ИТОГИ ПРОВЕДЕНИЯ ВТОРОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ФИНАНСОВОЙ И АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ СРЕДИ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

[1] Сава Гроздев, [2] Росен Николаев, [3] Мария Шабанова,
[4] Лариса Форкунова, [5] Нина Патронова
[1] Высшая школа страхования и финансов – София (Болгария)
[2] Экономический университет – Варна (Болгария)
[3] ГАОУ ДПО „Московский центр развития кадрового потенциала образования“ – Москва (Россия)
[4] ГБОУ ВО МО „Академия социального управления“ – Москва (Россия)
[5] ФГАОУ ВО „Северный (Арктический) Федеральный университет“ – Архангельск (Россия)

Аннотация. Данная статья подводит итоги проведения Второй международной олимпиады по финансовой и актуарной математике, учредителями которой являются два болгарских вуза: Экономический университет – Варна, Высшая школа страхования и финансов – София. Олимпиада проходит в четырех возрастных категориях: школьники - младшая группа (учащиеся 5 –6 классов, 11 –12 лет), школьники – средняя (учащиеся 7 – 9 классов, 13 – 15 лет), школьники – старшая группа (учащиеся старших классов общеобразовательной школы и учреждений среднего профессионального образования, 16-18 лет), студенты и взрослые (категория 18+). Миссия олимпиады - привлечь внимание к вопросу о значимости математических знаний для повышения финансовой грамотности населения.

Keywords: financial literacy; Olympiad; mathematical methods

1. История и идейные основы олимпиады

Финансовое образование, защита прав потребителей и финансовое включение признаны на самом высоком политическом уровне в качестве трех основных составляющих, обеспечивающих не только финансовое благополучие отдельных граждан, но и стабильность мировой финансовой системы в целом. Об этом свидетельствуют принципы высокого уровня, составляющие содержание следующих документов, принятых лидерами стран Большой двадцатки: Инновационная финансовая интеграция (2010 год); Финансовая защита потребителей (2011 год) и Национальные стратегии финансового образования (2012 г.).

Последний документ ставит во главу угла задачу повышения *финансовой грамотности* всех слоев населения[1)]. При этом финансовая грамотность определяется OECD INFE как „Сочетание представлений, знаний, навыков, отношений и поведения, необходимых для принятия правильных финансовых решений и в конечном итоге достижения индивидуального финансового благополучия“[1].

Документом[2] определена методология проведения сравнительных исследований уровня финансовой грамотности взрослого населения (18 – 79 лет). Вопросы предлагаемой в этом документе анкеты проверяют наличие у респондентов знаний основных финансовых терминов (бюджет, источник дохода, статья расходов, финансовые сбережения, инвестиция, заём и т.п.), финансовых продуктов, а также опыта осуществлять осознанный выбор финансовых продуктов и их использование для повышения личного или семейного благосостояния. Заметим, что предлагаемая методология не содержит инструментов для оценки готовности респондентов использовать имеющиеся математические знания для адекватного понимания финансовой информации, оценки финансовой ситуации и принятия оптимальных финансов.

Такое невнимание к математическим основам финансовой грамотности вызывало беспокойство у преподавателей математики экономических вузов, особенно на фоне заметного снижения мотивации студентов к математическому образованию, снижению доли учебного времени, отводимого на изучение математики по решению Ученых советов экономических вузов, и как следствие, резкого сокращения числа специалистов, обладающих достаточными знаниями для эффективного применения методов математики к решению экономических задач в профессиональной сфере.

Данная ситуация была обсуждена на семинаре участников Международного проекта MITE (Болгария, Варна, 2016). Сразу же было высказано предложение об учреждении олимпиады по финансовой и актуарной математике среди школьников, студентов и взрослых для демонстрации значимости знаний математики в принятии финансовых решений подрастающему поколению, школьным учителем, вузовским преподавателям, обсуждена концепция олимпиады.

Было решено, что олимпиадное задание будет включать 7 задач, из которых 5 задач, оцениваемых в 3 балла, будут предполагать выбор правильного ответа из 4 – 5 альтернатив; 1 задача, оцениваемая в 5 баллов, будет требовать представление собственного результата, 1 задача, оцениваемая в 10 баллов, будет требовать представления развернутого решения. Тематика задач олимпиады будет формироваться в соответствии со следующими темами: динамика цен и инфляции; кредиты и условия досрочного погашения; движение средств на зарплатном счёте; инвестиции (оптимальный выбор); страхование; срочные депозиты; динамика процентных ставок; оперирование вложениями.

В 2016 – 2017 учебном году состоялась первая олимпиада, информацию о ней можно найти в следующих публикациях (Shabanova, Nikolaev & Grozdev, 2017), (Nikolaev, Shabanova & Petrakov, 2017), (Forkunova, Lukina & Milkova, 2017). В России даты проведения олимпиады были приурочены к датам Всероссийской недели сбережений (тур для студентов и взрослых) и Всероссийской недели финансовой грамотности для детей и молодежи (тур для школьников). Такое разделение дат проведения олимпиады показалось удобным как для организаторов, так и участников, поэтому вторая олимпиада была проведена также в два тура: 15.12.2017 (Россия и Болгария) – для студентов и взрослых и 24.03.2018 (Болгария и Республика Македония), 7.04.2018 (Россия) – для школьников и учащихся колледжей.

2. Портрет участников олимпиады в 2018 году

Поскольку участниками Первой международной олимпиады по финансовой и актуарной математике были преимущественно учащиеся из России, их количество преобладало и во второй олимпиаде. Всего в олимпиаде приняло участие 1041 человек. На диаграмме 1 представлено распределение участников по странам.

Диаграмма 1. Распределение участников II Международной олимпиады по финансовой и актуарной математике по странам

Олимпиада проводилась силами учредителей и их партнеров. Партнерами стали следующие образовательные организации: Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, Архангельск; Московский региональный социально-экономический институт, Россия, Видный; Академия Социального управления, Россия, Москва; СОУ „Перо Наков“ – Република Македония, Куманово; СОЕПТУ „К. Ј. Питу“ – Республика Македония, Прилеп; СУГС „Георги Димитров“ – Республика Македония, Скопье; ОСУ „Јовче Тесличков“ – Республика Македония, Велес; СОУ „Гостивар“ – Республика Македония, Гостивар. Они осуществляли перевод задач на национальные языки, адаптацию задач к особенностям национальной финансовой ситуации, организацию проведения и проверку работ участников. Учредители олимпиады предоставляли олимпиадные задания и ключи для проверки и оценки результатов.

