

Конкурсни задачи

Рубриката се води от д-р Светлозар Дойчев

и д-р Веселин Ненков

## КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

**Задача 1.** В множеството на реалните числа е дефинирана бинарна операция  $\otimes: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ), която условно ще наричаме умножение. Умножението е такова, че за всеки три реални числа  $a$ ,  $b \neq 0$  и  $c$  е в сила равенството  $a \otimes (b \otimes c) = \frac{a \cdot c}{b}$ . Ако е известно, че  $2012 \otimes 2012 = 1$ , да се пресметне  $(2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012)$ .

Живко Желев, Стара Загора

**Задача 2.** Нека  $ABCD$  е правоъгълник, за който  $AB \geq CD$ , а  $M$  е такава вътрешна точка за  $ABCD$ , че  $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBC = 30^\circ$ . Да се докаже, че  $ABCD$  е квадрат тогава и само тогава, когато  $MA \cdot MC = 2(2 - \sqrt{3}) AB \cdot BC$ .

Каталин Кристеа, Крайова, Румъния

**Задача 3.** Нека  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ) са вътрешните ъгли на изпъкнал седмоъгълник. Каква зависимост съществува между коефициентите на уравнението  $ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$  ( $abcdefgh \neq 0$ ), ако корените му са равни на  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{20}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ )? Как би изглеждала зависимостта, ако корените на уравнението са  $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{20}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ )?

Милен Найденов, Варна

Краен срок за изпращане на решения 30 септември 2012 г.

## РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2011

**Задача 1.** Да се реши системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = n^3 + 1, \end{cases}$$

където  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са реални положителни числа.

*Решение:* От неравенствата между средните следва, че

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = n^2 \text{ и } \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{1}{\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n} = n^n.$$

Така получаваме  $n^3 + 1 \geq n^n + n^2$ , което води до  $n \leq 2$ . Ако  $n = 1$ , стигаме до

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = 2. \end{cases}$$

Нейните решения са  $(n, x_1) \in \{(1, 1)\}$ . При  $n = 2$  получаваме системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = 9, \end{cases}$$

решенията на която са  $(n, x_1, x_2) \in \left\{ \left(2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(2, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$ .

**Задача 2.** Във вътрешността на равностранния триъгълник  $ABC$  е взета точка  $P$ . Правите  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  пресичат съответно страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точките  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Да се докаже, че ако  $A'B^2 + B'C^2 + C'A^2 = AB'^2 + BC'^2 + CA'^2$ , то точката  $P$  лежи върху някоя от медианите на триъгълника  $ABC$ .

*Решение:* Нека  $AB = BC = CA = a$ , а лицата на триъгълниците  $BPC$ ,  $APB$  и

$APC$  съответно  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Имаме  $\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{AA'B}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{BPA'}}{S_{CPA'}} = \frac{S_{AA'B} - S_{BPA'}}{S_{AA'C} - S_{CPA'}} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{y}{z}$ .

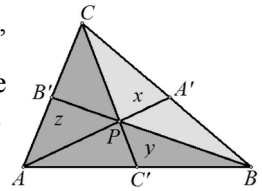
Оттук следва, че  $BA' = \frac{ay}{y+z}$  и  $A'C = \frac{az}{y+z}$ . По подобен начин се получават равенства за останалите четири отсечки. След заместване в даденото равенство стигаме до

$$\frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2}{(x+y)^2} = \frac{z^2}{(y+z)^2} + \frac{x^2}{(z+x)^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2},$$

което е еквивалентно с  $\frac{y^2 - z^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2 - x^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^2} = 0$ . Оттук намираме, че

$$\frac{(x-y)(z-x)(z-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 0. \text{ Следователно } x = y \text{ или } y = z,$$

или  $z = x$ . Затова  $P$  е такава, че поне два от триъгълниците  $BPC$ ,  $APB$  и  $APC$  са равнолицеви. Това означава, че  $P$  лежи върху някоя от медианите на  $\triangle ABC$ .



**Задача 3.** Да се докаже, че за всяко цяло положително число  $k$  уравнението  $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3 + x_{k+1}^3 = x_{k+2}^4$  има безброй много решения в цели положителни числа  $x_1, x_2, \dots, x_{k+2}$  такива, че  $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$ .

*Решение:* Тъй като  $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = (1+2+\dots+k)^2$ , то след заместване в уравнението на  $x_1 = x$ ,  $x_2 = 2x, \dots, x_k = kx$ ,  $x_{k+1} = (1+2+\dots+k)y^2$  и  $x_{k+2} = (1+2+\dots+k)y$  получаваме

$$(1^3 + 2^3 + \dots + k^3)x^3 + (1+2+\dots+k)^2 y^4 = (1+2+\dots+k)^4 y^4 \Leftrightarrow x^3 = ay^4,$$

където  $a = (1+2+\dots+k)^2 - 1 = \frac{(k-1)(k+1)(k^2+k+2)}{4}$ . Сега  $x = a^7 n^4$  и  $y = a^5 n^3$  образуват решение на уравнението  $x^3 = ay^4$  при произволно цяло положително  $n$ . Следователно  $x_1 = a^7 n^4$ ,  $x_2 = 2a^7 n^4$ ,  $\dots$ ,  $x_k = ka^7 n^4$ ,  $x_{k+1} = (1+2+\dots+k)a^{10} n^6$ ,  $x_{k+2} = (1+2+\dots+k)a^5 n^3$  образуват решение на даденото уравнението при произволно цяло положително  $n$ . Неравенствата  $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$  са очевидно изпълнени.