

## КРИВА НА ЧЕВА ЗА ТОЧКА ОТ РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИК

<sup>1</sup>Сава Гроздев, <sup>2</sup>Веселин Ненков

<sup>1</sup>Българска академия на науките

<sup>2</sup>Технически колеж - Ловеч

**Резюме.** В настоящата статия е описан начин за получаване на конични сечения, определени от произволно описано за даден триъгълник конично сечение и точка в равнината на този триъгълник. Отбелязани са някои свойства на получените конични сечения.

**Key words:** triangle, homothety, conic, Ceva circle, Ceva curve, Feuerbach configuration, Euler curve, Nagel point, GSP

В настоящата статия ще покажем как се получава обобщение на един широк клас окръжности в равнината на даден триъгълник. Това обобщение се състои в специално построяване на конични сечения. В построяването на коничните сечения и откриването на някои от техните свойства ще използваме конструктивните и динамични възможности на програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP).

Нека  $ABC$  е произволен триъгълник, за който  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , а  $S$  е лицето му. Разглеждаме барицентрични координати спрямо  $\triangle ABC$ , като  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  и  $C(0,0,1)$  (Паскалев & Чобанов, 1985). Нека  $P(\lambda, \mu, \nu)$  е произволна точка от равнината на  $\triangle ABC$ , нележаща на никоя от правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . За крайна точка  $P$  е изпълнено равенството  $\lambda + \mu + \nu = 1$ , а за безкрайна – равенството  $\lambda + \mu + \nu = 0$ . Означаваме  $A_1 = AP \cap BC$ ,  $B_1 = PB \cap CA$  и  $C_1 = CP \cap AB$ . Тогава координатите на тези точки се представят по следния начин:

$$(1) \quad A_1 \left( 0, \frac{\mu}{\mu + \nu}, \frac{\nu}{\mu + \nu} \right), B_1 \left( \frac{\lambda}{\nu + \lambda}, 0, \frac{\nu}{\nu + \lambda} \right), C_1 \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \frac{\mu}{\lambda + \mu}, 0 \right).$$

**1. Окръжност на Чева.** Точките  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на една окръжност  $c_p$ , която ще наричаме *окръжност на Чева за точката  $P$  спрямо  $\triangle ABC$* . Нека вторите пресечни точки на  $c_p$  с правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  са съответно  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ . Известно е, че правите  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  минават през една точка  $P'$  (Хитов, 1990). Следователно точките  $P$  и  $P'$  имат една и съща окръжност на Чева спрямо  $\triangle ABC$ , т.е.  $c_p \equiv c_{p'}$ . В частност, общата окръжност на Чева за медицентъра  $G$  и ортоцентъра  $H$  на  $\triangle ABC$

е Ойлеровата окръжност на  $\Delta ABC$ . Първата ни задача, свързана с окръжността на Чева  $c_p$ , е да намерим нейното уравнение. За целта ще разглеждаме и барицентрични координати спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$ , като  $A_1(1,0,0)$ ,  $B_1(0,1,0)$  и  $C_1(0,0,1)$ . Ако точка  $M$  има координати  $(x, y, z)$  спрямо  $\Delta ABC$  и координати  $(x_1, y_1, z_1)$  спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$ , връзките между тези координати се изразяват с равенствата:

$$(2) \quad x = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} y_1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} z_1, \quad y = \frac{\mu}{\mu + \nu} x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} z_1, \quad z = \frac{\nu}{\mu + \nu} x_1 + \frac{\nu}{\nu + \lambda} y_1$$

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\mu + \nu}{2\lambda} x + \frac{\mu + \nu}{2\mu} y + \frac{\mu + \nu}{2\nu} z, \\ y_1 &= \frac{\nu + \lambda}{2\lambda} x - \frac{\nu + \lambda}{2\mu} y + \frac{\nu + \lambda}{2\nu} z, \\ z_1 &= \frac{\lambda + \mu}{2\lambda} x + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y - \frac{\lambda + \mu}{2\nu} z. \end{aligned}$$

Въвеждаме означенията:

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{a} &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu a^2 + (\nu - \mu)(\lambda + \mu)\nu\lambda b^2 + (\mu - \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu c^2, \\ \bar{b} &= (\nu - \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu a^2 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda b^2 + (\lambda - \nu)(\mu + \nu)\lambda\mu c^2, \\ \bar{c} &= (\mu - \lambda)(\nu + \lambda)\mu\nu a^2 + (\lambda - \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda b^2 + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu c^2. \end{aligned}$$

