

ЛОГАРИТМИЧНИ И ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНИ УРАВНЕНИЯ (II ЧАСТ)

Диана Стефанова

Резюме. Статията е продължение на статията от същия автор в брой 1/2017 г. на сп. „Математика и информатика“, посветена на трансцендентни уравнения, като сега вместо комбинации от показателни и тригонометрични функции се разглеждат комбинации от логаритмични и тригонометрични функции. Предложени са подходи за решаването им.

Keywords: transcendental equations; logarithmic equations; trigonometric equations; problem solving

В настоящата статия прилагаме идеята за решаване на комбинации от показателни и тригонометрични функции в основата на показателно уравнение от (Stefanova, 2017) при решаване на логаритмични уравнения с основа или аргумент тригонометрични функции. Задачите, които предлагаме, са подходящи за ученици, проявяващи интерес към математиката, и спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За да се решат тези задачи, е необходимо много добро владение на различните групи логаритмични и тригонометрични уравнения. Освен това трябва и знания за решаване на тригонометрични неравенства. Целта е обвързване на познанията за логаритмични и тригонометрични функции със съответните групи уравнения. За да открият различните връзки, учениците упражняват методите на научно изследване, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. Всичко това е необходимо на творческата личност в съвременните условия, когато трябва умело да се използват знанията от една област на науката в друга.

За успешното формиране на умения за решаване на предложените уравнения сме обособили няколко групи.

I група: логаритмични уравнения с основа константа и аргумент тригонометрична функция, съдържаща неизвестно.

Задача 1. Да се реши уравнението $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2 (1 - \cos 2x) = 2$.

Решение. За да се реши даденото уравнение, е необходимо да се определи множеството от допустими стойности, което се свежда до съставяне на система от тригонометрични неравенства и решаването им. За да съставим

самата система, използваме необходимото условие за аргумента на логаритмичната функция да е положителен, а основата да е положителна и различна от единица. Тогава множеството от допустими стойности на даденото уравнение се състои от всички x , за които едновременно са изпълнени не-

равенствата $\sin x > 0$ и $1 - \cos 2x > 0$, т.е. имаме системата
$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ 1 - \cos 2x > 0 \end{cases}$$
. След

като решим тази система неравенства, получаваме, че са допустими всички $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Като приложим формулата за понижаване степен-та и основните теореми за логаритмуване, преобразуваме даденото уравне-ние в еквивалентно: $3(\log_2 \sin x)^2 + 2\log_2 \sin x = 1$. Полагаме $z = \log_2 \sin x$ и получаваме квадратното уравнение $3z^2 + 2z - 1 = 0$, с корени $z_1 = -1$ и $z_2 = \frac{2}{3}$. Оттук имаме $\log_2 \sin x = -1$. Тогава, разширявайки множеството

от допустими стойности, получаваме уравнението $\sin x = \frac{1}{2}$, чиито корени

са $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Лесно се проверява, че всичките x от тази съв-

купност принадлежат на множеството от допустими стойности на даденото

уравнение, следователно те са неговите решения. От $\log_2 \sin x = \frac{2}{3}$ имаме, че

$\sin x = \sqrt[3]{4}$, но това тригонометрично уравнение няма решение.

Задача 2. Да се реши уравнението $\log_2(1 + 4\sin x \cos x) + 3\log_{\frac{3}{8}}\left(\frac{3}{2} - 2\cos^2 x\right) = 1$.

Решение. Използваме свойствата на логаритми и тригономет-рични изрази, като преобразуваме даденото уравнение

$$\log_2(1 + 4\sin x \cos x) - \log_2\left(\frac{3}{2} - 2\cos^2 x\right) = 1 \Leftrightarrow \log_2(1 + 2\sin 2x) = \log_2(3 - 4\cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\log_2(1 + 2\sin 2x) = \log_2(1 - 2\cos 2x), \quad \text{откъдето записваме система-}$$

$$\begin{cases} 1 + 2\sin 2x = 1 - 2\cos 2x \\ 1 + 2\sin 2x > 0 \end{cases}. \quad \text{От уравнението на системата намираме, че}$$

$$\lg 2x = -1, \quad \text{т.е. } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Получените стойности за } x \text{ замества-}$$

$$\text{ме в } 1 + 2\sin 2x \text{ и получаваме } 1 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2}, & \text{ако } k \text{ е четно} \\ 1 + \sqrt{2}, & \text{ако } k \text{ е нечетно} \end{cases}. \quad \text{Сле-}$$

$$\text{дователно } k = 2l + 1, \text{ където } l \text{ е цяло число, а } x = -\frac{\pi}{8} + (2l + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} + l\pi.$$

