

КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ, СВЪРЗАНИ С ТРИЪГЪЛНИК

¹⁾Росен Николаев, ²⁾Танка Милкова, ³⁾Катя Чалъкова

^{1), 2)} Икономически университет – Варна

³⁾ ПМГ „Иван Вазов“ – Димитровград

Резюме. В настоящата статия се разглежда приложение на неравенството на триъгълника за целочислени триъгълници. Намерени са формули за броя им в случаите на равностранны, равнобедрени и разностранни триъгълници. Формулите дават възможност за бързо решаване на задачи в редовните часове по математика в училище, а така също и на ниво състезания.

Keywords: triangle inequality; integer triangle; counting; combinatorics

Неравенството на триъгълника „сборът от дължините на кои да е две негови страни не надминава дължината на третата“ се изучава с доказателство в VII клас на българското училище. Опитът показва, че то може да се преподава още в IV клас. С помощта на експерименти учениците лесно стигат до извода, че не всеки три отсечки могат да бъдат страни на триъгълник. Макар и „елементарно“, неравенството на триъгълника е със съдържателни приложения. То може да бъде съчетано със знания по геометрия, комбинаторика, теория на числата и теория на вероятностите за по-големи ученици. В тази статия се използват комбинаторни разсъждения и се стига до задачи с повишена трудност. Мерните единици за дължините на страните на съответните триъгълници не са уточнени и се предполага, че те са едни и същи. Използва се понятието *целочислен триъгълник*, което означава, че дължините на страните са цели числа.

Задача 1. Колко различни разностранни целочислени триъгълника съществуват, дължините на страните на които се изменят в множеството $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$?

Решение: от неравенството на триъгълника непосредствено следва, че:

- 1) числото 1 не може да бъде дължина на страна на разностранен триъгълник;
- 2) за триъгълници, една от дължините на страните на които е 2, съществуват следните възможности: (2;3;4); (2;4;5); (2;5;6), т.е. съществуват три такива триъгълника;
- 3) възможностите за триъгълници, най-малката страна на които е с дължина 3, възможностите са: (3;4;5); (3;4;6) и (3;5;6), т.е. и техният брой е три;

4) за триъгълници с най-малка дължина на страна 4 има само една възможност (4;5;6).

Така окончателно получаваме като отговор на задачата, че броят на всички различни разностранни триъгълници с дължини на страните в указаното множество е седем.

Задача 2. Колко са всички различни триъгълници, дължините на страните на които се изменят в множеството $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$?

Решение: съгласно задача 1. броят на разностранните триъгълници е седем. Ще пресметнем броя на равностранните и на равнобедрените триъгълници, които не са равностранни. Ясно е, че броят на равностранните триъгълници е шест – съответно с дължини на страните 1, 2, 3, 4, 5 и 6. По-нататък имаме:

- равнобедрени триъгълници с дължина на бедрото 1 не съществуват;
- равнобедрените триъгълници с дължина на бедрото 2 са: (2;2;1) и (2;2;3), т.е. те са два броя;
- равнобедрените триъгълници с дължина на бедрото 3 са: (3;3;1), (3;3;2), (3;3;4) и (3;3;5), т.е. техният брой е четири;
- равнобедрените триъгълници с дължина на бедрото 4 са: (4;4;1), (4;4;2), (4;4;3); (4;4;5) и (4;4;6), т.е. техният брой е пет;
- равнобедрените триъгълници с дължина на бедрото 5 са: (5;5;1), (5;5;2), (5;5;3), (5;5;4) и (5;5;6), т.е. техният брой е пет;
- равнобедрените триъгълници с дължина на бедрото 6 са: (6;6;1), (6;6;2), (6;6;3), (6;6;4) и (6;6;5), т.е. техният брой е пет.

Така, броят на всички различни триъгълници в дадената задача е :

$$7 + 6 + 2 + 4 + 5 + 5 + 5 = 34.$$

В двете разгледани задачи дължините на страните се изменят в множеството $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Сега ще разширим това множество и ще предполагаеме, че дължините на страните на триъгълниците се изменят в множеството $\{1; 2; 3; \dots; n\}$.