Ако  $|B_1 C_1| = a_1$ ,  $|C_1 A_1| = b_1$  и  $|A_1 B_1| = c_1$ , то са изпълнени равенствата:

$$(5) \quad a_1^2 = \frac{\bar{a}}{(\nu + \lambda)^2 (\lambda + \mu)^2}, \quad b_1^2 = \frac{\bar{b}}{(\lambda + \mu)^2 (\mu + \nu)^2}, \quad c_1^2 = \frac{\bar{c}}{(\mu + \nu)^2 (\nu + \lambda)^2}.$$

Сега, като вземем предвид, че уравнението на описаната около  $\Delta ABC$  окръжност  $\Gamma$  спрямо  $\Delta ABC$  е следното

$$(6) \quad a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0,$$

то уравнението на  $c_p$  спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$  ще бъде

$$(7) \quad a_1^2 y_1 z_1 + b_1^2 z_1 x_1 + c_1^2 x_1 y_1 = 0.$$

Така след заместване на (3) и (5) в (7) уравнението на  $c_p$  спрямо  $\Delta ABC$  се получава във вида:

$$(8) \quad c_p : \mu\nu a'x^2 + \nu\lambda b'y^2 + \lambda\mu c'z^2 - \lambda(\mu+\nu)\bar{a}yz - \mu(\nu+\lambda)\bar{b}zx - \nu(\lambda+\mu)\bar{c}xy = 0,$$

където

$$\begin{aligned} a' &= -(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 + (\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 + (\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2, \\ (9) \quad b' &= (\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 - (\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 + (\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2, \\ c' &= (\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 + (\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 - (\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2. \end{aligned}$$

Сега, за да намерим координатите на точката  $A_2$ , решаваме системата уравнения, която се получава от  $x=0$  и (8). Намираме равенството  $(\nu y - \mu z)(b'y - c'z) = 0$ . Първият множител води до координатите на точката  $A_1$ , затова от втория множител намираме координатите на  $A_2$  във вида:

$$(10) \quad A_2 \left( 0, \frac{c'}{2(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2}, \frac{b'}{2(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2} \right).$$

По аналогичен начин се намират координатите на  $B_2$  и  $C_2$  във вида

$$(11) \quad \begin{aligned} B_2 &\left( \frac{c'}{2(\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2}, 0, \frac{a'}{2(\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2} \right), \\ C_2 &\left( \frac{b'}{2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2}, \frac{a'}{2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2}, 0 \right), \end{aligned}$$

където  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$  са определени с (9).

След използване на (10) и (11) намираме уравненията на правите  $AA_2$  и  $BB_2$ , откъдето получаваме координатите на пресечната им точка  $P'$ :

$$(12) \quad P' \left( \frac{b'c'}{\tau}, \frac{c'a'}{\tau}, \frac{a'b'}{\tau} \right),$$

където

$$(13) \quad \begin{aligned} \tau &= 2\lambda\mu\nu(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu) \left[ \lambda(\mu+\nu)b^2c^2 + \mu(\nu+\lambda)c^2a^2 + \nu(\lambda+\mu)a^2b^2 \right] - \\ &\quad - (\nu+\lambda)^2(\lambda+\mu)^2\mu^2\nu^2a^4 - (\lambda+\mu)^2(\mu+\nu)^2\nu^2\lambda^2b^4 - (\mu+\nu)^2(\nu+\lambda)^2\lambda^2\mu^2c^4. \end{aligned}$$

От (12) се вижда по начин, различен от показания в (Хитов, 1990), че правите  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  минават през една точка  $P'$ . Точката  $P'$  е безкрайна, когато  $P$  описва

крива от осма степен с уравнение  $\tau = 0$ , което се получава от (13). С помощта на (12) всички окръжности на Чева задават едно инволютивно изображение в равнината на  $\Delta ABC$ , което на всяка точка  $P$ , нележаща на никоя от правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , съпоставя точка  $P'$ . Една от двойните точки на това изображение е добре известната точка на Жергон. Повече по въпроса за двойните точки ще отбележим, след като определим понятието крива на Чева.

Във връзка с окръжността на Чева  $c_P$  за точка  $P$  е интересно да определим координатите на нейния център. Центърът на описаната за  $\Delta ABC$  окръжност  $\Gamma$  има следните координати  $\left( \frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)}{16S^2}, \frac{b^2(a^2-b^2+c^2)}{16S^2}, \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16S^2} \right)$ .