Задача 3. Да се реши уравнението

$$\log_2 \left(\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) + \log_{\frac{1}{2}} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Решение. Преобразуваме даденото уравнение до

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) - \log_2 \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) &= 0 \quad \Leftrightarrow \log_2 \frac{\cos 2x + \cos \frac{x}{2}}{\sin x + \cos \frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow_2 \frac{\cos 2x + \cos \frac{x}{2}}{\sin x + \cos \frac{x}{2}} &= 1 \Leftrightarrow \cos 2x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Полагаме $y = \sin x$ и получаваме квадратното уравнение $2y^2 + y - 1 = 0$ с корени $y_1 = -1$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. От $\sin x = \frac{1}{2}$ намираме, че $x_1 = (12k+1)\frac{\pi}{6}; x_2 = (12k+5)\frac{\pi}{6}$, където $k \in Z$. От $\sin x = -1$ намираме, че $x_3 = (4k-1)\frac{\pi}{4}; x_4 = (4k+3)\frac{\pi}{2}$, където $k \in Z$.

Задача 4. Да се реши уравнението $\left| \log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x) \right| + \left| \log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x) \right| = 1$.

Решение. Ако $\sin 2x \geq 0$, то $1 + \sin 2x \geq 1$. Но тогава $1 - \sin 2x \leq 1$ и следователно даденото уравнение е равносилно на $-\log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x) = 1$,

откъдето $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{3}$, т.е. $\sin 2x = \frac{1}{2}$ и $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$. Аналогично, ако $\sin 2x < 0$ то $1 + \sin 2x < 1$. Оттук $1 - \sin 2x > 1$ и следователно даденото уравнение приема вида $\log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x) - \log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x) = 1$. Получаваме

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$ и $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$. Окончателно решенията на даденото уравнение са $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$.

Задача 5. Да се реши уравнението $\log_2(5 + 3 \cos 4x) = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Решение. От $5 + 3 \cos 4x \geq 2$ ($\cos 4x \geq -1$) следва, че $\log_2(5 + 3 \cos 4x) \geq 1$. Но дясната страна на даденото уравнение не надминава 1, т.е. $\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$. Следователно, за да има решение даденото уравнение, то трябва да е равно-

$$\text{силно на системата } \begin{cases} \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \\ \log_2(5 + 3\cos 4x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}, \text{ където}$$

m и n са цели числа, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Да се реши уравнението $2\log_3 \cotg x = \log_2 \cos x$.

Решение. Множеството от допустими стойности на уравнението е $x \in (2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$. Полагаме $y = \log_2 \cos x$ и получаваме системата

$$\begin{cases} \log_2 \cos x = y \\ \log_3 \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = y \end{cases}, \text{ която е равносилна с } \begin{cases} \cos x = 2^y \\ \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = 3^y. \end{cases}$$

След като заместим $\cos x$ от първото уравнение във второто, получаваме показателното уравнение $\frac{4^y}{1 - 4^y} = 3^y$ с корен $y = -1$. От $\log_2 \cos x = -1$ намираме, че $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. Да се реши уравнението $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1$.

Решение. Непосредствено се проверява, че $4x - x^2 - 3 \leq 1$ за всяко реално число x . Освен това от $1 \leq \cos^2 \pi x + 1 \leq 2$ следва, че $0 \leq \log_2(\cos^2 \pi x + 1) \leq 1$.

Тогава даденото уравнение е еквивалентно със системата $\begin{cases} 4x - x^2 - 3 = 1 \\ \log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1 \end{cases}$, която има решение $x = 2$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на параметъра a , при които уравненията

$$a(2a - 1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0 \text{ и } \log_{\frac{1}{2}}(3\lg x - 1) - \log_2(3\lg x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \lg x) = 1$$

са еквивалентни.

