

КОНКУРЕНТНОСТ, ПОРОДЕНА ОТ ТАНГЕНТИ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Институт по математика и информатика – БАН

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В статията се разглежда Задача 4 от Международната олимпиада по математика през 2014 г., за която е предложено обобщение.

Keywords: conic, tangent, barycentric coordinates, Feuerbach configuration

На Международната олимпиада по математика през юли 2014 г. в Кейптаун, Южна Африка, беше предложена следната задача.

Върху страната BC на остроъгълния триъгълник ABC са избрани точки P и Q така, че $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Точките M и N съответно върху правите AP и AQ са такива, че P е среда на AM и Q е среда на AN . Да се докаже, че правите BM и CN се пресичат върху описаната около триъгълника ABC окръжност.

Нека Γ е описаната за $\triangle ABC$ окръжност, а t_b и t_c са допирателните на Γ съответно във върховете B и C . От свойството на периферния ъгъл се вижда, че $AP \parallel t_b$ и $AQ \parallel t_c$. Последното наблюдение ни довежда до идеята, че твърдението на задачата може да се обобщи със следната

Теорема. Нека $\bar{k}(O)$ е конично сечение с център O , описано за $\triangle ABC$, а t_b и t_c са допирателните на $\bar{k}(O)$ съответно в точките B и C . Точките P и Q от правата BC са такива, че $AP \parallel t_b$ и $AQ \parallel t_c$. Ако точките M и N са симетричните образи на A съответно спрямо P и Q , то правите BM и CN се пресичат върху $\bar{k}(O)$.

Наблюденията с програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP) потвърждават хипотезата, формулирана в горната теорема. За да обосновем формулирания резултат, е необходимо да извършим строго доказателство. Такова доказателство ще получим с използването на барицентрични координати спрямо дадения $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Преди да преминем към доказателството на теоремата, ще намерим уравнението на допирателната в произволна точка на дадено конично сечение в равнината на $\triangle ABC$.

1. Уравнение на допирателна в точка от конично сечение. В равнината на $\triangle ABC$ разглеждаме кривата k с уравнение

$$k: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0$$

и права l , минаваща през точка $M(x_M, y_M, z_M)$ ($x_M + y_M + z_M = 1$) и колинеарна с вектора (α, β, γ) ($\alpha + \beta + \gamma = 0$). Ако лявата част на уравнението на k е означена с $f(x, y, z)$ и $f_x(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$, $f_y(x, y, z) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$, $f_z(x, y, z) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$, където $a_{21} = a_{12}$, $a_{32} = a_{23}$ и $a_{13} = a_{31}$, след заместване на параметричните уравнения $x = x_M + \alpha t$, $y = y_M + \beta t$, $z = z_M + \gamma t$ на правата l в уравнението на k за параметъра t получаваме

$$f(\alpha, \beta, \gamma)t^2 + 2[f_x(x_M, y_M, z_M)\alpha + f_y(x_M, y_M, z_M)\beta + f_z(x_M, y_M, z_M)\gamma]t + f(x_M, y_M, z_M) = 0.$$

Ако M е точка от k и l е тангента за k , то $f(x_M, y_M, z_M) = 0$. Тогава $t = 0$ е корен на последното уравнение и за да е двоен корен на същото уравнение, трябва да е изпълнено равенството $f_x(x_M, y_M, z_M)\alpha + f_y(x_M, y_M, z_M)\beta + f_z(x_M, y_M, z_M)\gamma = 0$.

От $\alpha + \beta + \gamma = 0$ и последното равенство получаваме $\alpha = \frac{f_z - f_y}{f_y - f_x}\gamma$ и $\beta = \frac{f_x - f_z}{f_y - f_x}\gamma$.

Нека правата l има общо уравнение $l: ux + vy + wz = 0$. Лесно се вижда, че при $\alpha = v - w$, $\beta = w - u$ и $\gamma = u - v$ от параметричните уравнения на l се получава общото уравнение. Затова можем да положим $u = w - \beta$, $v = w - \alpha$. Тъй като $ux_M + vy_M + wz_M = 0$, то $w = -y_M\alpha + x_M\beta$. Оттук намираме $u = -y_M\alpha - (1 - x_M)\beta$, $v = (1 - y_M)\alpha + x_M\beta$, $w = -y_M\alpha + x_M\beta$. След заместване в последните равенства на получените по-горе изразявания за α и β чрез γ , като вземем предвид, че $x_M f_x(x_M, y_M, z_M) + y_M f_y(x_M, y_M, z_M) + z_M f_z(x_M, y_M, z_M) = 0$, получаваме равенството $f_x(x_M, y_M, z_M)x + f_x(x_M, y_M, z_M)y + f_x(x_M, y_M, z_M)z = 0$. Сега от дефиницията на $f_x(x_M, y_M, z_M)$, $f_y(x_M, y_M, z_M)$ и $f_z(x_M, y_M, z_M)$ получаваме, че уравнението на тангентата l през точката M на k има следното уравнение:

$$(1) l: (a_{11}x_M + a_{12}y_M + a_{13}z_M)x + (a_{21}x_M + a_{22}y_M + a_{23}z_M)y + (a_{31}x_M + a_{32}y_M + a_{33}z_M)z = 0.$$