Следователно координатите на центъра  $O(P)$  на описаната за  $\Delta A_1B_1C_1$  окръжност  $C_P$  спрямо  $\Delta A_1B_1C_1$  са  $\left( \frac{a_1^2(-a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{16S_1^2}, \frac{b_1^2(a_1^2-b_1^2+c_1^2)}{16S_1^2}, \frac{c_1^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)}{16S_1^2} \right)$ , където  $S_1$

е лицето на  $\Delta A_1B_1C_1$ . Заместваме (5) и равенството  $S_1^2 = \frac{4\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}{(\mu+\nu)^2(\nu+\lambda)^2(\lambda+\mu)^2}$  в тези координати. Координатите на  $O(P)$  спрямо  $\Delta A_1B_1C_1$  получаваме във вида

$$x'_{O(P)} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{a}}{32(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2},$$

$$y'_{O(P)} = \frac{\bar{b} \cdot \bar{b}}{32(\lambda+\mu)(\mu+\nu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2},$$

$$z'_{O(P)} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{c}}{32(\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2},$$

където  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  се определят с равенствата:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= -(\lambda^2 + \mu\nu)\mu\nu a^2 + (\mu + \nu)\nu\lambda^2 b^2 + (\mu + \nu)\mu\lambda^2 c^2, \\ \bar{b} &= (\nu + \lambda)\nu\mu^2 a^2 - (\mu^2 + \nu\lambda)\nu\lambda b^2 + (\nu + \lambda)\lambda\mu^2 c^2, \\ \bar{c} &= (\lambda + \mu)\mu\nu^2 a^2 + (\lambda + \mu)\lambda\nu^2 b^2 - (\nu^2 + \lambda\mu)\lambda\mu c^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Оттук и (2) за координатите на  $O(P)$  спрямо  $\Delta ABC$  получаваме

$$\begin{aligned}
 x_{O(P)} &= \frac{\lambda(\bar{b}\bar{\bar{b}} + \bar{c}\bar{\bar{c}})}{32(\mu + \nu)(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}, \\
 y_{O(P)} &= \frac{\mu(\bar{c}\bar{\bar{c}} + \bar{a}\bar{\bar{a}})}{32(\mu + \nu)(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}, \\
 z_{O(P)} &= \frac{\nu(\bar{a}\bar{\bar{a}} + \bar{b}\bar{\bar{b}})}{32(\mu + \nu)(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

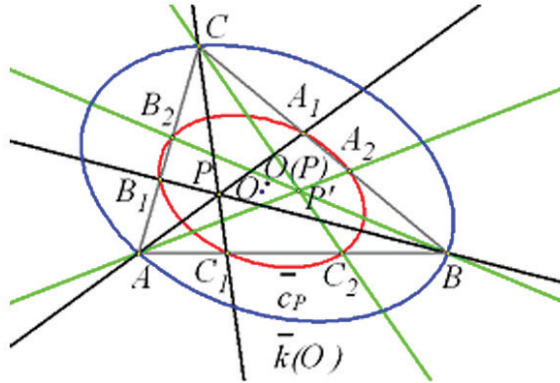
**2. Крива на Чева.** Ще определим подходящо конично сечение, което обобщава разглежданото понятие окръжност на Чева. Желаното обобщение ще намерим във връзка с произволно описано за  $\triangle ABC$  конично сечение  $\bar{k}(O)$ , което има за център точката  $O(x_0, y_0, z_0)$ . Кривата  $\bar{k}(O)$  може да се определи с уравнението

$$(16) \quad (-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy = 0.$$

Уравнението (8) на окръжността  $C_P$  определихме, като използваме, че то изглежда по същия начин спрямо  $\triangle A_1B_1C_1$ , както уравнението (6) на описаната за  $\triangle ABC$  окръжност  $\Gamma$  спрямо  $\triangle ABC$ . Ще използваме същата идея, за да определим конично сечение, описано около  $\triangle A_1B_1C_1$ . Уравнение (16) се получава от (6), като  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$  се заменят съответно с  $(-x_0 + y_0 + z_0)x_0$ ,  $(x_0 - y_0 + z_0)y_0$  и  $(x_0 + y_0 - z_0)z_0$ . Затова разглеждаме конично сечение  $\bar{c}_P$ , което има уравнение (8) с коефициенти  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$ , получаващи се с равенствата

$$\begin{aligned}
 a' &= -(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \\
 &\quad + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu(x_0 + y_0 - z_0)z_0, \\
 b' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \\
 (9') \quad &\quad + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu(x_0 + y_0 - z_0)z_0, \\
 c' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - \\
 &\quad - (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu(x_0 + y_0 - z_0)z_0.
 \end{aligned}$$

Последните равенства се получават от (9) след извършване на споменатата смяна. Ясно е, че, когато  $O$  е центърът на  $\Gamma$ , то  $\bar{c}_P \equiv c_P$ . Следователно кривата  $\bar{c}_P$  е обобщение на окръжността  $c_P$ . Кривата  $\bar{c}_P$  ще наричаме *крива на Чева за точка  $P$  по отношение на описаната крива  $\bar{k}(O)$*  или само крива на Чева, когато



Фигура 1

се подразбира коя е описаната крива. Тъй като координатите на точките  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  в (10) и (11) се получават от (8) без да се извършват преобразувания върху  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$ , то споменатата смяна води до точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ , определени с (10), (11) и (9'), лежащи на  $\bar{c}_p$ . Освен това получаващите се прави  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  минават през точка  $P'$ , координатите на която се определят с (12), (13) и (9'). Вижда се, че когато са известни координатите на  $O$  и  $P$ , можем да построим кривата  $\bar{c}_p$  по пет от известните върху нея шест точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  посредством (1), (10), (11) и (9').

$I_A$

Описаното за  $\triangle ABC$  конично сечение  $\bar{k}(O)$  може да се представи и с друго уравнение. Нека  $I(x_I, y_I, z_I)$  е център на вписано в  $\triangle ABC$  конич-

но сечение  $k(I)$ . Точките  $I_A \left( -\frac{x_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{y_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{z_I}{-x_I + y_I + z_I} \right)$ ,

$I_B \left( \frac{x_I}{x_I - y_I + z_I}, -\frac{y_I}{x_I - y_I + z_I}, \frac{z_I}{x_I - y_I + z_I} \right)$ ,  $I_C \left( \frac{x_I}{x_I + y_I - z_I}, \frac{y_I}{x_I + y_I - z_I}, -\frac{z_I}{x_I + y_I - z_I} \right)$

определят триъгълник  $I_A I_B I_C$ , който се нарича спрегнат на  $I$  спрямо  $\triangle ABC$  (Паскалев & Чобанов, 1985). Тези точки са центрове на вписани в  $\triangle ABC$  конични сечения  $k(I_A)$ ,  $k(I_B)$  и  $k(I_C)$ . Средите на отсечките на  $I_A I_B$ ,  $I_B I_C$ ,  $I_C I_A$  и  $I_A I_B$ , както е показано в (Ненков, 2008), лежат на конично сечение  $\bar{k}(O)$  с център точка  $O$ . Всяка от точките  $I$  и  $O$  определя еднозначно другата (Ненков, 2010), затова кривите  $\bar{k}(O)$  и  $k(I)$  ще

наричаме *асоциирани* спрямо  $ABC$ . В (Ненков, 2008) и (Ненков, 2010) е показано, че кривите  $k(I)$  и  $\bar{k}(O)$  притежават свойства, които са подобни на съответните свойства на вписаната и описаната окръжност за  $ABC$ , поради което казваме, че са елементи на *Фойербахова конфигурация*. От споменатите резултати следва, че  $\bar{k}(O)$  може да се представи с уравнението

$$(17) \quad x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy = 0.$$

Уравнение (17) се получава от (6), като  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$  се заменят съответно с  $x_I^2$ ,  $y_I^2$  и  $z_I^2$ . Затова разгледаното конично сечение  $\bar{c}_p$  ще се представи с уравнение (8), в което коефициентите  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$  се получават с равенствата:

$$\begin{aligned} a' &= -(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu x_I^2 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda y_I^2 + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu z_I^2, \\ (9'') \quad b' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu x_I^2 - (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda y_I^2 + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu z_I^2, \\ c' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu x_I^2 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda y_I^2 - (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu z_I^2. \end{aligned}$$

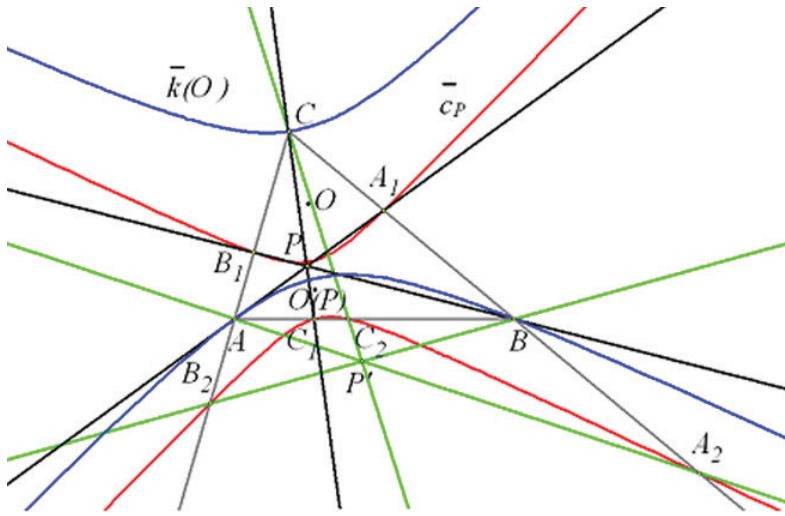
Както и преди, точките  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  се определят с (10), (11) и (9''), а  $P' - c$  (12), (13) и (9'').

Множеството на кривите на Чева, зададени с (8) и (9') (или (9'')) при фиксирана описана крива  $k(O)$ , определят инволюция в равнината на  $\triangle ABC$  с помощта на (12) и (9') (или (9'')). Двойните елементи на тази инволюция са всички точки  $P$ , за които  $P' \equiv P$ , т.е. точките  $P$ , за които  $A_1 \equiv A_2$ ,  $B_1 \equiv B_2$  и  $C_1 \equiv C_2$ . Това е възможно точно когато кривите на Чева са вписани конични сечения, асоциирани с  $\bar{k}(O)$ . В случай, че  $\bar{k}(O)$  е елипса или хипербола, това са вписаните криви  $k(I)$ ,  $k(I_A)$ ,  $k(I_B)$  и  $k(I_C)$ . Тогава двойните елементи са точките на Жергон, определени в (Ненков, 2010) със следните координатни представяния:

$$\begin{aligned} J &\left( \frac{(1-2y_I)(1-2z_I)}{\vartheta}, \frac{(1-2z_I)(1-2x_I)}{\vartheta}, \frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{\vartheta} \right), \\ J_A &\left( -\frac{(1-2y_I)(1-2z_I)}{1-4y_I z_I}, \frac{1-2y_I}{1-4y_I z_I}, \frac{1-2z_I}{1-4y_I z_I} \right), \\ J_B &\left( \frac{1-2x_I}{1-4z_I x_I}, -\frac{(1-2z_I)(1-2x_I)}{1-4z_I x_I}, \frac{1-2z_I}{1-4z_I x_I} \right), \\ J_C &\left( \frac{1-2x_I}{1-4x_I y_I}, \frac{1-2y_I}{1-4x_I y_I}, -\frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{1-4x_I y_I} \right), \end{aligned}$$

където  $\vartheta = 4x_I y_I + 4y_I z_I + 4z_I x_I - 1$ .

Следователно получената инволюция има четири двойни елемента, когато описаната крива  $\bar{k}(O)$  е елипса или хипербола. Ако  $\bar{k}(O)$  е парабола, асоциираната ѝ вписана парабола е една. Затова и точката на Жергон е една. Тя се задава по следния начин  $J\left(\frac{y_I z_I}{y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I}, \frac{z_I x_I}{y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I}, \frac{x_I y_I}{y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I}\right)$  (Ненков, 2010). Следователно в този случай инволюцията има само един двоен елемент.

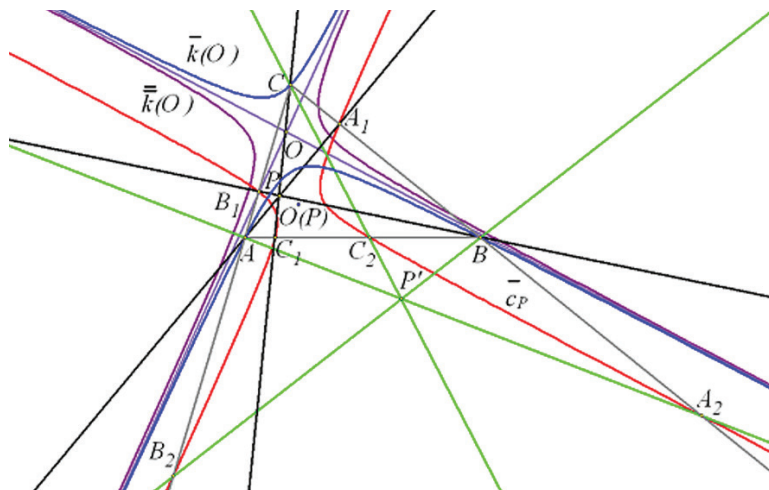


Фигура 2

За да определим координатите на центъра  $O(P)$  на кривата на Чева  $\bar{c}_P$ , постъпваме по следния начин: през точките  $A_1$  и  $B_1$  построяваме прави, успоредни съответно на  $B_1 C_1$  и  $C_1 A_1$ , които пресичат  $\bar{c}_P$  съответно в точки  $A'_1$  и  $B'_1$ . След това намираме правата  $l_a$ , минаваща през средите на  $A_1 A'_1$  и  $B_1 C_1$  и правата  $l_b$ , минаваща през средите на  $B_1 B'_1$  и  $C_1 A_1$ . За координатите на пресечната точка  $O(P)$  на  $l_a$  и  $l_b$  получаваме формулите (15), в които  $\bar{a}$  и  $\bar{a}'$  от (4) и (14) съдържат  $(-x_0 + y_0 + z_0)x_0$ ,  $(x_0 - y_0 + z_0)y_0$  и  $(x_0 + y_0 - z_0)z_0$  (или  $x_I^2$ ,  $y_I^2$  и  $z_I^2$ ), заменяйки съответно  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$ . Освен това в тези равенства  $16S^2$  се заменя с

$$\begin{aligned} & (-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) \\ & \text{(или } (-x_I + y_I + z_I)(x_I - y_I + z_I)(x_I + y_I - z_I)\text{)}. \end{aligned}$$

Следователно координатите на центъра  $O(P)$  се определят чрез равенствата (15) (както трябваше да се очаква).



Фигура 3

**3. Хомотетични свойства на кривите на Чева.** Наблюденията с GSP върху кривите на Чева при фиксирана описана за  $\Delta ABC$  крива  $\bar{k}(O)$  показват, че е изпълнено следното

**Твърдение 1.** Всички криви на Чева по отношение на постоянна, описана за  $\Delta ABC$  крива  $\bar{k}(O)$ , са от същия вид, от който е  $\bar{k}(O)$ .

Нещо повече, по-подробните наблюдения с GSP показват, че в зависимост от вида на  $\bar{k}(O)$  твърдение 1 се уточнява чрез следващите твърдения:

**Твърдение 2.** Ако кривата  $\bar{k}(O)$  е елипса, то за всяка точка  $P$  от равнината на  $\Delta ABC$  кривата  $\bar{c}_P$  е елипса, хомотетична на  $\bar{k}(O)$  (фиг. 1).

**Твърдение 3.** Ако кривата  $\bar{k}(O)$  е хипербола, то за всяка точка  $P$  от равнината на  $\Delta ABC$  кривата  $\bar{c}_P$  е хипербола, хомотетична на  $\bar{k}(O)$  или на нейната спрегната  $\bar{k}(O)$  (фиг. 1).

**Твърдение 4.** Ако кривата  $\bar{k}(O)$  е парабола, то за всяка точка  $P$  от равнината на  $\Delta ABC$  кривата  $\bar{c}_P$  е парабола, хомотетична на  $\bar{k}(O)$  (фиг. 1).

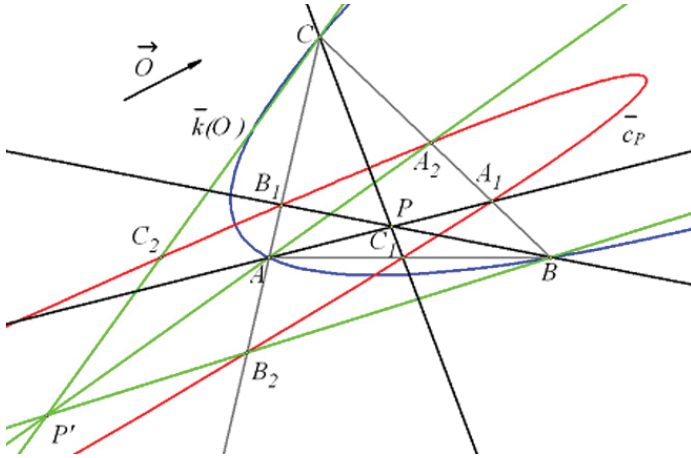
За да докажем тези твърдения, е достатъчно да забележим, че при използването на равенствата (9') уравнението (8) на  $\bar{c}_P$  се записва във вида:

$$(18) \quad \lambda\mu\nu(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu) \times \\ \times [(-x_0+y_0+z_0)x_0yz + (x_0-y_0+z_0)y_0zx + (x_0+y_0-z_0)z_0xy] - \\ - (\mu\nu a'x + \nu\lambda b'y + \lambda\mu c'z)(x+y+z) = 0.$$

Това уравнение е от вида

$$k. \left[ (-x_0 + y_0 + z_0)x_0 yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0 zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0 xy \right] + \\ + (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0.$$

Затова от резултатите за този вид криви, описани в (Гроздев & Ненков, 2014), се получават всички, формулирани по-горе, твърдения.