Решение. Полагаме $y = \lg x$ във второто уравнение и решаваме последното за $y \in (\frac{1}{3}; 5)$. Получаваме уравнението $\frac{(5-y)^2}{9y^2 - 1} = 2$ с корени $y_1 = 1$ и $y_2 = -\frac{27}{17}$. От така получените стойности само $y = 1$ е решение, т.е. второто уравнение е еквивалентно на $\lg x = 1$. Записваме първото уравнение в хомогенен вид

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

откъдето $ay^3 + 2a^2y - 3 = 0$ от $\operatorname{tg} x = y$. Понеже $y = 1$ е корен на второто, то $2a^2 + a - 3 = 0$, т.е. $a = 1$ или $a = -\frac{3}{2}$. Нека $a = 1$, тогава $y^3 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(y^2 + y + 3) = 0$ и получаваме единствено решение $y = 1$. Следователно $a = 1$ е решение на задачата. Нека $a = -\frac{3}{2}$, тогава $y^3 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow (y-1)^2(y+2) = 0$, т.е. $y = 1$ и $y = -2$ са корените при $a = -\frac{3}{2}$ и тази стойност на a не е решение на задачата.

Задача 9. Да се реши уравнението $(\lg \sin x)^2 - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0$.

Решение. Полагаме $z = \lg \sin x$ и отчитаме, че при всички допустими значения на x имаме неравенството $\lg \sin x \leq 0$. Така получаваме системата

$$\begin{cases} z^2 - 2az - a^2 + 2 = 0 \\ z \leq 0 \end{cases}.$$

Да разгледаме $f(z) = z^2 - 2az - a^2 + 2$. Имаме

$$A = 1, \quad z_1 = a, \quad D = 2(a^2 - 1), \quad f(z) = 0. \quad \text{Тогава} \quad \begin{cases} D \geq 0 \\ z_0 < 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}. \quad \text{Но } f(0) \leq 0 \text{ и}$$

$$a \geq 1, a \leq -1$$

$$a < 0, \quad \text{откъдето намираме, че } -\sqrt{2} \leq a \leq -1 \text{ и } z_{1/2} = a \pm \sqrt{2(a^2 - 1)}.$$

$$-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

При $a \leq -\sqrt{2}$ и $a \geq \sqrt{2}$ следва, че $z_1 = a - \sqrt{2(a^2 - 1)}$ и решаваме уравнението $z = \lg \sin x$. При $a < -\sqrt{2}$ имаме $\sin x = 10^{a - \sqrt{2(a^2 - 1)}}$, при $-\sqrt{2} \leq a \leq -1$ имаме $\sin x = 10^{a \pm \sqrt{2(a^2 - 1)}}$, при $-1 < a < \sqrt{2}$ няма решение, при $a \geq \sqrt{2}$ имаме $\sin x = 10^{a - \sqrt{2(a^2 - 1)}}$, където $n \in \mathbb{Z}$.

II група: логаритмични уравнения с основа, съдържаща неизвестно, и аргумент тригонометрична функция спрямо неизвестното.

Задача 10. Да се реши уравнението

$$\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\sin x + \sin 3x) = \log_{\frac{-x^2-6x}{10}} \sin 2x.$$

Решение. Множеството от допустими стойности на уравнението се състои от всички x , за които едновременно са изпълнени неравенствата

$\sin x + \sin 3x > 0$, $\sin 2x > 0$ и $\sin x + \sin 3x > 0$, $\sin 2x > 0$ Разширявайки множеството от допустими стойности, записваме даденото уравнение във вида $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$ или $2\sin 2x \cos x = \sin 2x$. От условията (1) следва, че $\sin 2x \neq 0$ и затова можем да разделим двете страни на последното уравнение на $\sin 2x$. Тогава получаваме уравнението $\cos x = \frac{1}{2}$, чиито корени са $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi$; $m, n \in \mathbb{Z}$. От получените корени трябва да отделим придобитите, т.е. за всяка от съвкупностите x_1, x_2 ще намерим стойностите на m и n , при които корените удовлетворяват условията (1). Разглеждаме първата съвкупност x_1 . Първо ще отделим корените, за които е изпълнено третото от условията (1), т.е. $x \in (-6; 0)$ или $-6 < \frac{\pi}{3} + 2n\pi < 0$ (2). Трябва да имаме предвид, че n приема само цели стойности. За всяка неотрицателна стойност на n изразът е положителен и следователно нито едно $n \geq 0$ не удовлетворява (2). За всяко цяло $n \leq -2$ получаваме $\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leq \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} < -6$, следователно и тези стойности на n не удовлетворяват (2). Остава да проверим само една стойност $n = -1$. Оттук следва, че $n = -1$ удовлетворява неравенството (2). От съвкупността x_1 само $x = -\frac{5\pi}{3}$ (при $n = -1$) удовлетворява третото от условията (1). С проверка установяваме, че тази стойност на x удовлетворява и останалите условия на (1). Следователно $x = -\frac{5\pi}{3}$ е корен на даденото уравнение. С проверка получаваме, че нито една стойност на x от съвкупността x_2 не удовлетворява второто от условията (1), следователно съвкупността x_2 не съдържа корените на даденото уравнение.