Задача 3. Колко е броят на всички различни разностранни целочислени триъгълници с дължини на страните в множеството $\{1; 2; 3; \dots; n\}$?

Решение: нека a_n е търсеният брой. При $n = 3$, $a_3 = 0$. При $n = 4$, триъгълникът е само един – (2;3;4), т.е. $a_4 = 1$. Като продължим, следвайки логиката на разсъждения от задача 1., получаваме:

- при $n = 5$, $a_5 = 3$;
- при $n = 6$, $a_6 = 7$;
- при $n = 7$, $a_7 = 13$;

– при $n = 8$, $a_8 = 22$;
и т.н.

Целта е да намерим зависимост за a_n . Следващите разсъждения се базират на анализи, а не на строги доказателства. Ще достигнем до формули и до хипотеза за вида на a_n , за строгото доказателство на която ще използваме принципа на пълната математическа индукция.

Да разгледаме последователните разлики на членовете на редицата a_n :

$$b_3 = a_3 - a_2 = 0;$$

$$b_4 = a_4 - a_3 = 1;$$

$$b_5 = a_5 - a_4 = 2;$$

$$b_6 = a_6 - a_5 = 4;$$

$$b_7 = a_7 - a_6 = 6;$$

$$b_8 = a_8 - a_7 = 9;$$

и т.н.

Хипотезата е, че:

$$b_{2l+1} = l \cdot (l-1);$$

$$b_{2l} = (l-1)^2.$$

Тогава:

Първи случай: $n = 2l + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{2l+1} b_i &= \sum_{i=3}^{2l+1} (a_i - a_{i-1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^l i(i-1) + \sum_{i=2}^l (i-1)^2 = a_{2l+1} - a_2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^l i^2 - \sum_{i=1}^l i + \sum_{i=2}^l (i-1)^2 = a_{2l+1} \end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned}
 a_{2l+1} &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} - \frac{l(l+1)}{2} + \frac{(l-1)l(2l-1)}{6} = \\
 &= \frac{l(l+1)}{2} \left(\frac{2l+1}{3} - 1 \right) + \frac{(l-1)l(2l-1)}{6} = \\
 &= \frac{l(l-1)}{6} (2l+2+2l-1) = \\
 &= \frac{l(l-1)(4l+1)}{6}
 \end{aligned}$$

Втори случай: $n = 2l$.

$$\begin{aligned}
 a_{2l} - a_2 &= a_{2l} = \\
 &= \sum_{i=1}^{l-1} i(i-1) + \sum_{i=1}^l (i-1)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^{l-1} i^2 - \sum_{i=1}^{l-1} i + \sum_{i=1}^l (i-1)^2 = \\
 &= \frac{(l-1)l(2l-1)}{6} - \frac{l(l-1)}{2} + \frac{(l-1)l(2l-1)}{6} = \\
 &= \frac{l(l-1)(4l-5)}{6} = a_{2l}
 \end{aligned}$$

С помощта на горното ще докажем следното твърдение.

Теорема 1. Броят a_n на всички разностранни целочислени триъгълници с дължини на страните в множеството $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ е:

1) $a_{2l+1} = \frac{l(l-1)(4l+1)}{6}$, ако $n = 2l+1$, $l \geq 1$;

2) $a_{2l} = \frac{l(l-1)(4l-5)}{6}$, ако $n = 2l$, $l \geq 1$.

Доказателство: ще използваме принципа на пълната математическа индукция.

Първи случай: $n = 2l + 1$.

$n = 3 \Rightarrow l = 1$, вече показахме, че $a_3 = 0$ и по формулата $a_3 = \frac{1 \cdot 0 \cdot 1}{6} = 0$.

$n = 5 \Rightarrow l = 2$, по формулата $a_5 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 9}{6} = 3$ и в зад. 3 в решението също получихме $a_5 = 3$.

Да допуснем, че за нечетни стойности n до $2l-1$ е вярна формулата

(1) $a_{2l-1} = \frac{(l-1)(l-2)}{6}$, $l = 2; 3; \dots$

Ще докажем, че формулата е вярна при $n = 2l + 1$, т.е. $a_{2l+1} = \frac{l(l-1)(4l+1)}{6}$. Нека първо да разгледаме множеството $\{1; 2; 3; \dots; 2l-1; 2l\}$. По индукционно допускане броят на всички разностранни триъгълници със страни, в които не участва $2l$, се пресмята по формулата по-горе.

Сега ще пресметнем броя на разностранните триъгълници, в които едната страна е $2l$. Другите две страни са от множеството $\{1; 2; 3; \dots; 2l-1\}$. Нека те са p и q , като $p < q$. Необходимо е $p + q > 2l$.

Разглеждането на всички случаи е представено в таблица 1.

Таблица 1

p	q	Брой на тройките ($p, q, 2l$)
1	Няма такива	0
2	$2l-1$	1
3	$2l-2; 2l-1$	2
4	$2l-3; 2l-2; 2l-1$	3
...	...	...
$l-1$	$l+2; l+3; \dots; 2l-1$	$l-2$
l	$l+1; l+2; \dots; 2l-1$	$l-1$
$l+1$	$l+2; l+3; \dots; 2l-1$	$l-2$
$l+2$	$l+3; l+4; \dots; 2l-1$	$l-3$
...	...	...
$2l-3$	$2l-2; 2l-1$	2
$2l-2$	2 1	1

За общия брой на тройките $(p, q, 2l)$ имаме:

$$1 + 2 + 3 + \dots + l-2 + l-1 + l-2 + \dots + 2 + 1 = 2(1 + 2 + \dots + l-2) + l-1 =$$

$$(2) \quad = \frac{2(1+l-2)(l-2)}{2} + l-1 = (l-1)(l-2) + l-1 = (l-1)^2$$

Сега да разгледаме множеството $\{1; 2; 3; \dots; 2l-1; 2l; 2l+1\}$ и да пресметнем броя на всички разностранни триъгълници, едната страна на които е с дължина $2l+1$. Да означим другите две страни с p и q $p < q$ и $p, q \in \{1; 2; \dots; 2l\}$. Необходимо е $p + q > 2l+1$. Резултатите са представени в таблица 2.

Таблица 2

p	q	Брой на тройките $(p, q, 2l)$
1	Няма такива	0
2	$2l$	1
3	$2l-1; 2l$	2
4	$2l-2; 2l-1; 2l$	3
...	...	...
$l-2$	$l+4; l+5; \dots 2l$	$l-3$
$l-1$	$l+3; l+4; \dots 2l$	$l-2$
l	$l+2; l+3; \dots 2l$	$l-1$
$l+1$	$l+2; l+3; \dots 2l$	$l-1$
$l+2$	$l+3; l+4; \dots 2l$	$l-2$
...	...	...
$2l-1$	$2l$	1

Заклучаваме, че общият брой на тройките $(p, q, 2l+1)$ е равен на:

$$1+2+3+\dots+l-2+l-1+l-1+l-2+\dots+3+2+1=2(1+2+\dots+l-1)=$$

$$= \frac{l(l-1)}{2} = l(l-1).$$

Така броят на всички разностранни триъгълници, чиито дължини се изменят в множеството $\{1; 2; 3; \dots 2l-1; 2l; 2l+1\}$, е:

$$\frac{(l-1)(l-2)(4l-3)}{6} + (l-1)^2 + l(l-1) = \frac{(l-1)}{6} (4l^2 - 11l + 6 + 6l + 6l) =$$

$$= \frac{(l-1)}{6} (4l^2 + l) = \frac{l(l-1)(4l+1)}{6}.$$

Така първата част на теоремата е доказана.

Втори случай: $n = 2l$.

$n = 4 \Rightarrow l = 2$, $\{1, 2, 3, 4\}$. Само числата в тройката $(2, 3, 4)$ могат да бъдат дължини на страни на триъгълник, т.е. $a_4 = 1$ и по формулата от втората част на теорема 1 при $l = 2$ също се получава $a_4 = 1$.

$n = 6 \Rightarrow l = 3$. Според формулата $a_6 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{6} = 7$ и в решението на зад. 1 също получихме $a_6 = 7$.

Нека допуснем, че формулата от втората част на теорема 1 е вярна за всички четни стойности n до $2l - 2$, т.е. $a_{2l-2} = \frac{(l-1)(l-2)(4l-9)}{6}$, $l = 3; 4; \dots$

Ще докажем, че формулата е вярна при $n = 2l$, т.е. $a_{2l} = \frac{l(l-1)(4l-5)}{6}$.

Доказателството на формулата следва от (1) и (2).

С така доказаната теорема вече разполагаме с формули за намиране броя на всички разностранни целочислени триъгълници. Интересен е въпросът как се променя тази формула, когато триъгълниците са равнобедрени и равнострани.

За удобство при по-нататъшните разсъждения ще въведем следните означения.

- Нека броят на всички целочислени разностранни триъгълници е $\underline{a_n}$.
- Нека броят на всички целочислени равнострани триъгълници е $\underline{\underline{a_n}}$.
- Нека броят на всички целочислени равнобедрени триъгълници е $\overline{a_n}$.

Ще докажем следната теорема.

Теорема 2. Броят:

- $\underline{a_n}$ на всички целочислени равнострани триъгълници с дължини на страните, изменящи се в множеството $\{1; 2; 3; \dots n\}$, е $a_{2l+1} = 2l + 1$ при $n = 2l + 1$ и $a_{2l} = 2l$ при $n = 2l$, $l \geq 1$;
- $\underline{\underline{a_n}}$ на всички целочислени равнобедрени триъгълници е $a_{2l+1} = l(3l + 1)$ при $n = 2l + 1$ и $a_{2l} = l(3l - 2)$ при $n = 2l$, $l \geq 1$.
- $\overline{a_n}$ на всички (разностранни, равнострани и равнобедрени) триъгълници е $\overline{a_{2l+1}} = \frac{(l+1)(l+2)(4l+3)}{6}$ при $n = 2l + 1$ и $\overline{a_{2l}} = \frac{l(l+1)(4l+5)}{6}$ при $n = 2l$, $l \geq 1$.

Доказателство: за броя на всички целочислени равнострани триъгълници $\underline{a_n}$ формулите са очевидни, а именно $a_{2l+1} = 2l + 1$ при $n = 2l + 1$ и $a_{2l} = 2l$ при $n = 2l$, $l \geq 1$.

За броя на всички целочислени равнобедрени триъгълници $\underline{\underline{a_n}}$ ще разгледаме два случая.

Първи случай: $n = 2l$.

За дължина на бедрото:

1 – 0 триъгълника;

2 – (2;2;1), (2;2;3) – 2 триъгълника;

3 – 2 (с по-малка основа) и (3;3;4), (3;3;5) ... $(i;i;?) \rightarrow i-1$ с по-малка основа, $i+i > k$, $k < 2i$.

Последователните резултати са нанесени в таблица 3.

Таблица 3

i	k	Брой триъгълници
1	Няма такива	0
2	$1+1=2$	2
3	$2+2=4$	4
4	$3+3=6$	6
5	$4+4=8$	8
...	...	...
$l-1$	$l-2+l-2$	$2l-4$
l	$l-1+l-1$	$2l-2$
$l+1$	$l+l-1$	$2l-1$
$l+2$	$l+1+l-2$	$2l-1$
...	...	...
$2l$		$2l-1$

Така общият брой е:

$$2(1+2+\dots+l-1)+l(2l-1)=$$

$$= \frac{2(1+l-1)(l-1)}{2} + l(2l-1) =$$

$$= l(l-1+2l-1) = l(3l-2), \text{ т.е. } \overline{a_{2l}} = l(3l-2)$$

Общо имаме $\overline{a_{2l}} = 2l$ равнобедрени триъгълника и $\overline{a_{2l}} = l(3l-2)$ равнобедрени триъгълника. Всичките са

$$\widehat{a_{2l}} = \frac{l(l-1)(4l-5)}{6} + 2l + l(3l-2) =$$

$$= \frac{l}{6}(4l^2 - 9l + 5 + 12 + 18l - 12) =$$

$$= \frac{l}{6}(4l^2 + 9l + 5) = \frac{l(l+1)(4l+5)}{6}.$$

Втори случай: $n = 2l + 1$.

$1, 2, 3, \dots, 2l, 2l + 1$.

Всички равнобедрени триъгълници със страни от $\{1, 2, \dots, 2l\}$ са $\overline{a_{2l}} = l(3l - 2)$

Всички равнобедрени триъгълници с бедро $2l + 1$ са $2l$.

Всички равнобедрени триъгълници с основа $2l + 1$: $k + k > 2l + 1$, т.е. $k > 1$, $k = 1 + 1, 1 + 2, \dots, 2l$, т.е. l .

Общо имаме

$\overline{a_{2l+1}} = 2l + 1$ равностранны триъгълника;

$\overline{a_{2l+1}} = l(3l - 2) + 2l + l = l(3l - 2 + 3) = l(3l + 1)$ равнобедрени триъгълника.

Всичките са

$$\begin{aligned} \overline{a_{2l+1}} &= \frac{l(l-1)(4l+1)}{6} + 2l + 1 + l(3l+1) = \\ &= \frac{l(l-1)(4l+1) + 12l + 6 + 18l^2 + 6l}{6} = \\ &= \frac{l(l-1)(4l+1) + 18l^2 + 18l + 6}{6} = \\ &= \frac{l(l-1)(4l+1) + 6(3l^2 + 3l + 1)}{6} = \\ &= \frac{4l^3 + 15l^2 + 17l + 6}{6} = \frac{(l+1)(4l^2 + 11l + 6)}{6} = \frac{(l+1)(l+2)(4l+3)}{6}. \end{aligned}$$

Въз основа на направените изследвания в настоящата статия стигаме до закономерност, която е формулирана в следната теорема.

Теорема 3. Броят на всички целочислени триъгълници, чиито дължини на страните се изменят в множеството $\{1; 2; \dots; n\}$, е равен на броя на всички равностранны триъгълници, чиито дължини на страните се изменят в множеството $\{1; 2; \dots; n; n + 1; n + 2; n + 3\}$, т.е. $\overline{a_n} = a_{n+3}$.

Доказателство

Първи случай: $n = 2l + 1$.

$$\widehat{a_n} = \widehat{a_{2l+1}} = \frac{(l+1)(l+2)(4l+3)}{6}$$

$$a_{n+3} = a_{2l+4} = a_{2(l+2)} = \frac{(l+2)(l+1)(4l+8-5)}{6} = \frac{(l+2)(l+1)(4l+3)}{6},$$

$$\text{т.е. } \widehat{a_{2l+1}} = a_{2l+4}.$$

Втори случай: $n = 2l$.

$$\widehat{a_n} = \widehat{a_{2l}} = \frac{l(l+1)(4l+5)}{6}$$

$$a_{2l+3} = \frac{(l+1)l(4l+4+1)}{6} = \frac{l(l+1)(4l+5)}{6},$$

$$\text{т.е. } \widehat{a_{2l}} = a_{2l+3}$$

С това теоремата е доказана.

Изведените резултати са основа, на която е възможно да се конструират множество задачи с различна трудност. Като насока за бъдещи разработки е интересно да се поставят подобни задачи за други целочислени множества, т.е. да не се разглеждат всички естествени числа от 1 до n , а например части от тях.

В края на статията предлагаме няколко задачи за самостоятелно решаване.

Задача 1. С колко се различава броят на равнобедрените триъгълници с дължини на страните в множеството $\{1;2;\dots;10\}$ и броят на разностранните триъгълници с дължини на страните в множеството $\{1;2;\dots;13\}$?

Задача 2. Ако броят на всички разностранни триъгълници с дължини на страните в множеството $\{1;2;\dots;20\}$ е 525, то колко е броят на всички равнобедрени триъгълници с дължини на страните в множеството $1;2;\dots;17\}$, ако броят на разностранните триъгълници с дължини на страните във второто множество е 308?

Предлагаме още следните задачи.

Задача 3. (Математическо състезание „Европейско Кенгуру“, 2006 г., VII – VIII клас). Две от страните на един триъгълник са по 7 см, а третата се измерва в цяло число сантиметри. Колко сантиметра може да бъде периметърът на триъгълника?

Отг. 27

Задача 4. (Математическо състезание „Европейско Кенгуру“, 2008 г., VII – VIII клас). Намерете броя на разностранните триъгълници с периметър 27, дължините на страните на които са цели числа?

Отг. 12

Задача 5. (Математически турнир „Акад. Кирил Попов“, 2011 г.) Колко са триъгълниците с периметър 20, чиито страни са цели числа?

Отг. 8

Задача 6. („Математика без граници“, Зима, 2015 г., IX – XII клас.) Страните на триъгълник се изразяват с прости числа в сантиметри. Да се намери лицето на този триъгълник, ако обиколката му е 36 cm.

Задача 7. (Математически турнир „Акад. Кирил Попов“, 2016 г.) Дадени са осем отсечки с дължини 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm и 8 cm. По колко различни начина могат да се изберат 3 от тях, така че те да образуват триъгълник (всяка страна на триъгълника е съставена точно от една от дадените отсечки)?

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Dodunekov, St. & L. Davidov (1981). *Elementary Algebra and elementary functions*. Sofia: Narodna Prosveta. [Додунеков, Ст. & Л. Давидов (1981). *Елементарна алгебра и елементарни функции*. София: Народна просвета.]
- Grozdev, S. (2003). Modelling and control of outstanding students' potential in problem solving, *Pedagogy*, 1, 58 – 74. [Гроздев, С. (2003). Моделиране и управление на възможностите на изявени ученици за решаване на задачи, *Педагогика*, 1, 58 – 74.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.
- Grozdev, S. & Z. Zhelev (2012). Empirical induction as heuristic skill in mathematical problem solving, *Mathematics and Mathematical Education, Proc. 41-st Spring Conference of UBM, Borovets, 9 – 12 April 2012*, Sofia: UBM, 318 – 324 (ISSN 1313-3330). [Гроздев, С. & Ж. Желев (2012). Емпиричната индукция като евристичен похват в решаването на математически задачи, *Математика и математическо образование, Сборник доклади на 41 пролетна конференция на СМБ, Боровец, 9 – 12 април 2012*, София: СМБ, 318 – 324 (ISSN 1313-3330).]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014). Inductive Derivation of Formulae by a Computer, *Procedia – Social and Behavioral Sciences, volume 128, (22 April 2014), International Conference: EDUCATION AND*

- PSYCHOLOGY CHALLENGES – TEACHERS FOR THE KNOWLEDGE SOCIETY – 2nd EDITION EPC – TKS 2013*, 399-405 (ISSN 1877-0428).
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Counting the squares on a chess-board, *Mathematics Plus*, 1, 65 – 72 (ISSN 0861-8321). [Гроздев, С. & В. Ненков (2015). Преброяване на квадратите върху шахматна дъска, *Математика плюс*, 1, 65 – 72 (ISSN 0861-8321).]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Sums of cubes and induction, *Mathematics Plus*, 2, 59 – 68 (ISSN 0861-8321). [Гроздев, С. & В. Ненков (2015). Суми от кубове и индукция, *Математика плюс*, 2, 59 – 68 (ISSN 0861-8321).]

COMBINATORIAL PROBLEMS RELATED TO TRIANGLES

Abstract. The present paper considers an application of the triangle inequality to integer triangles. Formulae are found for their number in the cases of equilateral, isosceles and scalene triangles. The formulae give opportunities for quick problem solving in regular math classes at school as well as at the level of competitions.

✉ **Prof. Dr. Rosen Nikolaev**
University of Economics – Varna
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Dr. Tanka Milkova, Assoc. Prof.**
University of Economics – Varna
77, Kniaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: tankamilkova@ue-varna.bg

✉ **Ms. Katya Chalakova**
Mathematics High School – Dimitrovgrad
1, Kliment Ohridski St.
6400 Dimitrovgrad, Bulgaria
E-mail: katya.chalakova@gmail.com