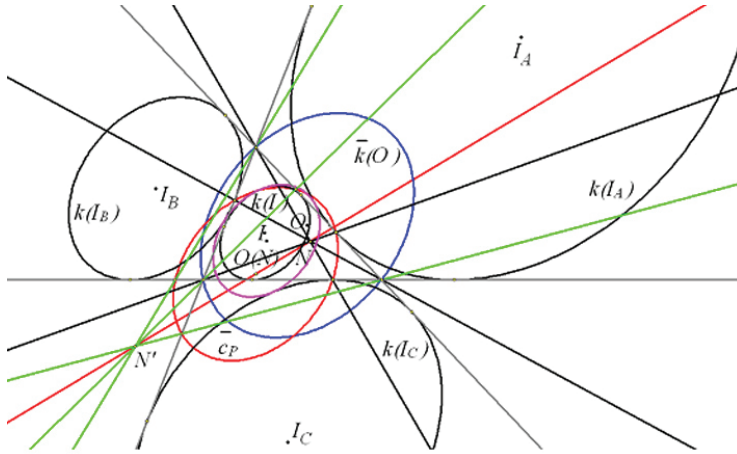
Фигура 4

**4. Едно свойство на центъра на кривата на Чева за точка на Нагел.** В общия случай, както лесно се забелязва с GSP, точките  $P$ ,  $P'$  и  $O(P)$  не лежат на една права. Тези точки лежат на една права точно когато е изпълнено равенството

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ x_{P'} & y_{P'} & z_{P'} \\ x_{O(P)} & y_{O(P)} & z_{O(P)} \end{vmatrix} = 0.$$

Любопитно е да се открият някои забележителни точки  $P$  в равнината на  $\triangle ABC$  при фиксирана крива  $\bar{k}(O)$ , които заедно със съответните им точки  $P'$  и  $O(P)$  лежат на една права. Една от тези точки е медицентърът  $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  на  $\triangle ABC$ . Кривата на Чева за  $G$  по отношение на произволна описана около  $\triangle ABC$  крива  $\bar{k}(O)$  е обобщение на окръжността на Ойлер за  $\triangle ABC$ , която наричаме *крива на Ойлер* за  $\triangle ABC$ , асоциирана с  $\bar{k}(O)$ . Кривата на Ойлер също принадлежи на Фойербаховата

конфигурация, определена от  $\bar{k}(O)$ . Освен това в (Nenkov, 2007) е отбелязано, че (според въведените по-горе означения)  $O(G)$  е среда на отсечката  $GG'$ , т.е.  $G$ ,  $G'$  и  $O(G)$  лежат на една права.



Фигура 5

Други забележителни точки за Фойербаховата конфигурация, определена от  $\bar{k}(O)$ , са точките на Нагел. Едната точка на Нагел  $N(1-2x_I, 1-2y_I, 1-2z_I)$  е пресечната точка на правите, свързващи върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$  със съответните допирни точки на  $k(I_A)$ ,  $k(I_B)$  и  $k(I_C)$  със страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . По аналогичен начин се получават още три точки на Нагел

$$N_A\left(\frac{1}{1-2x_I}, \frac{2z_I-1}{1-2x_I}, \frac{2y_I-1}{1-2x_I}\right), N_B\left(\frac{2z_I-1}{1-2y_I}, \frac{1}{1-2y_I}, \frac{2x_I-1}{1-2y_I}\right),$$

$$N_C\left(\frac{2y_I-1}{1-2z_I}, \frac{2x_I-1}{1-2z_I}, \frac{1}{1-2z_I}\right).$$

Ще докажем, че точките  $N$ ,  $N'$  и  $O(N)$  лежат на една права. За останалите точки на Нагел това се получава, като заменим вписаната крива  $k(I)$  с  $k(I_A)$ ,  $k(I_B)$  и  $k(I_C)$ . От (9'') и (13), при  $\lambda = 1-2x_I$ ,  $\mu = 1-2y_I$ ,  $\nu = 1-2z_I$ , получаваме равенствата

$$a' = 4x_I y_I z_I [4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)],$$

$$b' = 4x_I y_I z_I [4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)],$$

$$c' = 4x_I y_I z_I [4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)],$$

$$\tau = 16x_I^2 y_I^2 z_I^2 [48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1].$$

От тези равенства и (12) намираме координатите на  $N'$  във вида

$$x_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)][4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$y_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)][4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$z_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)][4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1}.$$

От (4), (14) и (15) (15), при замените  $a^2 \rightarrow x_I^2$ ,  $b^2 \rightarrow y_I^2$ ,  $c^2 \rightarrow z_I^2$ ,  $16S^2 \rightarrow (1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)$ , с помощта на програмата Maple намираме координатите на  $O(N)$  във вида:

$$x_{O(N)} = \frac{x_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times$$

$$\times (-8y_I^4 z_I^2 - 8y_I^2 z_I^4 - 16y_I^3 z_I^3 - 8y_I^2 z_I^3 - 8y_I^2 z_I^3 + 28y_I^3 z_I + 28y_I z_I^3 + 64y_I^2 z_I^2 -$$

$$- 8y_I^3 - 8z_I^3 - 54y_I^2 z_I - 54y_I z_I^2 + 12y_I^2 + 12z_I^2 + 32y_I z_I - 6y_I - 6z_I + 1) =$$

$$= \frac{x_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times \{x_I (1-2x_I)^2 (1-2y_I)(1-2z_I) +$$

$$+ [(1-2y_I - 2z_I x_I)(1-2z_I - 2x_I y_I) - x_I (1-2y_I)(1-2z_I)](1-2x_I - 2y_I z_I)\},$$

$$y_{O(N)} = \frac{y_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times$$

$$\times (-8z_I^4 x_I^2 - 8z_I^2 x_I^4 - 16z_I^3 x_I^3 - 8z_I^3 x_I^2 - 8z_I^2 x_I^3 + 28z_I^3 x_I + 28z_I x_I^3 + 64z_I^2 x_I^2 -$$

$$- 8z_I^3 - 8x_I^3 - 54z_I^2 x_I - 54z_I x_I^2 + 12z_I^2 + 12x_I^2 + 32z_I x_I - 6z_I - 6x_I + 1) =$$

$$= \frac{y_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times \{y_I (1-2y_I)^2 (1-2z_I)(1-2x_I) +$$

$$+ [(1-2z_I - 2x_I y_I)(1-2x_I - 2y_I z_I) - y_I (1-2z_I)(1-2x_I)](1-2y_I - 2z_I x_I)\},$$

$$\begin{aligned}
 z_{O(N)} &= \frac{z_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \\
 &\times (-8x_I^4y_I^2 - 8x_I^2y_I^4 - 16x_I^3y_I^3 - 8x_I^2y_I^2 - 8x_I^2y_I^3 + 28x_I^3y_I + 28x_Iy_I^3 + 64x_I^2y_I^2 - \\
 &- 8x_I^3 - 8y_I^3 - 54x_I^2y_I - 54x_Iy_I^2 + 12x_I^2 + 12y_I^2 + 32x_Iy_I - 6x_I - 6y_I + 1) = \\
 &= \frac{z_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \left\{ z_I(1-2z_I)^2(1-2x_I)(1-2y_I) + \right. \\
 &\left. + [(1-2x_I-2y_Iz_I)(1-2y_I-2z_Ix_I) - z_I(1-2x_I)(1-2y_I)](1-2z_I-2x_Iy_I) \right\}.
 \end{aligned}$$

Въвеждаме означенията  $\sigma_1 = x_I + y_I + z_I$ ,  $\sigma_2 = y_Iz_I + z_Ix_I + x_Iy_I$ ,  $\sigma_3 = x_Iy_Iz_I$ . С помощта на програмата Maple пресмятаме детерминантата

$$\begin{aligned}
 \delta &= \begin{vmatrix} x_N & y_N & z_N \\ x_{N'} & y_{N'} & z_{N'} \\ x_{O(N)} & y_{O(N)} & z_{O(N)} \end{vmatrix} = \frac{16(y_I - z_I)(z_I - x_I)(x_I - y_I)}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \\
 &\times \frac{(1-\sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 + 1)(24\sigma_3^2 - 8\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 16\sigma_2\sigma_3 + 30\sigma_3\sigma_1 - 2\sigma_1 + 4\sigma_2 - 24\sigma_3 + 1)}{48\sigma_3^2 - 32\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Тъй като  $\sigma_1 = x_I + y_I + z_I = 1$ , то  $\delta = 0$ . Последното равенство според (19) означава, че точките  $N$ ,  $N'$  и  $O(N)$  лежат на една права.

Накрая ще отбележим, че споменатото свойство на колинеарност е изпълнено за медицентъра на  $\triangle ABC$  спрямо всяка описана около  $\triangle ABC$  крива, а за точката на Нагел то е изпълнено само спрямо описаната крива, която поражда съответната Фойербахова конфигурация.

## ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & Ненков, В. (2014). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник, *Математика и информатика*, 2, 139 – 154.
- Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, 5, 42 – 61.
- Ненков, В. (2008) Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, 2, 35 – 42.
- Паскалев, Г. & Чобанов, Г. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
- Хитов, Х. (1990). *Геометрия на триъгълника*. София: Народна просвета.
- Nenkov, V. (2007). Euler's Line and Euler's Curve Dependent by a Point. *New Trends*

*in Mathematics and Informatics*, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy Sciences, Abstracts, Sofia, Bulgaria 6-8 July, 48.

## **A CEVA CURVE FOR A POINT IN THE PLANE OF A TRIANGLE**

**Abstract.** The paper describes a way to obtain conics, which are defined by an arbitrary circumscribed conic of a given triangle and a point in the plane of the triangle. Some properties of the obtained conics are noted.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS  
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8  
1113 Sofia, Bulgaria  
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech  
31, Sajko Saev Street  
Lovech, Bulgaria  
vnenkov@mail.bg