III група: логаритмични уравнения с основа и аргумент тригонометрична функция, съдържаща неизвестно.

Задача 11. Да се реши уравнението $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2$.

Решение. При определяне на множеството от допустими стойности на уравнението трябва да имаме предвид, че изразът в основата на логаритъма трябва да е положителен и да не е равен на 1. Множеството от допустими стойности се определя от системата неравенства $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\cos x \neq 1$, откъдето $x \in (2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. При решаване на уравнения, аналогични на даденото, най-сигурният начин да избегнем грешки, свързани

с разширяването на множеството от допустими стойности, е преминаване към друга основа. Самата формула за смяна на основата $\log_m n = \frac{\log_a n}{\log_a m}$ е тъждество. Необходимо е само при избора на a да осигурим изпълнение

на двете условия $a > 0$ и $a \neq 1$. Като използваме последната формула при основа $\sin x$ ($\sin x > 0$ и $\sin x \neq 1$ за всички x от множеството от допустими стойности), преобразуваме левия израз на даденото уравнение и стигаме до уравнението $\log_{\sin x} \cos x + (\log_{\sin x} \cos x)^{-1} = 2$. Полагаме $z = \log_{\sin x} \cos x$ и получаваме квадратното уравнение $z^2 - 2z + 1 = 0$ с корен $z = 1$. Следователно $\log_{\sin x} \cos x = 1$. Оттук, разширявайки множеството от допустими стойности за неизвестното, стигаме до уравнението $\sin x = \cos x$. Разделяме двете страни на това уравнение с $\cos x$ (при това налагаме ограничението $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$) и получаваме уравнението $\operatorname{tg} x = 1$. Трябва да отбележим, че при подобно преобразуване на тригонометрично уравнение в най-общия случай могат да се изпуснат решения. Но в разглеждания случай стойностите $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ не са решения на уравне-

$$\begin{aligned} \text{нието } \sin x = \cos x, \text{ защото } \sin x - \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k \text{ е четно} \\ -1, & \text{ако } k \text{ е нечетно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следователно няма да изпуснем решения. Уравнението $\operatorname{tg} x = 1$ има решения $x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$. Установяваме, че при m нечетно, стойностите на x от тази съвкупност са придобити корени, а при m четно получаваме решения на даденото уравнение. Окончателно, търсените решения са $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$ или $x = \frac{\pi}{4}(8p+1), p \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. Да се реши уравнението $\log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{3}} = 1$.

Решение. Използваме представяне на числото $1 = \log_{\cos x} \cos x$, т.е.

$$\begin{aligned} \log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{3}} &= \log_{\cos x} \cos x. \quad \text{След антилогаритмуване} \\ \text{получаваме } \left(\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{3}} &= \cos x \text{ и повдигаме на трета степен,} \\ \text{т.е. } \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} &= \cos^3 x. \text{ Умножаваме двете страни с 8, групираме} \end{aligned}$$

$(2 \cos x)^3 - (2 \cos x)^2 - 2(2 \cos x) + 2 = 0$, полагаме $2 \cos x = y$, заместваем и получаваме уравнението $y^3 - y^2 - 2y + 2 = 0$, което има корени $y_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ и $y_3 = 1$. Като вземем предвид, че множеството от допустими стойности се определя от системата

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \\ \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} > 0 \end{cases},$$

то само $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ имат решения. Оттук намираме, че $x_1 = (6k \pm 1)\frac{\pi}{3}$ и $x_2 = (8k \pm 1)\frac{\pi}{4}$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 13. Да се реши уравнението

$$\log_{\lg x} \left(\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) + \log_{\cot gx} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Решение. Дефиниционното множество на уравнението се състои от онези x , за които $\lg x > 0$, $\lg x \neq 1$, $\cot gx > 0$, $\cot gx \neq 1$, $\cos 2x + \cos \frac{x}{2} > 0$ и $\sin x + \cos \frac{x}{2} > 0$. Тъй като

$$\log_{\cot gx} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = \log_{\frac{1}{\lg x}} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = -\log_{\lg x} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right),$$

то даденото уравнение е еквивалентно на $\log_{\lg x} \left(\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) = \log_{\lg x} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right)$,

което в дефиниционното множество е еквивалентно на $\cos 2x + \cos \frac{x}{2} = \sin x + \cos \frac{x}{2}$. Оттук следва, че $\sin x = -1$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Решенията на уравнението $\sin x = -1$ не са решения на даденото уравнение, а измежду

решенията на $\sin x = \frac{1}{2}$ само $x = \frac{\pi}{6} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$ принадлежат на дефиниционното множество.

