теоретично популацията може да расте неограничено много. Ще коментираме този извод след малко.

Важно е да обърнем внимание къде използвахме СКА Mathematica при изследването на математическия модел. Използвахме я при извършването на техническите пресмятания (намирането на членовете на редицата по рекурентната формула (1)) и при визуализирането на резултатите. Интерпретирането на резултатите и поставянето на математическите задачи обаче трябва да направим ние!

## 2.2. Дискретен логистичен модел

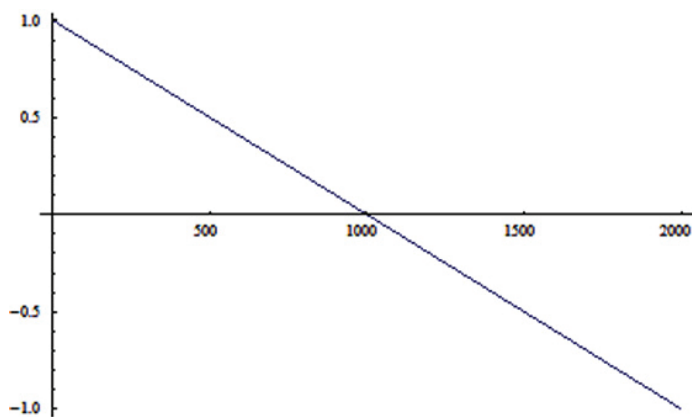
Разгледаният по-горе модел има един много сериозен недостатък – както видяхме, ако растежът на популацията действително следва този модел, тя ще расте неограничено. Това, разбира се, е практически невъзможно. Жизнената среда има определени ресурси като храна, пространство, кислород и други и ето защо може да

поддържа определена максимална численост на популацията. Нека я означим с  $K$ . Причината за нереалните изводи, които направихме от предходния модел, разбира се, не е неправилното му математическо изследване. Тя се крие в допускането, на което се основава моделът – че коефициентът на естествен прираст  $r$  е константа. Експериментите (и интуицията) показват, че колкото повече ресурсите се изчерпват (т.е. числеността на популацията се доближава до  $K$ ), толкова коефициентът на естествен прираст трябва да намалява (т.е. растежът на популацията да се забавя). Ако числеността е по-голяма от  $K$ , той трябва да е отрицателен, т.е. популацията да намалява. Тези идеи могат да се опишат, ако за коефициента на естествен прираст вземем израза  $r\left(1 - \frac{N_k}{K}\right)$ . Нека илюстрираме този факт, като разгледаме коефициента на естествен прираст като функция на  $N_k$ :

$$R(N_k) = r\left(1 - \frac{N_k}{K}\right).$$

Ще построим графиката на тази функция, като за стойностите на параметрите ще вземем например  $r = 1$ ,  $K = 1000$  (фиг. 3)

```
In[6]=  r=1;
        k=1000;
        Plot[r(1 -  $\frac{n_k}{k}$ ), {n_k, 0, 2000}]
```



Фигура 3

Разбира се, както се вижда от графиката, коефициентът на естествен прираст, който дефинирахме, е една линейна функция на  $N_k$ . Тя е положителна, когато  $N_k < K$ , отрицателна, когато  $N_k > K$ , и равна на 0, когато е достигната точно максималната численост, която средата може да поддържа (с други думи, тогава популацията достига равновесно състояние и не променя числеността си).

И така, използвайки коефициента на естествен прираст  $R(N_k)$ , получаваме следния модел:

$$N_{k+1} = N_k + r \left( 1 - \frac{N_k}{K} \right) N_k,$$

който е известен в литературата като дискретен логистичен модел (Brauer & Castillo-Chavez, 2010), (Murray, 2002). Експериментите показват, че той доста точно описва растежа на една популация в редица случаи.

**Задача.** Помислете какъв е биологичният смисъл на параметъра  $r$  в така разгледания модел.

Ние няма да се спираме тук на въпроса как изглежда общият член на редицата  $\{N_k\}$ . Ще направим някои числени експерименти с цел да демонстрираме какво развитие на процеса предвижда посоченият модел. Нека отново  $N_0 = 2$ ,  $r = 1$ , а за максималната численост на популацията нека изберем  $K = 1000$ . Подхождаме аналогично на модела на експоненциален растеж:

$n_0=1$ ;

$r=1$ ;

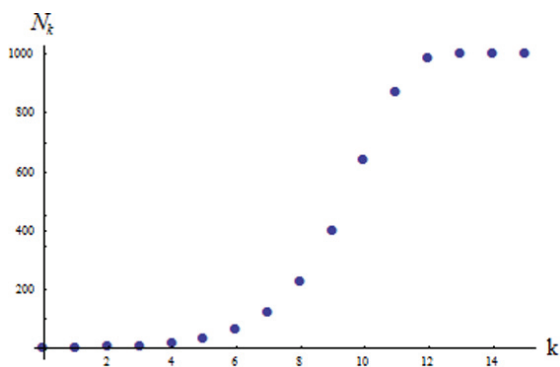
$k=1000$ ;

$Do[n_{s+1} = n_s + r \left( 1 - \frac{n_s}{k} \right) n_s, \{s, 0, 14\}]$

$pts = Table[\{s, n_s\}, \{s, 0, 15\}]$ ;

$ListPlot[pts]$

Получаваме следната фигура (фиг.4):

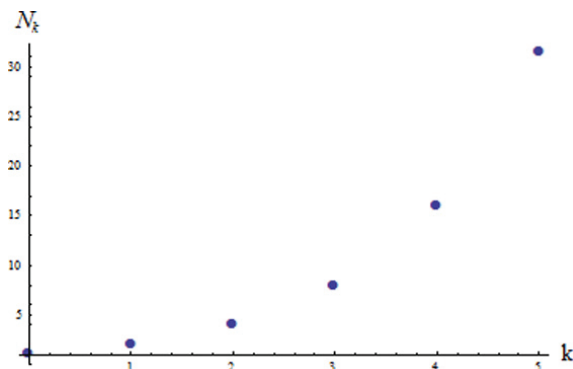


Фигура 4

Наблюдават се три фази на растеж – в началото популацията расте сравнително бавно. От  $t = 6$  до  $t = 12$  има период на бързо нарастване на числеността на популацията и накрая тя се установява около численост от 1000 индивида.

Нека сега разгледаме началната фаза на процеса – първите пет деления – и да

я сравним с аналогичната ситуация в модела на експоненциален растеж (фиг. 5):



Фигура 5

Забелязваме, че двете са почти идентични. Причината за това е, че когато числеността на популацията е малка в сравнение с  $K$ , е в сила  $r\left(1 - \frac{N_k}{K}\right) \approx r$ .

Вземайки предвид този факт, става ясно, че моделът на експоненциален растеж е в сила тогава, когато в жизнената среда има достатъчно ресурси, т.е. числеността на популацията е далеч от максимално поддържаната от средата.

**Задача.** Направете аналогични числени експерименти, като за стойността на  $r$  вземете 2. Какво наблюдавате, когато числеността на популацията „се доближи“ до максимално поддържаната от жизнената среда численост  $K$ ? Дайте обяснение.

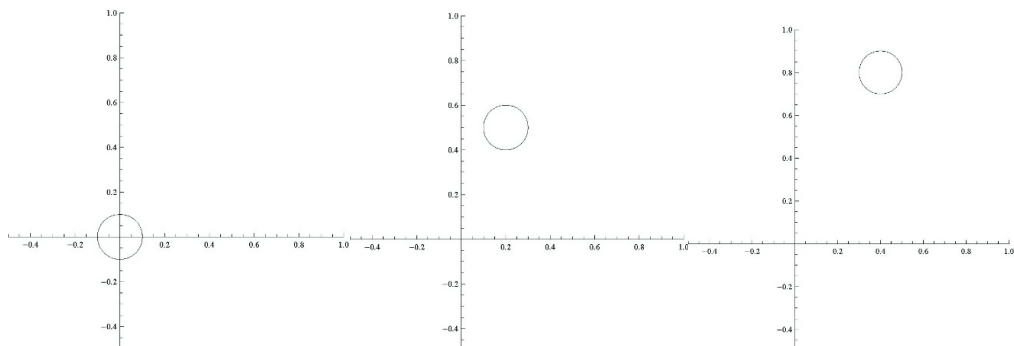
**Задача.** Направете експеримент с начална численост  $N_0 = 2500$  (по-голяма от  $K$ ). Какво развитие на процеса очаквате? Сравнете предположението си с резултатите от числения експеримент.

### 3. Едно приложение на математиката в компютърната графика

*Теми: Декартова координатна система, Квадратна функция, Графика на функция, Системи линейни уравнения*

Компютърната графика е изцяло базирана на математически модели. Екранът на монитора може да се разглежда като една координатна система, като всеки пиксел от него отговаря на точка с целочислени координати. Нека си поставим следната задача – имаме няколко сцени, представящи положението на тяло в пространството (в случая – окръжност, чийто център има известни координати) (фиг. 6):

Искаме да направим анимация на базата на тези сцени, т.е. тялото да се движи плавно, минавайки през зададените положения.



Фигура 6

Да формулираме математически така дефинираната задача. Имаме три точки от равнината с координати  $(0, 0)$ ,  $(0.2, 0.5)$ ,  $(0.4, 0.8)$  – точките, в които се намира центърът на окръжността на всяка от фигурите. Търсим функция, чиято графика минава през тези три точки – траекторията, която описва центърът. Без да знаем нищо повече за траекторията, сме свободни да изберем подходяща по вид функция, която да изпълнява това условие. Нека се опитаме да намерим параболола, която минава през трите точки. С други думи, търсим полином от втора степен

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

чиято графика минава през точките, т.е. са изпълнени условията

$$p(0) = 0, p(0.2) = 0.5, p(0.4) = 0.8. \quad (2)$$

Неизвестните в тази линейна алгебрична система са коефициентите на търсения полином. Имайки предвид системата, която получихме, става ясно защо търсим полином именно от втора степен – трите условия ни позволяват да определим еднозначно точно три коефициента. Решаваме системата (2) и намираме искания полином, като техническата част оставяме на СКА Mathematica:

```
In[9]= Solve [{c=0, a*0.2^2+b*0.2+c=0.5, a*0.4^2+b*0.4+c=0.8}, {a,b,c}]
Out[9]= {a -> -2.5, b -> 3., c -> 0.}
```

Получихме  $p(x) = -2.5x^2 + 3x$ . Остава да направим самата анимация, като последователно изобразяваме през малки интервали от време окръжност с център върху така определената параболола.

```
In[10]= Animate[Graphics[Circle[{x, -2.5 x^2 + 3x}, 0.1], Axes → True,
      AxesOrigin→{0,0}, PlotRange→{{-0.5,1},{-0.5,1}}, {x,0,0.4,0.01}]
```

Резултатът може да бъде видян в приложения файл `../animation.avi`, където е построена и графиката на  $p(x)$  с цел по-ясно да се види траекторията, която описва центърът на окръжността.

**Задача.** Нека разгледаме аналогична на решената по-горе задача, но да поискаме центърът на окръжността да минава през точки с координати  $(0, 0)$ ,  $(0.2, 0.5)$ ,  $(0.4, 0.8)$ ,  $(0.2, 0.2)$ ,  $(0, 0.3)$ .

а. Изобразете точките с помощта на *ListPlot*.

б. Помислете как може да се опише траекторията на центъра на окръжността в този случай.

с. Визуализирайте траекторията на центъра на окръжността с помощта на командата *Plot*.

#### 4. Заключение

В настоящата статия и последващи работи авторът има за цел да създаде набор от примери, който да помогне на учителите да внедрят в своята практика математическото моделиране и работата с математически софтуер като важна част от обучението по математика. Тези примери биха могли да дадат отговор на често задавания от учениците въпрос „Защо учим математика?“ и да помогнат за асоциирането на абстрактния свят на математиката и обектите, с които тя борави, от една страна, и процесите от заобикалящия ни свят, от друга. Също така те могат да дадат на преподавателите идеи за едно по-различно изложение на изучаваната теория, което да включва и съвременните технологии и да бъде по-близко до интересите на учениците.

Разгледахме няколко кратки примера, с които показахме някои основни възможности на системите за компютърна алгебра. Показахме, че от една страна, те са удобно средство за визуализация и числови пресмятания, а от друга – могат да ни спестят техническа работа, като по този начин можем да се съсредоточим върху идеите, върху „креативната“ част от решението на една задача или моделирането на един процес. Разбира се, последното не бива да ни води до погрешния извод, че СКА могат да заменят изучаването на голяма част от учебния материал по математика. Не бива да се забравя, че ние трябва да знаем какво искаме програмата ни да реши и да можем да интерпретираме резултатите. Софтуерът за научни изчисления е наистина едно много полезно средство, което обаче следва да се използва с разбиране и да се разглежда като допълнение към набора от математически инструменти, с които разполагаме.

## ЛИТЕРАТУРА

- F. Brauer & C. Castillo-Chavez (2010). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer.  
J. D. Murray (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction*. Springer.

## REFERENCES

- F. Brauer & C. Castillo-Chavez (2010). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer.  
J. D. Murray (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction*. Springer.

## MATHEMATICAL MODELS OF REAL PROCESSES AND APPLICATIONS OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS TO THEIR STUDY

**Abstract.** In this paper, we present two applied problems—from the fields of ecology and computer graphics. Our goal is to give some examples that can be used to show applications of mathematics for modeling real processes. Also, we show that computer algebra systems can be used as an invaluable tool for visualization and for technical calculations and, thus, they should find their place in high school education in mathematics. We emphasize the fact that mathematical software, however, should not be treated as a substitution, but as an addition to “classical” math training.

✉ **Mr. Tihomir Ivanov**

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: tihomir\_ivanov@ymail.com