2. Доказателство на теоремата. Описаната крива $\bar{k}(O)$ принадлежи на Фойербахова конфигурация, в която центърът на една от вписаните в $\triangle ABC$ криви е точката $I(x_I, y_I, z_I)$ (Ненков, 2010). Тогава уравнението на $\bar{k}(O)$ може да се представи във вида:

$$(2) \quad \bar{k}(O): x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy = 0.$$

От (1) и (2), когато M съвпада с B и C , се получават уравненията съответно на допирателните t_b и t_c във вида: $t_b : z_l^2 x + x_l^2 z = 0$, $t_c : y_l^2 x + x_l^2 y = 0$. Тъй като правата с уравнение $ux + vy + wz = 0$ е колинеарна с вектора $(v - w, w - u, u - v)$, то векторите $\vec{t}_b(-x_l^2, x_l^2 - z_l^2, z_l^2)$ и $\vec{t}_c(x_l^2, -y_l^2, y_l^2 - x_l^2)$ са колинеарни съответно с допирателните t_b и t_c . Сега за параметричните уравнения на правите $l_b \parallel t_b$ и $l_c \parallel t_c$ намираме

$$l_b : x = 1 - x_l^2 p, y = (x_l^2 - z_l^2) p, z = z_l^2 p,$$

$$l_c : x = 1 + x_l^2 q, y = -y_l^2 q, z = (y_l^2 - x_l^2) q.$$

Оттук при $x = 0$ се получават координатите на точките P и Q във вида: $P\left(0, \frac{x_l^2 - z_l^2}{x_l^2}, \frac{z_l^2}{x_l^2}\right)$, $Q\left(0, \frac{y_l^2}{x_l^2}, \frac{x_l^2 - y_l^2}{x_l^2}\right)$. Сега за симетричните точки M и N на A спрямо P и Q получаваме $M\left(-1, \frac{2(x_l^2 - z_l^2)}{x_l^2}, \frac{2z_l^2}{x_l^2}\right)$ и $N\left(-1, \frac{2y_l^2}{x_l^2}, \frac{2(x_l^2 - y_l^2)}{x_l^2}\right)$. От координатите на M и N намираме параметричните уравнения на правите BM и CN във вида:

$$BM : x = m, y = 1 + \frac{2z_l^2 - x_l^2}{x_l^2} m, z = -\frac{2z_l^2}{x_l^2} m,$$

$$CN : x = n, y = -\frac{2y_l^2}{x_l^2} n, z = 1 + \frac{2y_l^2 - x_l^2}{x_l^2} n.$$

С помощта на тези уравнения заключаваме, че пресечната точка T на правите BM и CN има следните координати

$$T\left(\frac{x_l^2}{x_l^2 - 2y_l^2 - 2z_l^2}, -\frac{2y_l^2}{x_l^2 - 2y_l^2 - 2z_l^2}, -\frac{2z_l^2}{x_l^2 - 2y_l^2 - 2z_l^2}\right).$$

Непосредственото заместване на тези координати в лявата част на (2) води до верно тждество. С това теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & Ненков, В. (2013). Един специален вид криви от втора степен, породени от точката на Нагел. *Математика плюс*, 21 (2), 44 – 53.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2014). Крива на Чева за точка от равнината на триъгълник. *Математика и информатика*, 57 (3), 285 – 298.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2009). Една крива от втора степен за две точки на Чева. *Математика и математическо образование*, 38, 245 – 248.

- Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, 53 (5), 42 – 61.
- Ненков, В. (2008). Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, 51 (2), 35 – 42.
- Паскалев, Г. & Чобанов, И. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
- Хитов, Х. (1990). *Геометрия на триъгълника*. София: Народна просвета.

REFERENCES

- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2013). Edin specialen vid krivi ot vtora stepen, porodeni ot tochkata na Nagel, *Matematika Plus*, 21 (2), 44 – 53.
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2014). Kriva na Cheva za tochka ot ravninata na tri'g'lnik *Matematika i Informatika*, 57 (3), 285 – 298.
- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2009). Edna kriva ot vtora stepen za dve tochki na Cheva. *Matematika i matematichesko obrazovanie*, 38, 245 – 248.
- Nenkov, V. (2010). Nyakolko svoystva na Feuerbahovata kongiguracia. *Matematika i Informatika*, 53 (5), 42 – 61.
- Nenkov, V. (2008). Obobshtenie na teoremata na Feuerbah. *Matematika i Informatika*, 51 (2), 35 – 42.
- Paskalev, G. & Chobanov, G. (1985). *Zabelezhitelni tochki v tri'g'lnika*. Sofia: Narodna prosveta.
- Hitov, H. (1990). *Geometriya na tri'g'lnika*. Sofia: Narodna prosveta.

A CONCURRENCE, GENERATED BY TANGENTS

Abstract. The paper considers Problem 4 from the paper of the International Mathematical Olympiad in 2014 and proposes a generalization of it.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
31, Sajko Saev Str.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg