Educational Technologies
Образователни технологии

КОМПЮТЪРНО ГЕНЕРИРАНА МАТЕМАТИКА: ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА КОСНИТА В ЕВКЛИДОВАТА ГЕОМЕТРИЯ

Сава Гроздев, Деко Деков
Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. Произведенията на Коснита на забележителни точки в триъгълника са въведени през 2011 г. от Randy Hutson. В енциклопедиите на Weisstein и Kimberling са дадени таблици с теореми за произведения на Коснита. В статията се показва как тези таблици могат да бъдат разширени с помощта на компютърната програма „Откривател“. Статията съдържа 70 теореми за произведения на Коснита, открити от „Откривател“.

Keywords: computer-generated mathematics, Kosnita product, Euclidean geometry, Discoverer.

1. От таблици с теореми към тема

В тази статия се предполага, че читателят е запознат с предишни техни статии, посветени на компютърната програма „Откривател“, (виж Гроздев & Деков, 2013a), (Гроздев & Деков, 2013b) и (Гроздев & Деков, 2014) .

В Евклидовата геометрия е известна следната теорема на Коснита (виж например Weisstein, Kosnita Theorem):

Теорема 1. Нека O е центърът на описаната около ΔABC окръжност и нека O_1, O_2 и O_3 са центровете на окръжностите, описани съответно около триъгълниците OBC, OCA и OAB. Тогава правите AO_1, BO_2 и CO_3 се пресичат в една точка.

Пресечната точка на правите в горната теорема се нарича *точка на Коснита*, а триъгълникът $O_1O_2O_3$ се нарича *триъгълник на Коснита*. По подобен начин се формулират още няколко теореми. През 2006 г. при подготовката на прототипа на „Откривател“ е обобщена конструкцията на теоремата на Коснита, както следва, виж (JCGM, Triangulation Triangles, 2007). Нека е даден ΔABC и нека P и Q са забележителни точки на триъгълника. Нека A_1, B_1 и C_1 са забележителните точки от тип Q съответно на триъгълниците PBC, PCA и PAB, т.е. A_1 = Q-of-PBC, B_1 = Q-of-PCA, C_1 = Q-of-PAB. Тогава $\triangle A_1B_1C_1$ се нарича *триъгълник на Коснита* на P и Q. Точката P се нарича *точка на триангулация*. Триъгълниците PBC, PCA и PAB. наричаме *триангулационни триъгълници*. В някои случаи триъгълниците на

Коснита са перспективни с ΔABC. Примери, открити от прототипа на „Откривател“, са дадени в (JCGM, Triangulation Triangles, 2007).

През 2011 г. Randy Hutson (Kimberling, X(54) Kosnita Point) прави още една стъпка, като въвежда понятието произведение на Коснита на точките P и Q, означавано с K (P, Q). Ако триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са перспективни, казваме че центърът на перспектива (перспекторът) е *произведение на Коснита на точките P и* Q. Ще отбележим, че в статията (Гроздев & Деков, 2013b) се използва терминът „триангулционно произведение“, който тук е отпаднал.

В енциклопедията (Kimberling), статията X(54) Kosnita Point, е дадена таблица с примери на произведения на Коснита. В енциклопедията (Weinsstein), статията Triangulation Point, също е дадена таблица с примери на произведения на Коснита. Целта сега е да разширим тези таблици, като получим една по-голяма таблица с примери на произведения на Коснита, която съдържа тези таблици. Тази задача може лесно да се реши с помощта на компютърната програма „Откривател“.

Първо, трябва да решим какво множество от забележителни точки да вземем като точки на триангулация. За да разширим таблиците на Kimberling и Weinsstein, от базата данни с точки на „Откривател“ избираме точките на триангулация, включени в тези таблици. Освен това прибавяме и няколко нови точки на триангулация по наш избор. Нека сме избрали множеството, подредено като списък List 1 в приложения файл List1.htm. Същото множество от забележителни точки ще използваме и при конструирането на върховете на триъгълниците на Коснита. В други примери могат да се изберат други множества.

По-нататък „Откривател“ конструира триъгълниците на Коснита. Тези триъгълници са дадени като списък List 2 във файла List2.htm. Списъкът List 1 съдържа 27 забележителни точки, така че би трябвало в List 2 да бъдат включени $27^2 = 729$ триъгълника на Коснита. Списъкът List 2 обаче съдържа 725 триъгълника. Причината е, че четири от триъгълниците на Коснита са изродени, т.е. имат лице, равно на нула. С „Откривател“ можем лесно да намерим кои триъгълници са изродени.

Задача за читателя. Покажете, че следните триъгълници са изродени:
a) Kosnita Triangle of the Orthocenter and the Nine-Point Center;
b) Kosnita Triangle of the Outer Fermat Point and the Outer Fermat Point;
c) Kosnita Triangle of the Outer Fermat Point and the Inner Napoleon Point;
d) Kosnita Triangle of the Inner Fermat Point and the Inner Fermat Point.

Упътване. а) Трите върха на триъгълника съвпадат с точката X(4859) от (Kimberling), която пък съвпада с един от върховете на педалния триъгълник на центъра на окръжността, описана около медиалния триъгълник.

b) Трите върха на триъгълника съвпадат с точката на Ферма (Outer Fermat Point).

c) Трите върха на триъгълника лежат върху една права.

d) Два от върховете на триъгълника съвпадат.

След това „Откривател“ намира произведенията на Коснита и ги подрежда в списъка List P, даден във файла 1_List_P.php.htm. Виждаме, че списъкът List P съдържа 70 произведения на Коснита. Това означава, че 70 от триъгълниците на Коснита, дадени в List 2, са перспективни с ΔABC, а останалите 705 от List 2 не са перспективни с ΔABC.

За да изучим точките, които са произведения на Коснита, към List P прилагаме процедурата за частична идентификация на точки, описана в (Гроздев & Деков, 2013b). Ако една точка от List P е включена в енциклопедията на Кимбърлин, то процедурата идентифицира точката с точка от (Kimberling). List K показва, че 39 от 70 точки, включени в List P, са включени в (Kimberling), а останалите точки от List P са включени в List D. Освен файловете от процедурата за частична идентификация на точки в този случай „Откривател“ произвежда и два допълнителни файла с таблици, файловете Table_P-Q-X.php.htm и Table_X-P-Q.php.htm, които в някои случаи са по-удобни за прочит на теоремите.

2. Преглед на резултатите

Да се върнем към изходните таблици с теореми на (Weisstein) и (Kimberling).

За да сравним получените резултати с резултатите от таблицата на (Weisstein, Triangulation Point), удобно е да ползваме таблицата Table P-Q-X, дадена във файла Table_P-Q-X.php.htm. Таблицата на (Weisstein) съдържа пет теореми за произведения на Коснита. Тези теореми са включени в Table P-Q-X, с изключение на една. Произведението на Коснита на точката на Ферма (Outer Fermat Point) със същата точка не съществува, защото съответният триъгълник на Ферма е изроден (виж списъка с изродените триъгълници, даден по-горе).

За да сравним получените резултати с резултатите от таблицата на (Kimberling, X(54)), удобно е да ползваме таблицата Table X-P-Q, дадена във файла Table_X-P-Q.php.htm. Таблицата на (Kimberling, X(54)) съдържа десет теореми за произведения на Коснита. Тези теореми са включени в Table X-P-Q, с изключение на една. Теоремата X(13) = K(X(10),X(1)) не е вярна, както читателят би могъл да се убеди самостоятелно.

Виждаме, че с „Откривател“ можем лесно да разширим таблици с теореми за произведения на Косинта, като поправим и грешките в тях, ако има такива. В откритите от „Откривател“ теореми са срещат и популярни теореми, които компютърната програма е преоткрила. В List P-X, ред 1, намираме следната теорема:

Теорема 2. The First de Villiers Point is the Kosnita Product of the Incenter and the Incenter.

Теорема 2 е известната теорема на De Villiers. В този случай триъгълникът на Коснита е известният триъгълник на De Villiers. За теоремата на De Villiers виж например (De Villiers 1996), (De Villiers 2009), (Weisstein, BCI Triangle).

В List P-X, ред 9, намираме следната теорема:

Теорема 3. The Nine-Point Center is the Kosnita Product of the Orthocenter and the Circumcenter.

В горната теорема триъгълникът на Коснита е известният триъгълник на Карно. За триъгълника на Карно виж (Castellsaguer, Carnot Triangle).

Ще отбележим, че при изучаване на темата за произведения на Коснита може да бъде полезна следната теорема, доказана в (Гроздев & Деков, 2013b).

Теорема 4. The Kosnita Product of an arbitrary Point P and the Centroid is the Complement of the Complement of Point P.

В допълнение към казаното за тази теорема в (Гроздев & Деков, 2013b) ще отбележим, че ако в теорема 4 разглеждаме произведението на Коснита като център на хомотетия с коефициент $k = -\frac{1}{3}$, то тази хомотетия изобразява ΔABC в триъгълника на Коснита. Доказателство на теоремата, с добавката за хомотетията, е дадено в приложения файл Theorem4.mws на Maple. Доказателството използва барицентрични координати. За барицентричните координати виж (Гроздев & Ненков, 2012a,b). С Maple е лесно да се произвеждат доказателства, защото трябва да се пишат само команди, като самата компютърна програма извършва алгебричните преобразувания.

В горния пример на разработена тема получихме (в List P) 70 теореми, утвърждаващи съществуването на перспективност между триъгълници, а в някои случаи (в List K) даващи и характеризация на перспектора. Ще отбележим, че ако един триъгълник е включен в List 2, но за него няма теорема в List P, това означава че триъгълникът *ABC* и този триъгълник не са перспективни, което също е теорема, заслужаваща интерес. Ако включим и теоремите от този вид, общият брой на теоремите сава 725. Авторите предполагат, че някои от тези теореми са нови.

Като стартово множество по-горе със забележителни точки беше избрано множеството List 1, което съдържа 27 забележителни точки на триъгълника. Можем да изберем някое друго стартово множество от забележителни точки от базата данни на „Откривател“, като продължим с разширяването на резултатите. Разширяването може лесно да продължи с помощта на „Откривател“. Трябва само да се щрака с мишката. Понастоящем базата данни с точки на „Откривател“ съдържа около 500 хиляди забележителни точки, с планирано разширение до 5 милиона.

При разработването на горната тема приехме, че търсим перспектори на триъгълници на Коснита и ΔABC. Можем да търсим обаче наличието на перспектива на триъгълници на Коснита не само с ΔABC, но и с други триъгълници от базата данни със забележителни триъгълници на „Откривател". В този случай можем да говорим за „обобщено произведение на Коснита", като едно такова произведение зависи от триъгълник T. Обобщеното произведение на Коснита се свежда до обикновеното произведение на Коснита, когато триъгълникът T съвпада с ΔABC. В тази насока „Откривател" може да произведе голям брой резултати, които тук няма да разглеждаме.

В Евклидовата геометрия има голям брой конструкции, зависещи от две забележителни точки. Подобно на конструкцията на произведението на Коснита можем да предефинираме редица конструкции като произведения на забележителни точки. Авторите възнамеряват да разгледат тези въпроси в други публикации.

3. Нови забележителни точки на тръгълъника

Ако искаме да изследваме нови забележителни точки на триъгълника, трябва да погледнем List D. В този списък са точки, които не са включени в енциклопедията на Кимбърлин, така че може да се предполага, че тези точки не са изучени в литературата.

Всеки ред от списъка List D може да бъде прочетен като теорема, която утвърждава съществуването на перспективни триъгълници. Да разгледаме следните две теореми от List D:

Теорема 5. (List D, 24) Kosnita Product (Homothetic Center) of the Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle and the Centroid exists..

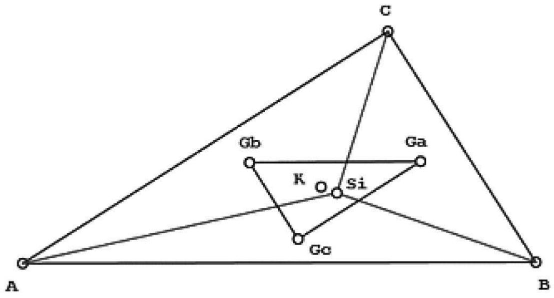
Теорема 6. (List D, 25) Kosnita Product (Homothetic Center) of the External Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle and the Centroid exists.

В статията (Гроздев & Деков, 2013b) са дадени примери за преформулиране на теореми, произведени от „Откривател", като задачи. Бихме могли да преформулираме теореми 5 и 6 като задачи.

Задача 1. Нека е даден ΔABC и нека Si е вътрешният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на ΔABC. Нека Ga, Gb и Gc са медицентровете съответно на триъгълниците $SiBC$, $SiCA$ и $SiAB$. Докажете, че правите AGa, BGb и CGc се пресичат в една точка, която е център на хомотетия, изобразяваща ΔABC в $\Delta GaGbGc$ (фиг.1).

Читателят може да преформулира теорема 6 като задача, като използва условието на задача 1, в което думата „вътрешният" е заменена с „външният".

Горните теореми са частни случаи на Теорема 4 (с добавката за хомотетията, дадена след текста на теоремата). Така можем да считаме теореми 5 и 6 за доказани.



Фигура 1. Правите *AGa*, *BGb* и *CGc* се пресичат в точка *K*. На чертежа правите не са начертани

Можем да получим и самостоятелни техни доказателства, т.е. доказателства, които да използват теорема 4. В доказателството на теорема 4 трябва барицентричните координати на произволната точка *P* да се заменят с барицентричните координати на вътрешния (съответно външния) център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$. За барицентричните координати на тези две точки виж например (Kimberling, X(55), X(56). В началото на файла Theorem4.mws лесно можем да направим посочените промени, като получаваме файловете Theorem5.mws и Theorem6.mws, които са приложени.

В теореми 5 и 6 перспекторите не са посочени, но като отчетем теорема 4, виждаме, че тези перспектори са следните точки:

A1. Complement of the Complement of the Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle.

A2. Complement of the Complement of the External Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle.

При анонсиране на нова забележителна точки на триъгълника е желателно да бъдат посочени барицентричните координати на новата точка. (В енциклопедията на Кимбърлин това е задължително). С Maple можем лесно да получим барицентричните координати на точките A1 и A2. Първата барицентрична координата на точката A1 е следната:

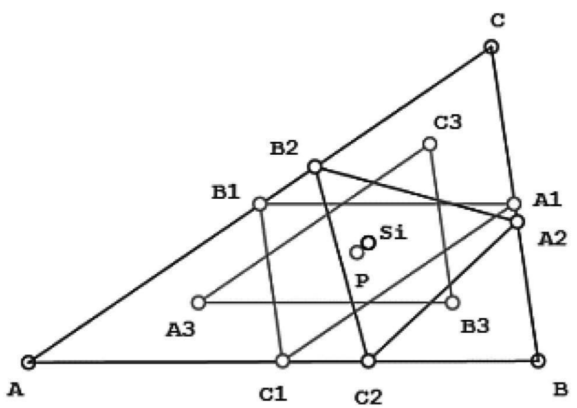
$$u = 2a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c).$$

Останалите две координати получаваме циклично. Файлове с барицентричните координати на A1 и A2 са приложени. Това са съответно файловете Point_A1.mws и Point_A2.mws.

С „Откривател“ можем да намерим някои роли на „новите“ („нови“, в смисъл че не са включени в енциклопедията на Кимбърлин) забележителни точки A1 и

A2. За целта трябва да приложим процедурата „Идентификация на точка“. „Откривател“ притежава подобни процедури за всеки вид забележителни обекти на триъгълника. При тази процедура намираме ролите на точката, определяме върху какви окръжности и върху какви прави лежи точката и т.н. Тъй като базата данни на „Откривател“ е в процес на разработване, тук ще дадем само файлове ListA1.htm и ListA2.htm, които съдържат някои роли на точки, получени с използването на част от базата данни на „Откривател“. Файл ListA1.htm съдържа пет роли на точката A1. Като отчетем и двете роли, дадени по-горе, получаваме общо седем роли, едната от които бихме могли да приемем за определение на точката. Друг подход е да считаме всички роли за равностойни и също, че множеството на всички роли определя точката. Ако вземем две от ролите на една точка, можем да композираме задача, в която участват двете избрани роли. Например, ако вземем роля, дадена по-горе, и роля 5 от списъка с роли, даден във файла ListA1.htm, можем да съставим следната теорема (Колко общо теореми можем да съставим за точка A1 по този начин?):

Теорема 7. The Complement of the Complement of the Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle is the Perspector and Homothetic Center of the Medial Triangle and the Triangle of the Circumcenters of the Pedal Corner Triangles of the Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle.



Фигура 2. Правите A_1A_3, B_1B_3 и C_1C_3 се пресичат в точка P. На чертежа правите не са изобразени.

Можем да преформулираме теорема 7 като задача:

Задача 2. Нека е даден $\triangle ABC$ и нека $\triangle A_1B_1C_1$ е неговият медиален триъгълник. Нека Si е вътрешният център на хомотетия на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$ и нека $\triangle A_2B_2C_2$ е педалният тръгълник на Si. Нека A_3 е центърът на описаната около AC_2B_2 окръжност. Аналогично определяме точките B_3 и C_3. Нека G е медицентърът на ΔABC и нека точка P дели вътрешно отсечката SiG в отношение $SiP : PG = 3:1$. Докажете, че правите A_1A_3, B_1B_3 и C_1C_3 се пресичат в точка P (фиг. 2).

Подобно на горните две точки A1 и A2 с помощта на „Откривател“ можем да изследваме и останалите предполагаемо нови точки от списъка List D. Ще отбележим, че в List D има изброени 31 точки, но две от тези точки съвпадат. Така всъщност в списъка има 30 различни „нови“ точки. С „Откривател“ можем лесно да намерим кои две точки съвпадат.

Задача за читателя. Покажете, че точките, които в List D са на редове 14 и 15, съвпадат.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Към статията е приложен файлът kosnita.zip, който съдържа файловете, които са цитирани в тази статия. Този файл може да бъде изтеглен от уеб страницата на книжката на списанието.

БЕЛЕЖКИ

1. Weisstein, E. W., MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/
2. Kimberling, C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
3. de Villiers, M., (2009), From the Fermat point to the De Villiers points of a triangle, http://frink.machighway.com/~dynamicm/devillierspoints.pdf
4. Castellsaguer, Q, Quim Castellsaguer 's The Triangles Web, http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttweng/portada.html
5. JCGM, Journal of Computer-Generated Mathematics (до 2011 г. Journal of Computer-Generated Euclidean Geometry), http://www.ddekov.eu/j/

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012a). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед.
2. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.
3. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013a). По пътя към първата компютърно генерирана енциклопедия, *Математика и информатика*, *1*, 49 – 59.
4. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013b). Някои приложения на компютърната програма „Откривател“, *Математика и информатика*, *5*, 444 – 455.
5. Гроздев, С. & Деков, Д. (2014). Компютърно генерирана математика: Разработва-

не на тема от Евклидовата геометрия, *Математика и информатика*, *1*, 34 – 42.
6. De Villiers, M. (1996). A dual to Kosnita's theorem, *Mathematics & Informatics Quarterly*, *6*(3), 169-171, копие в интернет: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/kosnita.htm

REFERENCES:

1. Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012a). Tri zabelezhitelni tochki varhu medianite na triagalnika. Sofiya: Arhimed.
2. Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012b). Okolo ortotsentara v ravninata i prostranstvoto. Sofiya: Arhimed.
3. Grozdev, S. & Dekov, D. (2013a). Po patya kam parvata kompyutarno generirana entsiklopediya, Matematika i informatika, 1, 49 – 59.
4. Grozdev, S. & Dekov, D. (2013b). Nyakoi prilozheniya na kompyutarnata programa „Otkrivatel“, Matematika i informatika, 5, 444 – 455.
5. Grozdev, S. & Dekov, D. (2014). Kompyutarno generirana matematika: Razrabotvane na tema ot Evklidovata geometriya, Matematika i informatika, 1, 34 – 42.
6. De Villiers, M. (1996). A dual to Kosnita's theorem, Mathematics & Informatics Quarterly, 6(3), 169-171, kopie v internet: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/kosnita.htm

COMPUTER-GENERATED MATHEMATICS: KOSNITA PRODUCTS IN EUCLIDEAN GEOMETRY

Abstract. In 2011 Randy Hutson introduced the notion of Kosnita products. In the encyclopedias of Weisstein and Kimberling some tables are given with theorems on Kosnita products. It is shown in the paper how these tables could be extended by mens of the computer program "Discoverer". The paper contains 70 theorems on Kosnita products, produced by "Discoverer".

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Deko Dekov, Assoc. Prof.**
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: ddekov1@gmail.com