Задача 14. Да се реши уравнението $\log_{\sin x} \left(\sin x - \frac{1}{4} \cos x \right) = 3$.

Решение. Дефиниционното множество се определя от системата условия:

$$\begin{cases} 0 < \sin x \neq 1 \\ \sin x - \frac{1}{4} \cos x > 0. \end{cases}$$

От определението на логаритъм записваме $\sin x - \frac{1}{4} \cos x = \sin^3 x$. Да решим полученото тригонометрично уравнение, като преобразуваме с групиране на $\sin x$ и $\sin^3 x$. т.е.

$$\begin{aligned}\sin^3 x - \sin x + \frac{1}{4} \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos x - 4(\sin x - \sin^3 x) = 0 \Leftrightarrow \\ \cos x - 4\sin x \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin 2x) = 0,\end{aligned}$$

откъдето $\cos x = 0$ или $1 - 2\sin 2x = 0$.

I. Ако $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$, за $\sin x$ трябва да бъде изпълнено $0 < \sin x \neq 1$.

Следователно решенията на уравнението $\cos x = 0$ не са решения на даденото уравнение.

II. Нека $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Тогава $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$ и $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$.

При k нечетно число, т.е. $k = 2n + 1$, имаме $\sin\left(\frac{5\pi}{12} + (2n+1)\pi\right) = -\sin\frac{5\pi}{12} < 0$ и $\sin\left(\frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{12} < 0$.

Следователно числата $x_1 = \frac{5\pi}{12} + (2n+1)\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi$, където $n \in \mathbb{Z}$, не са решения на уравнението, понеже не удовлетворяват условието $\sin x > 0$.

При k четно число, т.е. $k = 2n$ имаме $\sin\left(\frac{5\pi}{12} + 2n\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{12}$ и $\sin\left(\frac{\pi}{12} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{12}$, където $n \in \mathbb{Z}$. И тъй като $0 < \sin\frac{5\pi}{12} < 1$ и $0 < \sin\frac{\pi}{12} < 1$, то числата $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2n\pi$ и $x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2n\pi$, където $n \in \mathbb{Z}$, са решения на даденото уравнение.

Задача 15. Да се реши уравнението $1 + 4\log_9 \lg x - \log_3 \left(\frac{9}{2} \lg x - 2 \cos x\right) = \frac{1}{\log_{\cos x} \frac{1}{3}}$.

Решение. Преобразуваме даденото уравнение до

$$\log_3 3 + \log_3 \lg^2 x - \log_3 \left(\frac{9}{2} \lg x - 2 \cos x\right) = \log_3 \frac{1}{\cos x}.$$

Като антилогаритмуваме, получаваме $\frac{3\lg^2 x}{9\lg x - \cos x} = \frac{1}{\cos x}$. След опростяване стигаме до уравнението $2\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0$, от което намира-

ме $\sin x = \frac{1}{2}$, т.е. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. За $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ изразите в даденото уравнение нямат смисъл. Корените на уравнението са числата $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. Да се намери стойността на $\cos x$ от уравнението

$$\log_{\cos x} \left[\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right] + 2 \log_{\frac{1}{2} - \cos x} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] = 3 - \log_{\cos x} 2.$$

Решение. Даденото уравнение привеждаме във вида

$$\log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) + 2 \log_{\frac{1}{2} - \cos x} \cos x - 3 = 0.$$

Полагаме $\log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = y$, заместваме и получаваме квадратното уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$ с корени $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$. От $\log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = 1$ и $\log_{\cos x} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = 2$ намираме, че $\cos x = \frac{1}{4}$ и $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Задача 17. Дадено е уравнението $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x + \log_{\cos x} \operatorname{cotg} x = a$, където a е реален параметър.

А) Да се реши уравнението при $a = 0$ и при $a = 4$.

Б) Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които даденото уравнение има решение.

Решение. Допустимите стойности на даденото уравнение се определят от системата $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$. В това множество от реални числа можем да запишем даденото уравнение във вида $2 - (\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x) = a$. Полагаме $y = \log_{\sin x} \cos x$, като $y > 0$. От даденото уравнение получаваме $y + \frac{1}{y} = 2 - a$ (1).

