

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

Рубриката се води от д-р Светлозар Дойчев
и д-р Веселин Ненков

Задача 1. Покажете, че кубът на всяко рационално число може да се представи като сума от кубовете на три рационални числа.

Йонуц Иваненску, Крайова, Румъния

Задача 2. Във вътрешността на триъгълник ABC е взета точка P и през нея са построени отсечки A_1B_2 , B_1C_2 и C_1A_2 , съответно успоредни на AB , BC и CA , като $A_1, A_2 \in BC$, $B_1, B_2 \in CA$ и $C_1, C_2 \in AB$.

а) Да се докаже, че лицата на триъгълниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са равни.

б) Да се определи положението на P така, че лицата на $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ да бъдат максимални.

Христо Лесов, Казанлък

Задача 3. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ е редица от точки върху полуокръжността k с диаметър $OA_0 = 1$, дефинирана с равенствата $A_0A_n = \lambda n \cdot OA_n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), където λ е дадено положително число. Да се докаже, че:

а) правите $A_iA_{n-i} \left(i = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right)$ минават през една точка T_n ;

б) точките T_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) лежат на една права.

Хаим Хаимов, Варна

Краен срок за изпращане на решения 31 юли 2012 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2010

Задача 1. Да се намерят естествените числа x , y и z , за които са верни равенствата: а) $x^2 + y^2 + z^4 = 2010$; б) $x^2 + y^4 + z^4 = 2010$; в) $x^4 + y^4 + z^4 = 2010$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: Ясно е, че ако намерим всички решения на уравнението от а), ще определим веднага и решенията на уравненията от б) и в). Като използваме, че $7^4 = 2401 > 2010$, както и сравнения по модул 3, намираме, че числото z може да приема стойностите 1; 2; 4 и 5. Остава да намерим представянията на числата $2010 - 1^4 = 2009$, $2010 - 2^4 = 1994$, $2010 - 4^4 = 1754$ и $2010 - 5^4 = 1385$ като сбор от два квадрата. По този начин достигахме до решенията (4;37;5), (37;4;5), (19;32;5), (32;19;5), (23;35;4), (35;23;4), (25;37;2), (37;25;2), (28;35;1), (35;28;1). Оттук веднага следва, че уравнението от б) има решения (37;2;5) и (37;5;2), а уравнението от в) няма решение.

Задача 2. Корените на уравнението $f(x) = x^3 + Ax + Bx + C = 0$ са три различни квадрата на естествени числа. Да се докаже, че съществува естествено число P такова, че $|f(p)|$ е точен квадрат на цяло число.

Николай Белухов, студент

Решение (Николай Белухов): Да означим корените на уравнението $f(x) = 0$ с a^2 , b^2 и c^2 . Тогава $f(x) = (x - a^2)(x - b^2)(x - c^2)$. Нека за определеност a да е най-голямото измежду трите числа. Полагаме $p = ab - bc + ca = b(a - c) + ca > 1$; очевидно p е естествено число. След заместване получаваме $|f(ab - bc + ca)| = |(b - a)(a - c)(a - b)(b + c)(a - c)(b + c)| = [(a - b)(a - c)(b + c)]^2$, което очевидно е точен квадрат. С това задачата е решена: една възможно стойност за p е $p = ab - bc + ca$.

Задача 3. Да се докаже, че за произволни реални положителни числа a , b и c е вярно неравенството:

$$(b+c)^2 a^4 - 2(b+c)(b^2+c^2)a^3 + (b+c)^2(b^2+c^2)a^2 - 2bc(b+c)(b-c)^2 a + b^2 c^2 (b-c)^2 > 0.$$

Веселин Ненков, Бели Осъм

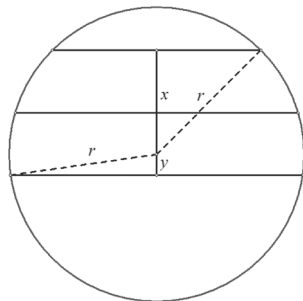
Решение (Веселин Ненков): Лесно се проверява, че разглежданото неравенство е еквивалентно с неравенството

$$\left[(b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + \frac{bc(b+c)(b-c)^2}{b^2+c^2} \right]^2 + \frac{8b^3c^3}{b^2+c^2}a^2 + \frac{4b^4c^4(b-c)^2}{(b^2+c^2)^2} > 0.$$

Последното неравенство е очевидно.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2010

Задача 1. В окръжност са построени две успоредни хорди с дължини съответно 10 и 14. Разстоянието между хордите е 6. Да се намери дължината на хордата в окръжността, която е успоредна на двете дадени и се намира на разстояние 3 от всяка от тях.



Решение: Нека разстоянията от центъра на окръжността до хордите с дължини 10 и 14 са съответно x и y . Нека r е радиусът на окръжността. От Питагоровата теорема следват равенствата $x^2 + 25 = r^2$ и $y^2 + 49 = r^2$, откъдето получаваме, че $x^2 - y^2 = 24$. Ако двете хорди се намират от една и съща страна спрямо центъра на окръжността, то $x - y = 6$. Но тогава $x + y = 4$, което е невъзможно. Следователно центърът на окръжността се намира между двете хорди, откъдето получаваме, че $x + y = 6$ и $x - y = 4$. Следователно $x = 5$, $y = 1$ и $r = 5\sqrt{2}$. Оттук лесно следва, че дължината на търсената хорда е $2\sqrt{46}$.

Задача 2. Нека x и y са реални числа такива, че $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$. Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на израза $3x + 4y$.

Решение: Нека a е произволна стойност на израза $3x + 4y$. Тогава системата
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6 \\ 3x + 4y = a \end{cases}$$
 има поне едно решение в реални числа $(x; y)$. Като използваме теоремата за заместване, получаваме, че y е решение на уравнението

$25z^2 + (114 - 8a)z + a^2 - 42a - 54 = 0$, чиято дискриминанта е неотрицателна при $a \in [-7; 73]$. Полученият интервал се състои от всички стойности, които приема изразът $3x + 4y$. Следователно най-малката и най-голямата стойност на израза са съответно -7 и 73 .

Задача 3. Едно положително реално число ще наричаме *специално*, ако в записа му като десетична дроб не участват други цифри, освен 0 и 7. Например числата $\frac{700}{99} = 7, (07)$ и $77,007$ са *специални*. Да се намери най-малкото естествено число n , за което числото 1 може да се представи като сбор на n *специални* числа.

Решение: Да отбележим, че числата $\frac{700}{999} = 0, (700)$, $\frac{7}{99} = 0, (07)$, $\frac{11111}{142857} = 0, (077777)$ и $\frac{1}{1287} = 0, (000777)$ са *специални*. Равенството

$\frac{700}{999} + \frac{7}{99} + \frac{7}{99} + \frac{11111}{142857} + \frac{11111}{142857} + \frac{1}{1287} + \frac{1}{1287} + \frac{1}{1287} = 1$ показва, че търсеното n е не повече от 8. Да допуснем сега, че за някое $n < 8$ е изпълнено равенството $1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са *специални* числа. Нека за всяко естествено k с a_k да означим броя на числата от множеството $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, чиято k -та цифра е 7. Тогава е вярно равенството $1 = \frac{7a_1}{10} + \frac{7a_2}{10^2} + \frac{7a_3}{10^3} + \dots$. Но оттук следва, че $\frac{1}{7} = 0,(142857) = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$. В частност $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 8, \dots$. Но равенството $a_4 = 8$ противоречи на $n < 8$. Ето защо търсеното n е 8.