Наиболее активными в олимпиаде оказались учащиеся 5 – 6 классов (младшая группа), а также учащиеся 7 – 9 классов (средняя группа). Распределение участников по возрастным группам представлено на диаграмме 2.

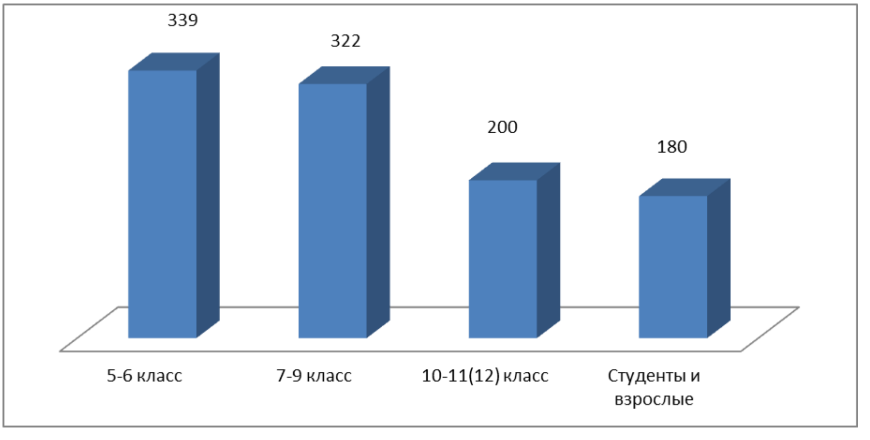


Диаграмма 2. Распределение участников II Международной олимпиады по финансовой и актуарной математике по возрастным группам

3. Задания олимпиады с ответами и решениями

3.1. Задания для младшей группы (5 – 6 классы)

Задача 1. Даше на карманные расходы родители дают по 100 рублей в день. Даша не тратила деньги в течение 30 дней и накопила определенную сумму. А в следующем месяце родители, за хорошую учебу Даши, решили давать ей по 150 рублей. Сколько дней теперь понадобится Даше, чтобы накопить такую же сумму, как в предыдущем месяце, при условии, что она не будет тратить деньги?

А. 10 дней Б. 15 дней В. 20 дней Г. нет верного ответа

Решение: $30 \cdot 100 \div 150 = 20$ (дней).

Задача 2. Банк ежегодно начисляет вкладчику 3% от суммы первоначального вклада. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

А. в задаче недостаточно данных для ее решения Б. 33 В. 34 Г. 35

Решение: в условии задачи сказано, что начисление процентов происходит только на сумму начального вклада (простая схема начисления процентов). Следовательно, получаем неравенство $K \cdot \left(1 + \frac{3x}{100}\right) \geq 2K$, где x - искомое количество лет, K- сумма первоначального склада. Решая уравнение, получаем: $x \geq (2-1) \cdot 100 \div 3 = 33\frac{1}{3}$. Так как x - натуральное число, то условию задачи соответствует $x = 34$ (года).

Задача 3. Цена входного билета в кинозал была 360 руб. На сколько нужно снизить входную плату, чтобы число зрителей увеличилось на 50%, а выручка выросла на 25%?

А. на 25 руб. Б. на 50 руб. В. на 120 руб. Г. на 60 руб.

Решение: условием задачи полагается, что нет других факторов, кроме цены на билет, влияющих на количество зрителей. Примем за 1 количество зрителей, которые купили билет за 360 руб. Тогда выручка от продажи билетов составила 360 (рублей). Получаем уравнение, выражающее размер планируемой выручки двумя способами: $x \cdot 1{,}5 = 360 \cdot 1{,}25$, где x – новая цена билета. Решая уравнение, получаем: $x = 360 \cdot 1{,}25 \div 1{,}5 = 300$ руб. Следовательно, цену нужно снизить на 60 рублей.

Задача 4. Для поездки в европейскую страну Петр купил 700 евро по курсу 76 рублей 50 копеек за евро. За время поездки он истратил 475 евро. Вернувшись в Россию, Петр решил обменять оставшиеся евро снова на рубли и смог это сделать по курсу 74 рубля 20 копеек за евро. Какую сумму в рублях выиграл или потерял на операциях обмена валюты Петр?

А. Выиграл 517 рублей 5 копеек. Б. Потерял более 500 рублей

В. Ничего не выиграл и не потерял. Г. Нет правильного ответа.

Решение: $700 - 475 = 225$ (евро) - излишек средств, переведенных в евро.

$76{,}5 - 74{,}2 = 2{,}3$ (руб.) - составляет потеря при покупке и продаже 1 евро. Следовательно, Петр потерял на обмене валют $225 \cdot 2{,}3 = 517{,}5$ (руб.).

Правильный ответ – потерял более 500 руб.

Задача 5. В Интернет-магазинах резинки для плетения браслетов продаются только упаковками. Резинки фирмы „Фантазия“ продаются упаковками по 1100 штук и стоят 250 рублей за упаковку, упаковка таких же по качеству и цветам резинок фирмы „Умелые руки“ содержит 1000 штук и стоит 189,25 рублей за упаковку. Найдите разницу в переплате за оставшиеся лишние резинки при покупке резинок той и другой фирмы, если на изготовление изделия вам нужно 1050 штук. При решении ответы округляйте до сотых долей.

А. 100 рублей Б. 15 рублей 82 копейки

В. 168 рублей 2 копейки Г. нет верного ответа

Решение: для изготовления изделия достаточно купить одну упаковку резинок фирмы „Фантазия“ и 2 упаковки фирмы „Умелые руки“. При этом излишек резинок составит $1100 - 1050 = 50$ (штук) и $2 \cdot 1000 - 1050 = 950$ (штук) соответственно. Стоимость одной резинки в упаковке фирмы „Фантазия” описывается выражением $250 \div 1100$, а стоимость одной резинки в упаковке фирмы „Умелые руки“ – $189{,}25 \div 1000$. Тогда разница в переплате составит:

$$|50 \cdot 250 \div 1100 - 950 \cdot 189{,}25 \div 1000| = 168{,}42 \text{ (руб.)}.$$

Правильный ответ Г – нет верного ответа.

Задача 6 (задача с открытым ответом). Родители 5В класса решили после классного мероприятия устроить своим детям чаепитие в школьной столовой. В качестве угощения были выбраны пироги, по половинке пирога на одного человека. В столовой родителям предложили выбрать из двух видов пирогов одинаковой толщины, с одинаковой начинкой, но разной формы: квадратные со сторонами 20 см на 20 см или прямоугольные со сторонами 15 см на 25 см, которые стоят одинаково – по 430 рублей 5 копеек. Какие пироги выгоднее купить и сколько можно сэкономить, если в классе 27 человек и, кроме классного руководителя, на празднике у трети класса будут оба родителя, а у оставшихся – мама, папа и еще один член семьи (бабушка, дедушка, брат, сестра и т.п.)?

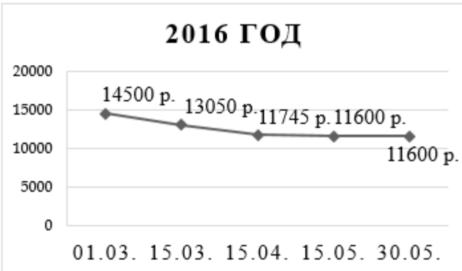
Решение: количество присутствующих на празднике представляет собой значение выражения: $27 + 1 + \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 27 \cdot 3 = 100$ (чел.). Следовательно, необходимо закупить 50 пирогов. Примем толщину пирогов за 1. Тогда объем одного квадратного пирога будет $20 \cdot 20 = 400 (\text{см}^3)$. Объем одного прямоугольного пирога: $15 \cdot 25 = 375\ (\text{см}^3)$. Это говорит о том, что покупка пирогов квадратной формы выгоднее (каждому достанется кусок большего объема). Вопрос об экономии средств мог быть осмыслен учащимися по-разному. Принимались любые осмысленные результаты.

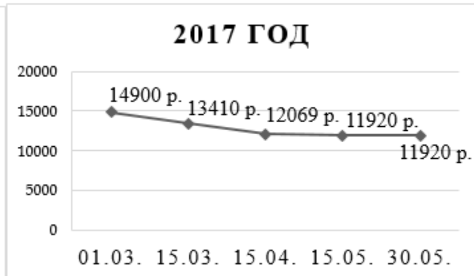
1) При покупке прямоугольных пирогов за ту же цену, что и квадратных, мы переплачиваем за недостающие 25 см^3 с каждого пирога, а с 50 пирогов за $50 \cdot 25 = 1250$ см^3. Найдем стоимость одного кубического сантиметра обоих видов пирогов: $430{,}05 : (20 \cdot 20) \approx 1{,}075$ рублей стоит 1 см^3 квадратного пирога, $430{,}05 : (15 \cdot 25) \approx 1{,}147$ стоит 1 см^3 прямоугольного пирога, следовательно, с каждого квадратного сантиметра переплата 0,072 рубля. $1250 \cdot 0.072 = 90$ руб.

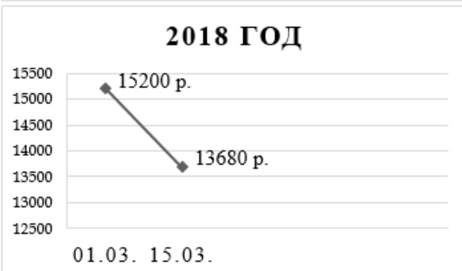
2) Сэкономить можно было на покупке меньшего количество пирогов квадратной формы, так как люди были согласны обойтись половиной прямоугольного пирога, т.е. порцией для каждой пары в 375см^3. Покупка 50 пирогов прямоугольной формы потребуется $50 \cdot 430{,}05 = 21502{,}5$ (руб.). Для того чтобы общий объем порций при покупке квадратных пирогов оставался таким же, необходимо купить: $50 \cdot 375 \div 400 = 46{,}875 \approx 47$ штук. Стоимость такой покупки составит: $47 \cdot 430{,}05 = 20212{,}35$ (руб.). Таким образом, покупка квадратных пирогов экономит $21502{,}5 - 20212{,}35 = 1290{,}15$ (руб.).

3) При покупке 50 пирогов квадратной формы мы тратим $50 \cdot 430{,}05 = 21502{,}5$ (руб.), приобретая $50 \cdot 400 = 20000\ \text{см}^3$. Для обеспечения такого же количества угощения нам потребовалось бы купить $20000 \div 375 = 53{,}(3) \approx 54$ прямоугольных пирога, т.е. заплатить дополнительно за 4 пирога: $4 \cdot 430{,}05 = 1720{,}2$ (рубля).

Задача 7 (задача с развернутым ответом). Вера ходит в лыжную секцию. За год обучения она начала показывать серьезные успехи и тренер предложил родителям девочки купить ей профессиональные лыжи. Так как профессиональная экипировка стоит недешево, тренер посоветовал воспользоваться сезонными скидками и купить лыжи весной. На диаграммах представлена динамика сезонного изменения цен с марта по июнь месяцы на выбранные лыжи за два предыдущих года и уже произошедшее изменение цены за текущий год. В июне лыжи в магазине убирают на склад и начинают продавать уже в конце осени по новой, не сниженной, цене. По какой минимальной цене Вера сможет сделать покупку, если магазин вот уже несколько лет не меняет свою ценовую политику по сезонным распродажам?







Решение

2016 год.

1) 14500 – 13050 = 1450 р. – первое снижение цены цена была снижена на 10 % от первоначальной.

2) 13050 – 11745 = 1305 р. – второе снижение цены цена была снижена еще на 10 %.

3) 11745 – 11600 = 145 р. – третье снижение цены.

После этого снижение цены прекратилось.

4) 1450 + 1305 + 145 = 2900 р. – всего была снижена цена.

5) 14500 – 100 %

2900 – х %

х = 20 % - всего снизилась цена относительно первоначальной.

2017 год.

1) 14900 – 13410 = 1490 р. – первое снижение цены снова снижение на 10 % от первоначальной.

2) 13410 – 12069 = 1341 р. – второе снижение цены снова снижение цены еще на 10 %.

3) 12069 – 11920 = 149 р. – третье снижение цены. После этого снижение цены прекратилось.

4) 1490 + 1341 + 149 = 2980 р. – всего была снижена цена.

5) 14900 – 100 %

2980 – х %

x = 20 % - всего снизилась цена относительно первоначальной.

Таким образом, политика магазина:

– цена на товар снижается три раза, по одному разу в месяц;

– первый раз цена снижается на 10 % относительно первоначальной *(за получение этого вывода – 2 балла)*;

– второй раз цена снижается на 10% относительно цены после первого понижения *(за получение этого вывода – еще 2 балла)*;

– третий раз цена снижается на остаток суммы до 20 % от первоначальной цены, всего цена снижается на 20 % относительно первоначальной *(за получение этого вывода – еще 2 балла)*;

Применим полученные данные для нахождение минимальной цены на лыжи в 2018 году.

15200 – 100 %

x – 80 %

x = 12160 р. – будут стоить лыжи после троекратного понижения цены *(за получение этого результата еще 4 балла)*

Таким образом, с 15 по 30 мая можно купить лыжи по минимальной цене.

Ответ: 12160 р.

3.2. Задания для средней группы (7-9 классы)

Здесь и далее маркировка „Версия для России" означает, что условие задачи модифицировано под денежные единицы, используемые в Российской Федерации. В остальном задачи, предлагаемые участникам всех стран идентичны.

Задача 1 (версия для России). В конце января цена сахара была 40 рублей. В конце февраля цена увеличилась на 25%. В конце марта цена уменьшилась на 10% по отношению к февральской. Какова цена сахара в начале апреля?

A) 30 руб. (B) 45 руб. (C) 50 руб. (D) 55 руб. (E) 60 руб.

Решение: $40 \cdot 1{,}25 \cdot (1 - 0{,}1) = 45$ руб.

Задача 2. У Джона в кошельке лежат монеты разного достоинства: 10 монет по 20 евроцентов, на 20% больше монет по 10 евроцентов и на 50% меньше монет по 50 евроцентов, по отношению к количеству монет по 10 евроцентов. Сколько денег у Джона?

(A) 6 евро (B) 7 евро (C) 6,20 евро (D) 5 евро (E) 5,20

$10 \cdot 20 + 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10 + (10 \cdot 1{,}2) \cdot 0{,}5 \cdot 50 = 200 + 120 + 300 = 620$ евроцентов $=$ 6,2 евро.

Задача 3. Спрос на данный товар зависит от его цены (в евро). Зависимость выражается следующей формулой $Q = 100 - 2P$ $Q = 100 - 2P$. Какой должна быть цена на товар, чтобы доход был максимальным?

(A) 10 евро (B) 25 евро (C) 30 евро (D) 35 евро (E) 40 евро

Решение: доход равен $P \cdot Q = -2 \cdot P^2 + 100P$. Это квадратичная функция, принимающая наибольшее значение в точке $P = \frac{-100}{2\cdot(-2)} = 25$ (евро).

Задача 4. (версия для России). В начале каждого года фирма инвестирует m% от прибыли, полученной за истекший год. Это позволяет фирме ежегодно увеличить свою прибыль на $\frac{m}{3}\%$. Найти, чему равно m, если известно, что вначале 2014 года прибыль фирмы составляла 1 млн. руб., а в начале 2018 года составила 1,4641 млн. руб.

A) 5% B) 10% C) 20% D) 25% E) 30%

Решение: по условию задачи составляем уравнение $1{,}4641 = 1 \cdot (\frac{m}{3\cdot100} + 1)^4$; в результате его решения получаем $m = 300 \cdot \left(\sqrt{\sqrt{1{,}4641}} - 1\right) = 30$ (для вычислений могут быть использованы калькуляторы).

Задача 5. Бюджет семьи на месяц обычно составлял 1500 евро. Семья на еду тратила 40% всех средств, на одежду – 20%, другие виды расходов составляли 40%. Бюджет семьи в этом месяце уменьшился на 15%, но структуру расходов решили сохранить. На сколько евро для этого нужно уменьшить расходы на еду?

(A) 45 евро (B) 50 евро (C) 60 евро (D) 75 евро (E) 90 евро

Решение:

$$1500 \cdot 0{,}4 - \frac{1500\cdot(100-15)}{100} \cdot 0{,}4 = 1500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}15 = 90 \text{ евро}.$$

Задача 6 (задача с открытым ответом). Гражданин открывает текущий счёт на сумму 5000 евро. Ставка вклада простая - 0,24% годовых. Через месяц вкладчик снял со счета 1000 евро, ещё через месяц вложил 500 евро, ещё через 3 месяцев закрыл счёт. Какую сумму получил вкладчик?

Решение: $0{,}24 \div 12 = 0{,}02\%$ – месячная ставка; процентные начисления по вкладу за весь период составили:

$$(5000 \cdot 0{,}02 + 4000 \cdot 0{,}02 + 4500 \cdot 0{,}02 \cdot 3) \cdot \frac{1}{100} = 4{,}5 \text{ евро},$$

следовательно, после закрытия счета вкладчик получил: $4500 + 4{,}5 = 4504{,}5$ евро.

Задача 7 (задача с развернутым ответом). Продано некоторое количество (отличное от нуля) экземпляров одной книги по цене 3 евро и некоторое количество (отличное от нуля) другой книги по цене 2 евро. Общая прибыль составила 63 евро. Какое количество экземпляров одной и другой книги могло быть продано? (перечислите все возможные варианты).

Решение: обозначим количество проданных экземпляров первой книги за x, а второй книги за y. Тогда получим уравнение: $3x + 2y = 63$. Из этого уравнения следует, что у – кратно 3, т.е. $y = 3k > 0$ (*за получение этого вывода 2 балла*). Подставим новое выражение в уравнение:

$3x + 6k = 63$

$x + 2k = 21 \Rightarrow x = 2l + 1 > 0$ (*за получение этого вывода еще 2 балла*).

$2l + 1 + 2k = 21$

$l + k = 10,\ l \in 0 \div 9,\ k \in 1 \div 10$ (*за получение этого вывода еще 2 балла*).

Следовательно, всего 10 вариантов(*за получение этого результата еще 4 балла*).

3.3. Задания для старшей группы (10 – 11(12) классы).

Задача 1 (версия для России). Пачка сливочного масла стоила 136 руб. Через месяц цена снизилась на 20%, ещё через месяц выросла на 10%. Какова последняя цена масла?

(A) 108,8 руб. (B) 119,68 руб. (C) 122,4 руб.
(D) 149,6 руб. (E) 126 руб.

Решение: $136 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1 = 119{,}68$ руб.

Задача 2. В начале каждого года фирма инвестирует k% от прибыли, полученной за истекший год. Это позволяет фирме ежегодно увеличить свою прибыль на $\frac{k}{4}\%$. Найти, чему равно k, если известно, что вначале 2014 года прибыль фирмы составляла 1 млн.руб., а в начале 2018 года составила 1215506,25 руб.

A) 5% B) 10% C) 20% D) 25% E) 30%

Решение: по условию задачи составляем уравнение: $1{,}21550625 = 1 \cdot \left(\frac{k}{4 \cdot 100} + 1\right)^4$. В результате его решения получаем: $k = 400 \cdot \left(\sqrt[4]{1{,}21550625} - 1\right) = 20$.

Задача 3. Объем продаж Q некоторого товара зависит от его цены P (у.е.). Зависимость выражается равенством: $Q = 51 - P$. Общие затраты C зависят в свою очередь от объема продаж Q : $C = 30 - Q$. При какой цене товара P прибыль будет максимальной:

(A) 5 у.е. (B) 20 у.е. (C) 25 у.е. (D) 30 у.е. (E) 15 у.е.

Решение: прибыль вычисляется по формуле:

$$Q \cdot P - C = (51 - P) \cdot P - (30 - 51 + P) = -P^2 + 50P + 21.$$

Данная функция принимает наибольшее значение при $P = 25$.

Задача 4. Взнос за страховку нового автомобиля составляет 500 евро в первый год. Во второй год взнос меньше на 2%. В каждый последующий год взнос уменьшается на 3% по отношению к предыдущему. В каком интервале находится страховой взнос на седьмой год:

(A) [400;410] (B) (410;415]
C) (415;425] (D) (425;435] (E) (435;445]

Решение: $500 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97^5 \approx 420{,}78 \in (415;425]$.

Задача 5. В книжном магазине продано некоторое количество (отличное от нуля) книг по цене 4 евро за штуку и некоторое количество (отличное от нуля) другой книги по цене 10 евро за штуку. Общая прибыль от продажи книг составила – 230 евро. Определить количество всех возможных вариантов продаж.

(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Решение: количество проданных книг первого вида обозначим за x, второго - за y. $x, y \in N$. Тогда $4x + 10y = 230$. Следовательно, $2x + 5y = 115$. Отсюда, $x \vdots 5$. $y \geq 1$ Значит $x \leq 55$, т.е. следует искать x среди чисел $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55\}$. Получаем 11 пар:

$(5,21); (10,19); (15,17); (20,15); (25,13); (30,11); (35,9); (40,7);$

$(40,7); (45,5); (50,3); (55,1).$

Задача 6 (задача с открытым ответом). Некий гражданин открыл текущий валютный счёт на сумму 3000 евро. Ставка по вкладу – 0,12% годовых. Через месяц вкладчик снял со счета 500 евро, ещё через полмесяца положил 800 евро, ещё через месяц снова снял 1000 евро, ещё через 6 месяцев закрыл счёт. Какую сумму получил вкладчик (с точностью до евро)?

Решение: В условии задачи готовится, что гражданин открыл текущий валютный счёт. В банковской практике начисления по такому вкладу осуществляться по схеме простых процентов. Месячная ставка по вкладу: $0{,}12 \div 12 = 0{,}01\%$, $0{,}005\%$ – ставка за полмесяца.

На момент закрытия счета основной вклад составляет: $3000 - 500 + 800 - 1000 = 2300$ (евро). Процентные начисления: $\frac{1}{100}(3000 \cdot 0{,}01 + 2500 \cdot 0{,}005 + 3300 \cdot 0{,}01 + 2300 \cdot 6 \cdot 0{,}01) = 2{,}135$ (евро). Вкладчик получил: $2300 + 2{,}135 \approx 2302$ (евро).

Задача 7 (задача с развернутым ответом). Взят кредит в размере 1000 евро. Срок кредита – один год. Годовая процентная ставка – 6%, сложная. Погашение кредита осуществляется равными выплатами в конце каждого месяца. В каждой выплате включены погашение процентной ставки и погашение доли основного долга. Определить погашение доли основного долга во второй выплате.

Замечание. Вычисленный размер выплаты округлить до евро.

Решение: обозначим за a постоянную ежемесячную выплату. Ежемесячная процентная ставка: 6:12=0,5%.

Основной долг может быть представлен в виде суммы:

$$1000 = \frac{a}{1+\frac{0,5}{100}} + \frac{a}{\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^2} + \ldots + \frac{a}{\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{12}}$$ (*составление данного уравнения оценивается в 2 балла*).

$$\frac{1}{1,005} \approx 0,995 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (0,995 + 0,995^2 + \ldots + 0,995^{12}) = 1000 \quad \Rightarrow$$

$$a \cdot \frac{0,995 \cdot (1-0,995^{12})}{0,005} = 1000,$$

$a \cdot 0,058 = 5 \Rightarrow a \approx 86$ евро (*нахождение размера ежемесячной выплаты из уравнения оценивается в 4 балла*)

Структура I выплаты в 86 евро: $0,005 \cdot 1000$ евро – оплата процентных начислений за месяц; $86 - 5 = 81$ евро – оплата основного долга. Остаток по основному долгу $1000 - 81 = 919$ евро (*получение того вывода оценивается в 2 балла*).

Структура II выплаты в 86 евро: $0,005 \cdot 919$ евро – оплата процентных начислений за месяц; $86 - 4,6 = 81,4$ евро – оплата основного долг (*получение этого результата оценивается еще в 2 балла*).

3.4. Задания для студентов и взрослых (категория 18+).

Задача 1. В одной из европейских стран цена на хлеб в январе 2017 г. была 0,45 €. В феврале она увеличилась на 5% по сравнению с январем, в марте уменьшилась на 3% по сравнению с февралем, в апреле увеличилась на 5% по сравнению с мартом, в мае уменьшилась на 3% по сравнению с апрелем и т.д. (В каждый четный месяц цена повышается на 5% по сравнению с предыдущим, а в каждый нечетный месяц уменьшается на 3% по сравнению с предыдущим). Определите в каком интервале значений находится цена хлеба (в €) в декабре 2017 года.

A) [0,45 €;0,48 €] B) [0,49 €;0,52 €] C) [0,53 €;0,56 €]

D) [0,57 €;0,60 €] E) [0,61 €;0,64 €]

Решение: $0{,}45 \cdot (1+0{,}05)^6 \cdot (1-0{,}03)^5 = 0{,}52 \in [0{,}49; 0{,}52]$

Задача 2. Какую минимальную сумму (целое число) надо положить на срочный трехмесячный депозит с годовой процентной ставкой 1,2%, так чтобы через 9 месяцев накопить не меньше чем 10 000€?

A) 9 000 € B) 9 900 € C) 9 911 € D) 9 950 € E) 9 980 €

Решение: в условии задачи сказано, что депозит срочный, значит, начисления производятся по схеме сложных процентов. Для решения необходимо рассчитать размер квартальной ставки по годовой. Наиболее правильным являются следующие рассуждения Допустим депозит открыт на год и начисления процентов осуществляется по квартально, тогда справедливо уравнение: $K \cdot \left(1+\frac{1{,}2}{100}\right) = K\left(1+\frac{x}{100}\right)^4$, откуда x% – квартальная процентная ставка рассчитывается по формуле: $\frac{x}{100} = \sqrt[4]{1+\frac{1{,}2}{100}} - 1 \approx$0,002986594 (конформная процентная ставка). Однако, на практике, расчет квартальной ставки по готовой даже при сложной схеме начислений часто осуществляется так, как будто реализуется схема простых процентов: $K \cdot \left(1+\frac{1{,}2}{100}\right) = K \cdot \left(1+\frac{4x}{100}\right)$. Отсюда, $x = \frac{1{,}2}{4} = 0{,}3$ (релятивная процентная ставка). Данные задачи подобраны так, чтобы выбор участниками олимпиады любого из этих способов приводил к правильному результату:

1) Если используется релятивная процентная ставка, то получаем неравенство:

$K \cdot \left(1+\frac{1{,}2}{4\cdot 100}\right)^3 \geq 10000$, где K - начальная сумма вклада. Решая полученное уравнение, получаем: $K \geq \frac{10000}{1{,}003^3}$, $K \geq 9910{,}54$. Наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству - 9911 €.

2) Если используется конформная процентная ставка, то $K \cdot (1+0{,}002986594)^3 \geq 10000$, $K \geq 9910{,}93 \Rightarrow 9911$€.

Задача 3. Вы хотите взять потребительский кредит в размере 5 000 €, который надо погасить за 2 года одинаковыми суммами (аннуитетами), которые нужно вносить в конце каждого месяца. Три банк предлагают следующие условия кредита: Банк № 1 предлагает взять кредит под 0,4% по сложной месячной схеме начисления процентов, без оплаты дополнительных расходов на обслуживание кредита; Банк № 2 предлагает кредит под 0,35% по сложной месячной схеме начисления процентов с условием ежемесячной оплаты 5 € за обслуживание кредита; Банк № 3 предлагает кредит под 0,3% по сложной месячной схеме начисления процентов и оплату стоимости обслуживания 70 € на год, которые оплачиваются в конце соответствующего года. Выбор какого из трех банков является предпочтительным?

A) № 1 B) № 2 C) № 3 D) № 2 и № 3 E) Не имеет значение

Решение: рассчитаем аннуитет для каждого из трех банков:

Банк № 1:

$$q_1 = 1 + \frac{0,4}{100} = 1,004\,;$$

$$5000 = \frac{a_1}{1,004} + \frac{a_1}{1,004^2} + \ldots + \frac{a_1}{1,004^{24}} = \frac{a_1}{1,004} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,004^{24}}}{1 - \frac{1}{1,004}} \Rightarrow a_1 = 218,91\,€.$$

Банк № 2:

$$q_2 = 1 + \frac{0,35}{100} = 1,0035\,;$$

$$5000 = \frac{a_2 - 5}{1,0035} + \frac{a_2 - 5}{1,0035^2} + \ldots + \frac{a_2 - 5}{1,0035^{24}} = \frac{a_2 - 5}{1,0035} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,0035^{24}}}{1 - \frac{1}{1,0035}} \Rightarrow a_2 = 222,57\,€.$$

Банк № 3:

$$q_3 = 1 + \frac{0,3}{100} = 1,003\,;$$

$$5000 = \frac{a_3}{1,003} + \frac{a_3}{1,003^2} + \ldots + \frac{a_3 - 70}{1,003^{12}} + \frac{a_3}{1,003^{13}} + \frac{a_3}{1,003^{14}} + \ldots + \frac{a_3 - 70}{1,003^{24}} =$$

$$= \frac{a_3}{1,003} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,003^{24}}}{1 - \frac{1}{1,003}} - \frac{70}{1,003^{12}} - \frac{70}{1,003^{24}} \Rightarrow a_3 = 221,97\,€.$$

Так как $a_1 < a_3 < a_2$,Банк № 1 предпочтительный.

Задача 4. Определите процент инфляции в 2016 г. по сравнению с 2015 г., если известны объемы потребления Q в 2015 г. и цены P в 2015 г. и 2016 г. на 5 видов товаров первой необходимости, формирующих потребительскую корзину (Табл. 1).

Табл. 1

Товары	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Q_{2015}	40	30	70	60	80
P_{2015}	3	2,2	6	5,8	3,5
P_{2016}	3,2	2	6,4	6	3,4

A) – 6,4% B) 6,4% C) 2,3% D) 2,8% E) 4%

Решение: индекс инфляции $I = \frac{3,2\cdot 40+2\cdot 30+6,4\cdot 70+6\cdot 60+3,4\cdot 80}{3\cdot 40+2,2\cdot 30+6\cdot 70+5,8\cdot 60+3,5\cdot 80} = 1,028.$

Процент инфляции $i = (I-1)\cdot 100 = 2,8\%$

Задача 5. Инвестор имеет возможность вложить 22 000 € в один из двух проектов. При вложении в первый проект через год он получит доход в размере 5 000 €, в конце второго года получит 10 000 € и в конце третьего года получит 8 000 €. При вложении во второй проект через год он получит 10 000 € и в конце второго года получит 12 500 €. Каково будет абсолютное значение разности между чистой прибылью, от вложения в эти проекты, если основный процент ставки на год по депозитам составляет 1,2%?