А) Да решим уравнението (1):

а) при $a = 0$ имаме $y = 1 \Rightarrow \log_{\sin x} \cos x = 1$, откъдето определяме, че $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x = \cos x \end{cases}$ с решение $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

б) при $a = 4$ имаме $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a = -1$, но $y > 0$, следователно даденото уравнение няма решение.

Б) Търсим онези стойности на a , за които уравнението $y + \frac{1}{y} = 2 - a$ има положителен корен. Като използваме, че стойностите на функцията $f(y) = y + \frac{1}{y}$ при $y > 0$ са всички числа, по-големи или равни на 2, получаваме, че търсените стойности на a са $a \leq 0$.

Задача 18. Да се реши уравнението $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a = 1$.

Решение. Множеството от допустими стойности на участващите функции се определя от неравенствата $0 < \sin x < 1$ и $a > 0$. Преобразуваме лявата страна на уравнението, като привеждаме всички логаритми към логаритми при основа 2:

$$\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a = \frac{1}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{\log_2 a}{\log_2 \sin^2 x} = \frac{\log_2 a}{\log_2 \sin x \cdot 2 \log_2 \sin x} = \frac{\log_2 a}{2(\log_2 \sin x)^2}.$$

Полагаме $\log_2 \sin x = y$ и получаваме уравнението $\frac{\log_2 a}{2y^2} = 1$, откъдето при $\log_2 a > 0$, т.е. $a > 1$, имаме $y = \pm \sqrt{\frac{\log_2 a}{2}}$, а при $\log_2 a \leq 0$, т.е. $a < 1$, уравнението $\frac{\log_2 a}{2y^2} = 1$ няма решение. И така, при $a > 0$ имаме, че $\log_2 \sin x = \sqrt{\frac{\log_2 a}{2}}$ или $\log_2 \sin x = -\sqrt{\frac{\log_2 a}{2}}$. Но тъй като $0 < \sin x < 1$, то $\log_2 \sin x < 0$ и следователно решения на даденото уравнение са само решенията на уравнението $\log_2 \sin x = -\sqrt{\frac{\log_2 a}{2}}$, т.е. $\sin x = 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 a}{2}}} = b$. Нека a_0 е решение на уравнението $\sin x = b$ такова, че $0 < a_0 < \frac{\pi}{2}$. Тогава всички решения на даденото уравнение са $x = (-1)^k a_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ при $a > 1$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968). *Exponential and logarithmic equations* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie. [Бородуля, И. (1968). Показателни и логаритмични уравнения и неравенства. Москва: Просвещение.]
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka. [Вавилов, В., и др. (1987). Задачи по математика. Москва: Наука.]

- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1996). *Mathematics for 10-th grade*. Sofia: Prosveta [Запрянов, З., В. Вакарелова & Б. Димитров. (1996). *Математика X клас*. Просвета, София.]
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1996). *Mathematics for 10-th grade* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta. [Запрянов, З., В. Вакарелова & Б. Димитров (1996). *Математика X клас*. София: Просвета.]
- Mavrova, R. & D. Boikina (2011). Using extremal values of transcendental functions in solving algebra problems (in Bulgarian). *Mathematics Plus*, 19 (74), 2, 43 – 46. [Маврова, Р. & Д. Бойкина (2011). Използване на екстремалните стойности на трансцендентни функции при решаване на задачи по алгебра. *Математика плюс*, 19 (74), 2, 43 – 46.]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). One more idea for solving trigonometric equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Още една идея за решаване на тригонометрични уравнения. *Математика и информатика*, 59, 2, 170 – 182.]
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Excel helps in solving some exponential equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 5, 368 – 380. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Excel в помощ при решаване на някои показателни уравнения. *Математика и информатика*, 59, 5, 368 – 380.]
- Stefanova, D. (2017). Exponential and trigonometric functions in transcendental equations (Part I). *Mathematics and Informatics*, 60, 1 57 – 63. [Стефанова, Д., (2017). Показателни и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (I част). *Математика и информатика*, 60, 1, 57 – 63.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

LOGARITHMIC AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN TRANSCENDENTAL EQUATIONS (PART II)

Abstract. The paper is a continuation of the paper by the same author in issue 1/2017 of “Mathematics and Informatics” journal, dedicated to transcendental equations and combinations of logarithmic and trigonometric functions which are considered instead of combinations of exponential and trigonometric functions. Approaches for their solutions are proposed.

✉ **Ms. Diana Stefanova, PhD**
Teacher in Mathematics
116, Tsar Ivan Asen II Str.
4230 Asenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg