Educational Matters
Научно-методически статии

КАРДИОИДА

Евгений Воронцов, Никита Платонов
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя школа № 8» – Архангельск (Россия)

Аннотация. В статье представлены результаты работы Российской подкоманды из города Архангельска – части международной команды учащихся. Эта команда была создана для реализации сетевого исследовательского проекта «Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами». Исследование проводилось с использованием ИГС GeoGebra. Для доказательства полученных гипотез использовались методы аналитической геометрии. Для организации сетевого взаимодействия участников – облачные сервисы Google.

Ключевые слова: круг; кривая; траектория; кардиода

1. Кинематическое определение кардиоиды. Рассмотрим задачу: *Пусть окружность катится с внешней стороны по другой окружности того же радиуса. Нарисуйте кривую, которую описывает при этом точка, закреплённая: на окружности; на радиусе внутри катящейся окружности; на продолжении радиуса катящейся окружности* (Smirnova & Smirnov, 2004).

Для решения используем интерактивную геометрическую среду GeoGebra. Построив модель катящейся окружности по другой окружности, получаем следующий результат: точка B' катящейся окружности описывает кривую, изображённую на рис. 1. Полученную кривую из-за схожести своих очертаний со стилизованным изображением сердца назвали ***кардиоидой***. Открытие кривой приписывается голланскому математику Коерсма. Название ввел итальянский ученый Кастилион в 1741 г. в статье "De curva cardioïde". Термин составлен из греческих слов $\kappa\alpha\rho\delta\iota\alpha$ (сердце) и $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ (вид) – буквальный смысл – похожая на сердце.

Плоская кривая, которая описывается точкой окружности радиуса *r*, катящейся по окружности с таким же радиусом, называется *кардиоидой*.

Точка *A* – *касп* кардиоиды или точка возврата[1)], точка *V* – *вершина* кардиоиды, окружности – *производящие* (Akopyan).

2. Кардиоида как частный случай улитки Паскаля. Изменив в модели положение точки B', получим следующее: Если точку B' брать не на катящейся окружности, а на радиусе или его продолжении, то получим кривые, изображённые на рисунках 2 и 3. Первую из них называют *укороченной*, а вторую — *удлинённой кардиоидой*.

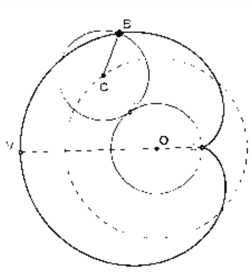

Рисунок 1

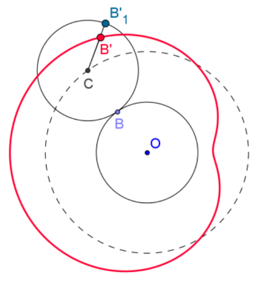

Рисунок 2

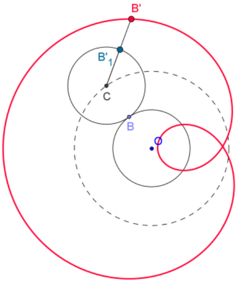

Рисунок 3

Все три вида кривых получили название улиток Паскаля. Такое название им дал французский математик Жюль Роберваль (1602 – 1675) по имени их открывателя Этьена Паскаля – отца Блеза Паскаля (Vilenkin & al., 1996).

Сформулируем определение Улитки Паскаля следующим образом: **Плоская кривая, которая описывается точкой, лежащей на луче с вершиной в центре окружности радиуса *r*, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом, называется *улиткой Паскаля*** (Savelov, 1960)**.**

Таким образом, кардиоида является частным случаем улитки Паскаля.

3. Уравнение кардиоиды в полярной системе координат. Выведем уравнение кардиоиды в полярной системе координат. Пусть окружность (*A, AO*) – неподвижная, а окружность (*B, BM*) – подвижная, *AO*=*BM*=*r*. Пусть полюс *O* полярной системы координат находится на неподвижной окружности и совпадает с началом движения подвижной, а полярная ось совпадает с направлением луча *OA*. Пусть *M* — произвольная точка на кардиоиде с полярными координатами (*r*, *j*). Выразим *r* через *j* ползуясь равенством $\rho = OM = OC + MC$.

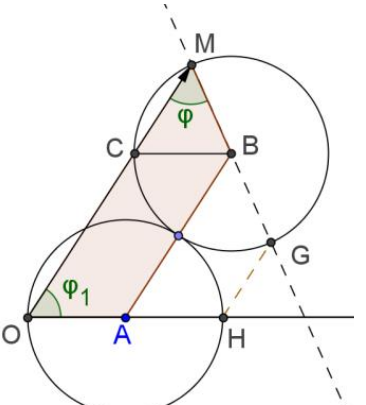

Рисунок 4

1. Рассмотрим четырехугольник $AOMB$. Имеем $HA = AO = r$; $GB = BM = r$. Значит, прямые HG, AB, OM параллельны (по теореме, обратной теореме Фалеса). Тогда, $AB \| OM$, значит $AOMB$ – трапеция;

2. $AO = BM = r \quad \Rightarrow \quad AOMB$ – равнобедренная трапеция и $\angle AOM = \angle OMB = \varphi$;

3. Рассмотрим ΔCMB. Здесь $BC = BM = r \Rightarrow \Delta CMB$ – равнобедренный, $\angle BCM = \angle CMB = \varphi$, $\angle MBC = 180° - 2\varphi$;

4. По теореме косинусов найдем MC: $MC^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 . \cos(180° - 2\varphi)$. Преобразуем сумму, используя формулы приведения и двойного угла для косинуса:

$MC^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos 2\varphi = 2r^2(1 + \cos 2\varphi) = 2r^2 2cos^2 \varphi = 4r^2 \ cos^2 \varphi$, откуда $MC = 2r \cos \varphi$;

5. По свойству параллелограмма $OC = 2r$, значит,
$OM = 2r + 2r \cos \varphi = 2r(1 + \cos \varphi)$.

Так получили уравнение кардиоиды в полярной системе координат:

$$\rho = 2r(1 + \cos \varphi) .$$

4. Параметрические уравнения кардиоиды. После постоновки уравнением кардиоиды в полярной системе координат в равенствах $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$ получаются следующие параметрические уравнения кардиоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= 2r \cos \varphi (\cos \varphi + 1) \\ y &= 2r \sin \varphi (\cos \varphi + 1) \end{aligned}\right\}.$$

В ИГС GeoGebra можно задать в строке ввода координаты точки М с помощью полученных формул, а саму кривую построить с помощью инструментов *Оставлять след* или *Локус* (рис. 6). Если изменить в параметрическом задании кардиоиды знак плюс на знак минус, то получится та же самая кардиоида. Обоснуем полученный факт с помощью компьютерного эксперимента. В первом случае построение кардиоиды начинается из полюса кардиоиды, а во втором – из каспа или точки возврата. Таким образом, уравнение кардиоиды имеет вид:

$$\rho = 2r(\cos \varphi \pm 1).$$

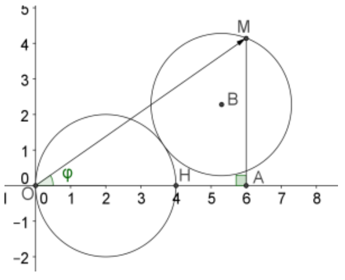

Рисунок 5

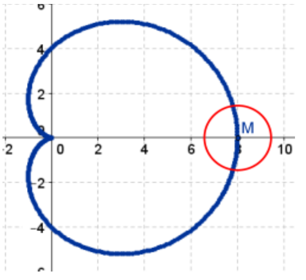

Рисунок 6

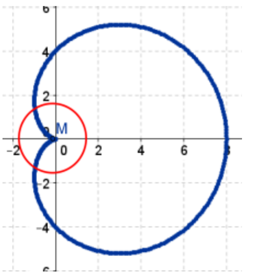

Рисунок 7

5. Уравнение кардиоиды в декартовой системе координат. Выведем уравнение кардиоиды в декартовой системе координат. Из ΔOAM (рис. 5) имеем:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Подставим данные равенства в уравнение кардиоиды с учётом знаков ±:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r\left(1 \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Преобразуем уравнение. Сначала избавимся от дроби, а потом от иррациональности:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2r\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} \pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$x^2 + y^2 = 2r\left(\sqrt{x^2 + y^2} \pm x\right),$$

$$x^2 + y^2 \pm 2rx = 2r\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(x^2 + y^2 \pm 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

Итак, кардиоида — алгебраическая кривая четвёртого порядка, имеющая в прямоугольной декартовой системе координат уравнение:

$$(x^2 + y^2 \pm 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

Кардиоиду в ИГС GeoGebra можно построить, введя её уравнение в строку ввода.

6. Преобразование кардиоиды в улитку Паскаля. Раскроем скобки в уравнении кардиоиды $\rho = 2r(\cos\varphi \pm 1) = 2r\cos\varphi \pm 2r$ и заменим слагаемое $2r$ на параметр a: $\rho = 2r\cos\varphi \pm a$. Координаты точки M, лежащей на этой кривой будут задаваться уравнениями:

$$\begin{cases} x = (2r\cos\varphi \pm a)\cos\varphi \\ y = (2r\cos\varphi \pm a)\sin\varphi \end{cases}$$ – параметрические уравнения улитки Паскаля.

Проведём компьютерный эксперимент: будем менять численные значения параметра a и наблюдать, как при этом меняется форма кривой. В ходе компьютерного исследования, мы получили следующие результаты:

1) если $a < 2r$, то полученная кривая является удлинённой кардиоидой рис. 8;

2) если $a = 2r$ — кардиоидой рис.9;

3) если $a > 2r$, — укороченной кардиоидой рис.10.

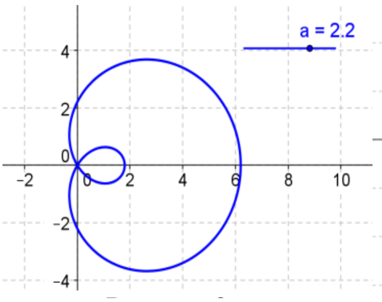

Рисунок 8

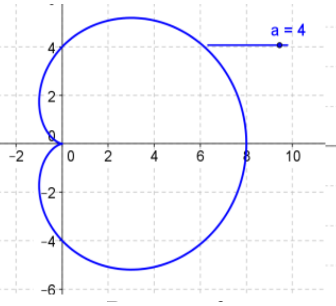

Рисунок 9

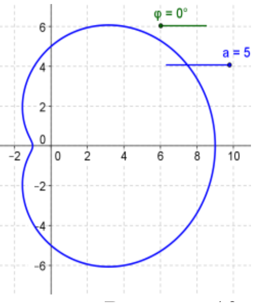

Рисунок 10

Вывод уравнения улитки Паскаля в декартовой системе координат аналогичен уравнению кардиоиды. В результате проведённых преобразований, получим:

$$(x^2 + y^2 \pm 2rx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

7. Свойства и признаки кардиоиды. Решение следующих задач (Vasilev & Gutenmaher, 2000) даёт ещё несколько способов построения кардиоиды и формулировки её определения.

Задача 1. *Что представляет собой множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки данной окружности на всевозможные касательные к ней?*

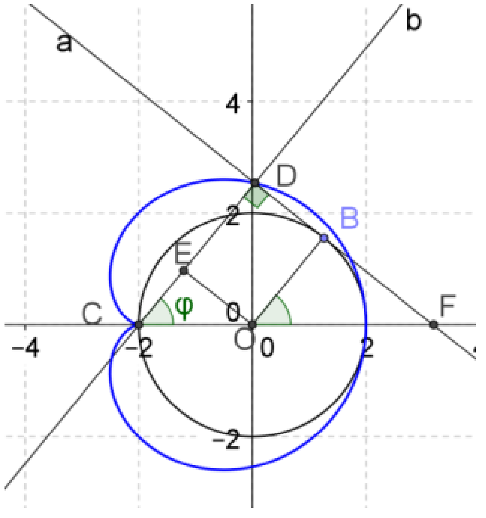

Рисунок 11

Решение данной задачи в ИГС, показывает, что получается кардиоида. Докажем этот факт геометрически. Пусть дана окружность радиуса *R*, *a* – касательная к окружности в т. *B*. Обозначим через φ величину угла *BOF*. Построим $b \perp a,\ OE \,||\, BD$. Докажем, что множество всех точек, построенных таким образом, являются кардиоидой. Для этого выразим *CD* через угол *j*. Имеем $CD = CE + R$, $ED = OB = R$. Рассмотрим прямоугольный ΔOEC: $\frac{CE}{OC} = \cos\varphi$, $OC = R$, $\frac{CE}{R} = \cos\varphi$, $CE = R\cos\varphi$. $CD = R\cos\varphi + R = R(\cos\varphi + 1)$. Пусть *C* – полюс полярной системы координат, тогда r=$R(\cos\varphi + 1)$ – уравнение кардиоиды с производящей окружностью радиуса $r = \frac{R}{2}$. Таким образом, точка *D*∈ кардиоиде. Геометрическое место таких точек – кардиоида.

Задача 2. *Что представляет собой множество всех точек, симметричных определённой точке данной окружности относительно всевозможных касательных к этой окружности?*

Пусть ω – данная окружность, *O* – определённая точка окружности, *a* – касательная к ω, *M* – точка, симметричная точке *O* относительно прямой *a*. Построим окружность ω', симметричную данной ω относительно касательной, проходящей через точку B_1. Тогда ω' можно рассматривать как окружность, катящуюся по ω. Кроме того, ω и ω' имеют одинаковые радиусы, а точка $M \in \omega'$. Следовательно, множество всех таких точек M является кардиоидой (кинематическое определение кардиоиды).

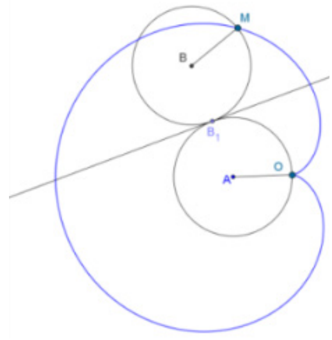

Рисунок 12

Задача 3. *Если на каждой прямой l, проходящей через точку A данной окружности δ радиуса r, отложить от точки Q пересечения l и δ (A ≠ Q) отрезок QM длины 2r, то множество всех полученных таким образом точек M будет кардиоидой.*

Пусть $\angle QAC=\varphi$, точка C диаметрально противоположна точке A. ΔAQC – прямоугольный, $AQ=2r\cos\varphi$. Тогда $AM=AQ+QM=2r\cos\varphi+2r=2r(\cos\varphi+1)$. В полярной системе координат будем иметь: $\rho=2r(\cos\varphi+1)$ – уравнение кардиоиды. Следует заметить, что если $QM\neq 2r$, то точка M будет описывать удлинённую или укороченную кардиоиду.

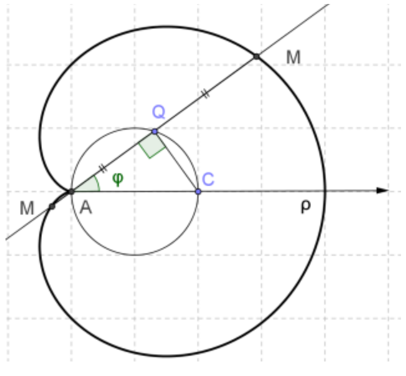

Рисунок 13

Итак, моделирование в ИГС GeoGebra позволило наглядно продемонстрировать различные определения кардиоиды, рассмотреть способы её построения в системе координат.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 ·Точка, в которой две различные ветви кривой имеют общую касательную и расположены по разные стороны от касательной, называется точкой возврата.

2. https://www.sites.google.com/site/pisemsami/

3. Акопян, А. Геометрия кардиоиды, МЦНМО. http://www.mccme.ru/~akopyan/papers/cardioid.pdf.

ЛИТЕРАТУРА

Борисов, Б., Д. Димитров, И. Стефанов, Н. Нинов & Т. Христов. (2018). Гипоциклоида, *Математика и информатика, 4*, 368 – 377, ISSN 1310-2230.]

Аскар, И. & К. Сарембаева. (2018). Эпициклоида, *Математика и информатика, 4*, 360 – 367, ISSN 1310-2230.

Коптева, Д. & К. Горская. (2018). Улитка Паскаля, *Математика и информатика, 5*, 465 – 480, ISSN 1310-2230.

Александрова, Н. (2008). *История математических терминов, понятий, обозначений*. Словарь-справочник. Москва: ЛКИ.

Александрова, Н. (1984). *Математически термини*. София: Наука и изкуство.

Берман, Г. *Циклоида*. *Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных.* (1980). Москва: Наука.

Болтянский, В. Г. (1961). *Огибающая*. Москва: Гос. из-во физико-математической литературы.

Васильев, Н. Б. & В. Л. Гутенмахер. (2006). *Прямые и кривые*. Москва: МЦНМО.

Норден, А. П. (1958). *Краткий курс дифференциальной геометрии*. Москва: Гос. из-во физико-математической литературы.

Гелерт, В., Х. Кестнер & З. Нойбер. (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: Наука и изкуство, 1983.

Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.

Гроздев, С. & В., Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.

Маркушевич, А. *Замечательные кривы*. (1952). Москва: Гос. изд-во теоретико-технической литературы.

Савелов, А. *Плоские кривы*. (1960). Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы.

Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.

Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 567 – 571. (ISSN 1310-2230).

Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2017). Второй международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 5*, 457 – 465. (ISSN 1310-2230).

Атамуратова, Р, М. Алферов, М. Белорукова, В. Ненков, В. Майер, Г. Клековкин, Р. Овчинникова, М. Шабанова & А. Ястребов. (2018). „Энциклопедия замечательных плоских кривых" – международный сетевой исследовательскии проект в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 566 – 584, ISSN 1310-2230.

Гроздев, С., В. Ненков & Св. Дойчев. (2012). *За високи постижения в математиката (в помощ на учителя)*. София: Фондация „Миню Балкански" & фондация „Америка за България"". ISBN 978-954-92830-3-7.

Гроздев, С., В. Ненков & И. Шаркова. (2015). *В помощ на учителя по математика. Сборник от методически разработки.* София: Фондация „Миню Балкански" & фондация „Америка за България", ISBN 978-954-92830-5-1.

Выгодский, М. Я. (1972). *Справочник по высшей математике*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.

Гиндикин, С. Г. (2006). *Рассказы о физиках и математиках*. Москва: МЦНМО.

Шабанова М. В. и др. (2013). Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra: коллективная монография. Москва: Перо.

Смирнова, И. М. & В. А. Смирнов (2004). *Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи: Учебное пособие для VII – XI кл. общеобразоват. учреждений*. Москва: Мнемозина.

Виленкин Н. Я. & др. *За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащихся VII – XI кл. общеобразоват. учреждений*. Москва: Просвещение: АО „Учеб. Лит".

Березин, В. (1977). Кардиоида. *Квант, 12*, 33.

REFERENCES

Borisov, B., Dimitrov, D., Stefanov, I., Ninov, N. & Hristov, T. (2018). Hypo-cycloid, *Mathematics and Informatics, 4*, 368 – 377, ISSN 1310-2230.

Askar, I. & Sarembaeva, K. (2018). Epicycloid, *Mathematics and Inforrmatics, 4*, 360 – 367, SSN 1310-2230.

Kopteva, D. & Gorkaya, K. (2018). Pascal's limacon, *Mathematics and Inforrmatics, 5*, 465 – 480, ISSN 1310-2230.

Alexandrova, N. (2008). *Istoria matematicheskih terminov, ponyatii, oboznachenii. Slovar-spravochnik*. Moscow: LKI (in Russian).

Alexandrova, N. (1984). *Mathematical terminology*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian).

Berman, G. (1980). *Cycloid. About a notable curve and some others connected with it.* Moscow: Nauka. (in Russian).

Boltyanskii, V. G. (1961). *Envelope*. Moscow: State Publishing House for Mathematics-Physics literature.

Vasilev, N. B. & Gutenmaher, V. L. (2000). *Pryamye i krivye*. Moscow: MTsNMO (in Russian).

Norden, A. P. (1958). *A concise course in Differential Geometry*. Moscow: State Publishing House for Mathematics-Physics literature.

Gellert, W., Kastner, H. & Nueber, S. (1983). *Matematicheski enciklopedichen rechnik*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian).

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes (in Bulgarian).

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Three notable points on the medians of the triangle*. Sofia: Archimedes 2000 (in Bulgarian).

Savelov, A. (1960). *Ploskie krivy*. Moscow: Gos. iz-vo fiziko-matematicheskoy literatury (in Russian).

Sergeeva, T., Shabanova, M. & Grozdev, S. (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU (in Russian).

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology, vol. VII (LXIX), No 1B*. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122 – 125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247-8558).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics*: The Bulgaria Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

Shabanova, M., Atamuratova, R., Belorykova, M., Nenkov, V. & Pavlova, M. (2016). The game "Geometry scrabble in cloud" an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in mathematics, 45*, 223 – 228. (ISSN 1313-3330).

Shabanova, M., Atamuratova, R., Belorykova, M., Nenkov, V. & Pavlova, M. (2017). Second international set research student ptoject in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 5*, 457 – 465. (in Russian). (ISSN 1310-2230)

Atamuratova, R., Alferov, M., Belorukova, M., Nenkov, V., Mayer, V., Klekovkin, G., Ovchinikova, R., Shabanova, M. & Yastrebov, A. (2018). Encyclopedia of notable plane curves – International net research project in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics 6*, 566 – 584, ISSN 1310-2230.

Shabanova, M., Belorykova, M., Atamuratova, R. & Nenkov, V. (2016). The First international set research project of secondary students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 6*, 567 – 571 (in Russian). (ISSN 1310-2230).

Grozdev, S., Nenkov, V. & Dojchev, S. (2012). For high achievements in Mathematics (support of teachers). Sofia: Foundation Minu Balkanski & Foundation America for Bulgaria. ISBN 978-954-92830-3-7.

Grozdev, S., Nenkov, V. & Sharkova, I. (2015). *Support of teachers. Collection of methodological elaborations*. Sofia: Foundation Minu Balkanski & Foundation America for Bulgaria. ISBN 978-954-92830-5-1.

Vygotskii, M. Y. (1972). *Spravochnik po vyshei matematike*. Moscow: FIZMATLIT (in Russian).

Gindikin, S. G. (2006). *Rasskazy o fizikah i matematikah*. Moskow: MTsNMO (in Russian).

Shabanova, M.V. et al (2013). *Obuchenie matematiki s ispolzovaniem vozmojnostey GeoGebra*. Moscow: Pero (in Rusian).

Smirnova, I.M. & Smirnov, V.A. (2004). *Geometria. Nestandartye i issledovatelskie zadachi: Uchebnoe posobie dlya VII – XI kl. Obshteobrazovat. Uchrejdenii*. Moscow: Mnemozina (in Russian).

Vilenkin, N.Y. et al (1996). *Za stranitsami uchebnika matematiki: Arifmetika. Algebra. Geometria: Kn. Dlya uchashtihsya VII – XI kl. Obshteobrazovat. Uchrejdenii*. Moscow: Prosveshtenie (in Russian).

Berezin, V. (1977). Cardioide, *Kvant, 12,* 33.

CARDIOIDE

Abstract. The paper presents the results of the work of the Russian sub-team from the city of Arkhangelsk – a part of the international team of students. The team was created in connection with the realization of the net research project

"Encyclopedia of Notable Plane Curves: We Write by Ourselves". The research was made by using the software program GeoGebra. Methods from Analytical Geometry were applied for proving the corresponding hypothesis. The net interaction between the participants was carried out in Google Cloud service.

Keywords: circle; curve; trajectory; cardioide

✉ **Mr. Vorontsov Eugene, Student**
Mr. Platonov Nikita, Student
Public Secondary school №8
30, Avenue Obvodni kanal
163 002 Arkhangelsk, Russia
E-mail: novenki222@mail.ru
E-mail: Platonov-nikita-Igorevich@yandex.ru