A) 22 300 € B) 337 € C) 237 € D) 200 € E) 0 €

Решение: B)

$$NPV_1 = \frac{5000}{1+0,012} + \frac{10000}{(1+0,012)^2} + \frac{8000}{(1+0,012)^3} - 22000 = 22423,77\text{ €}.$$

$$NPV_2 = \frac{10000}{1+0,012} + \frac{12500}{(1+0,012)^2} - 22000 = 22086,74\text{ €}.$$

Тогда 22423,77 – 22086,74 = 337€.

Задача 6. (задача с открытым ответом). Некто вложил 5 000 € на срочный депозит под 2% годовых. В конце каждого года, после начисления процентов он снимал по 200 €. Сколько раз он мог осуществить эту операцию?

Решение: самое большое целое число n, которое ищем – это самое большое число, для которого справедливо неравенство:

$$\left(5000\cdot 1,02^n - 200\cdot(1,02^{n-1}+1,02^{n-2}+\cdots+1,02+1)\right)\cdot 1,02 \geq 200;$$

$$5000\cdot 1,02^{n+1} - 200\cdot(1,02^n+1,02^{n-1}+\cdots+1,02^2+1,02) \geq 200;$$

$$5000\cdot 1,02^{n+1} - 200\cdot\left(1,02\cdot\frac{1,02^n-1}{1,02-1}\right) \geq 200;$$

$5000 \cdot 1{,}02^{n+1} - 10000 \cdot (1{,}02^{n+1} - 1{,}02) \geq 200$;
$-5000 \cdot 1{,}02^{n+1} \geq -10000$;
$1{,}02^{n+1} \leq 2$;
$(n+1) \cdot ln1{,}02 \leq ln2$;
$n \leq \frac{ln2}{ln1{,}02} - 1$;
$n \leq 35{,}003$. Следовательно, $n = 35.n = 35.$

Задача 7 (задача с развернутым ответом). Стоимость страхового полиса данной машины в 2015 г. составляла 200 €. Согласно условиям страхователя каждый следующий год стоимость полиса уменьшается на 10% по сравнению с предыдущим. Однако если были аварии в предыдущем году, то пересчитанная стоимость полиса затем увеличивается на 15%. Стоимость страхового полиса в 2017 г. составляет 186,30 €, определите:

а) количество лет, в которые были аварии;

б) номер года (годов), в которые были аварии;

в) размер страховки в 2016 г.

Случай	*Аварий в 2015 г.*	*Размер страховки в 2016 г.*	*Аварий в 2016 г.*	*Размер страховки в 2017 г.*
1)	нет	200·(1-0,1)=180 €	нет	180·(1-0,1)=162 €
2)	нет	200·(1-0,1)=180 €	да	180·(1-0,1).(1+0,15)=186,30 €
3)	да	200·(1-0,1)·(1+0,15)=207 €	нет	207·(1-0,1)=186,30 €
4)	да	200·(1-0,1)·(1+0,15)=207 €	да	207·(1-0,1)·(1+0,15)=214,25 €

Из полученных возможных значений страховки в 2017 г. данному условию соответствуют случаи 2) и 3) Тогда получаем следующие выводы:

а) аварии были в одном из указанных лет; (*получение этого вывода оценивалось в 5 баллов*)

б) аварии были в 2015 г. или в 2016 г.; (*получение этого вывода добавляло еще 2 балла*)

в) в случае 2) размер страховки в 2016 г. – 180 €, а в случае 3) размер страховки в 2016 г. – 207 €. (*предоставление ответа на этот вопрос оценивалось в 3 балла*)

4. Анализ результатов олимпиады

По итогам олимпиады была составлена база данных, в которой отражена сумма баллов, набранная каждым из участников, а также представлены данные о его возрастной группе и стране проживания. Эти данные использовались для определения победителей и призеров олимпиады в каждой возрастной категории (таблица 1).

Таблица 1

Шкала, использованная при определении победителей и призеров олимпиады с указанием их количества и процентного отношения к общему числу участников олимпиады

Место	Возрастая категория			
	Школьники младшая группа	Школьники средняя группа	Школьники старшая группа	Студенты и взрослые
I	[19;30] – 16 чел.	[27;30] – 26 чел.	[24;30] – 9 чел.	[27;30] – 22чел.
II	[16;18] – 5 чел.	[22;26] – 67 чел.	[19;23] – 18 чел.	[23;26] – 13 чел.
III	[12;15] – 54 чел.	[17;21] – 66 чел.	[15;18] – 40 чел.	[19;22] – 26 чел.
Всего, награжденных	75 чел.	159 чел.	67 чел.	61 чел.
% награжденных	22%	49%	33,5%	34%

При создании шкалы для определения победителей и призеров организаторы исходили из следующих соображений:

– олимпиада проводится не с целью проверки финансово-математической грамотности участников и выбора лучших из них, а с целью мотивации участников олимпиады улучшать свои показатели, а также с целью привлечения к олимпиаде новых участников;

– на каждой площадке проведения олимпиады и в каждой стране должны быть участники, получившие награду.

Распределения данных о результатах выполнения олимпиадных заданий по каждой возрастной группе представлено на диаграмме 3.

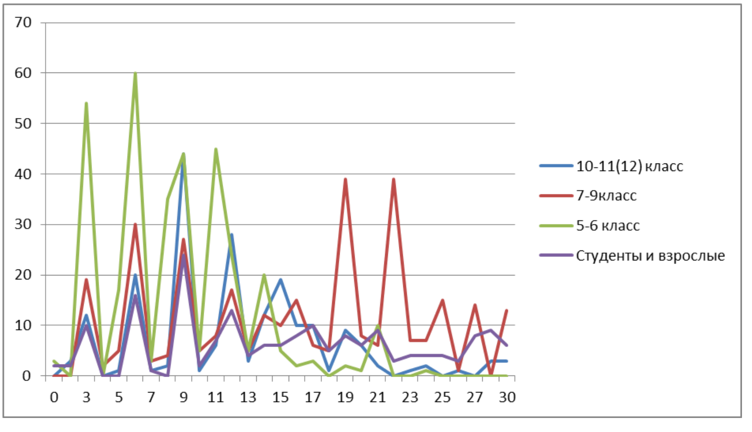


Диаграмма 3. Распределение результатов олимпиады (количества набранных баллов) по возрастным категориям участников (в абсолютных значениях количества человек)

Таблица 1 и диаграмма 3 показывают, что заметно лучше справились с заданием олимпиады школьники средней возрастной группы (7-9 классы). В этой группе не только наибольший процент участников, получивших награды, но и наибольшее количество тех, кто смог справиться с решением всех задач и показать высший результат (13 чел, 30 баллов). Об этом же говорит и сдвиг распределения в сторону наибольших значений. Наиболее сложным оказалось олимпиадное задание для школьников младшей возрастной категории. Наибольшее количество баллов, которое смогли набрать участники этой категории – 24 (1 человек), кроме того, заметен сдвиг распределения результатов в сторону меньших значений. Сложность задач в этой группе была вызвана их ярко выраженным практико-ориентированным характером. Для применения математических знаний необходимо было уточнить в математических терминах требование задачи, осмыслить входную информацию, представленную не только в текстовой, но и графической форме.

Результаты участников возрастной категории «студенты и взрослые» в сравнении с результатами I международной олимпиады [5] свидетельствуют о том, что задания более соответствовали их возможностям. Наивысший балл смогли набрать 6 участников, процент награжденных оказался также достаточно высок (см. таблицу 1).

5. Выводы

Несмотря на то, что международная олимпиада по финансовой и актуарной математике проводится во второй раз, она уже доказала свою жизнеспособность. Если в I олимпиаде принимало участие 532 человека (360 школьников [6] и 172 студента [5]), то во второй олимпиаде уже 1041 человек. Увеличилось и количество стран – участниц олимпиады, возросло число ее партнеров. Это доказывает, что свою миссию – привлечение внимания подрастающего поколения к значимости приобретения математических знаний для достижения высокого уровня финансовой грамотности – она выполняет.

Тем не менее предстоит еще большая работа по совершенствованию олимпиадных заданий в сторону усиления их практико-ориентированного характера, оптимизации сложности предлагаемых задач, по определению структуры баз данных, которая позволит проводить более глубокий сравнительный анализ результатов.

Учредители олимпиады выражают огромную благодарность всем своим партнерам, без содействия которых цели олимпиады не были реализованы столь успешно.

NOTES/ЗАМЕТКИ

1. High-Level principles on national strategies for financial education: OECD/INFE, 2012
(URL: http://www.oecd.org/daf/fin/financial education/OECD_INFE_High_Level_Principles_National_Strategies_Financial_Education_APEC.pdf).
2. Measuring Financial Literacy: Questionnaire and Guidance Notes for Conducting an Internationally Comparable Survey of Financial Literacy
(URL: https://www.oecd.org/finance/financial-education/49319977.pdf).
3. Итоги Международной олимпиады по финансовой и актуарной математике: новости САФУ от 11.05.2017 (URL: https://narfu.ru/life/news/university/290416/).

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Shabanova, M., R. Nikolaev & S. Grozdev (2017). International Olympiad on financial mathematics, *Mathematics Plus, 1*, 27 – 30 [Шабанова, М., Р. Николаев & С. Гроздев (2017). Международна олимпиада по финансова математика, *Математика плюс*, *1*, 27 – 30.]

Nikolaev, R., M. Shabanova & D. Petrakov (2017). First International Olympiad in Financial Mathematics, *Mathematics and Mathematical Education, Proceedings of the 8th International Scientific Conference "Mathematics. Education. Culture" (On occasion of the 240-th anniversary of Carl Friedrich Gauss), 26 – 29 April, 2017, Russia, Toliati*, Toliati: Publ. House TGU, 94 – 99. [Николаев, Р., М. Шабанова & Д. Петраков (2017). Первая международная олимпиада по финансовой математике, *Математика и математическое образование: Сборник трудов VIII Международной научной конференции „Математика. Образование. Культура" (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гауса), 26 – 29 апреля 2017 года, Россия, Тольятти*, Тольятти: Изд-во ТГУ, 94 – 99.]

Forkunova, L., V. Lukina & T. Milkova (2017). First International Olympiad in Financial and Actuarial Mathematics: Results in Archangelsk region, Contemporary problems in Science and Education, Archangelsk: Publishing House "Academy for Natural Science", 4, 14. [Форкунова, Л., В. Лукина & Т. Милкова (2017). Первая международная олимпиада по финансовой и актуарной математике: Результаты по Архангельской области, *Современные проблемы науки и образования*, Архангельск: Издательский Дом „Академия Естествознания", 4, 14.]

https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=26658.]

RESULTS OF THE SECOND INTERNATIONAL OLYMPIAD IN FINANCIAL AND ACTUARIAL MATHEMATICS FOR SCHOOL AND UNIVERSITY STUDENTS

Abstract. The present paper sums up the results of the Second international Olympiad in financial and actuarial mathematics established by two Bulgarian universities: Economical university-Varna and Higher School of Insurance and Finance-Sofia. The participants were divided into four groups: the junior group – school students 11 – 12 years old, 5 – 6 grades; the middle group – school students 13 – 15 years old, 7 – 9 grades; the higher group – school students 16 – 18 years old, 10 – 11 (12) grades and professional college students; the senior group – University students and citizens, 18+ years old. The Olympiad mission is to draw attention to the importance issue of mathematical knowledge for improving the financial literacy of the population.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Prof.**
University of Economics – Varna
77, Knyaz Boris I Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Dr. Nina Patronova, Assoc. Prof.**
Northern (Arctic) Federal University
17, Severnaya Dvina Emb.
Arkhangelsk, Russian Federation
E-mail: n.patronova@narfu.ru

✉ **Dr. Larisa Forkunova, Assoc. Prof.**
Academy of Public Administration
8, Starovatutinskiy pr-d
Moscow, Russian Federation
E-mail: larisaforkunova@yandex.ru

✉ **Prof. Maria Shabanova, DSc.**
Moscow Center for Human Resource Development
6, Aviatsionnyi per.
Moscow, Russian Federation
E-mail: shabanovamv@mioo.ru