

ИНТЕРАКТИВНО ИЗУЧАВАНЕ НА ОПИСАНИ ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ В ДИНАМИЧНА СРЕДА

Бистра Царева, Радка Тодорова

Резюме. Статията е посветена на подхода на проучването с помощта на компютър, приложен към темата „описани четириъгълници“.

Keywords: learning, circumscribed quadrilateral, computer, dynamical environment.

Предимствата на изучаване на геометричните фигури в динамична среда са утвърдени и безспорни. Европейските проекти InnoMathEd и Fibonaccі (Кендеров, 2010) стимулираха и подпомогнаха много преподаватели в усилията им да обучават учениците и студентите в България, използвайки достиженията в областта на динамичните геометрични софтуери. С настоящата работа искаме да обогатим опита на преподавателите-ентузиасты. Ние предлагаме нов подход в изучаване на темата „Описани четириъгълници“, който позволява на учениците да се почувстват откриватели по време на учебния процес и всеки от тях да разшири познанията си по темата в зависимост от интересите и възможностите си. В същото време естествено и ненаатрапчиво учениците овладяват стратегията на изграждане на динамични чертежи.

С настоящата работа авторите показват как и теоретичната разработка на една тема, и представянето ѝ в учебните часове могат да направят обучението по математика интересно, интерактивно, креативно, самостоятелно или в термините на С. Курдюмов и Е. Князева „пробуждащо“ (Князева & Курдюмов, 2011).

Определение 1. Четириъгълник, на който страните се допират до окръжност, се нарича описан около окръжността.

Нека приемем уговорката, че както в определение 1, така и в цялата работа ще разглеждаме само изпъкнали четириъгълници.

Естествено е учениците да съобразят веднага, че съществуват безбройно много четириъгълници, удовлетворяващи определение 1, т.е. описани около дадена окръжност. *Интересно и полезно е учениците сами да откриват общите свойства на обекти и величини, свързани с тези безбройно много описани четириъгълници.*

I. Ако учениците вече са запознати с някакъв динамичен геометричен софтуер (ДГС), добре е предварително да им се възложи за домашна да построят четири-

ъгълник $ABCD$, описан около дадена окръжност $k(I; r)$. Тогава урокът по темата „Описани четириъгълници“ ще започне с представяне на различните конструкции, избрани от учениците и дискусия върху възможностите, които всяка от тях дава за въздействие върху чертежа чрез движение на свободните обекти.

II. Ако учениците все още не са използвали в обучението си ДГС, то темата „Описани четириъгълници“ е благодатна за тази цел.

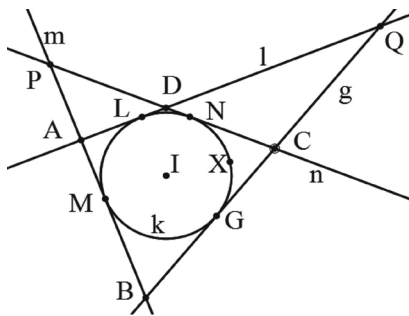
Стартираме урока при условията на **II**.

Задача 1. Да се построи четириъгълник $ABCD$, описан около окръжност $k(I; r)$.

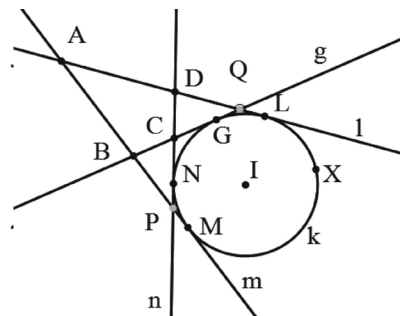
Решение: Нека k е окръжност с произволно избран център I и радиус $r = IX$.

Вариант 1. Изборът на динамичен геометричен софтуер за Вариант 1 в решението на построителната задача е равностоеен, т.е. бихме могли да използваме и GeoGebra, Geonext, Cinderella, Geometer's Sketchpad или Sam (Златанов и др., 2012), (Karaibryamov et al., 2012).

Избираме произволно точките A и C (външни за окръжността) и построяваме допирателните прави m, l от точка A към k и n, g от точка C към k (Фиг. 1). Означаваме допирните точки на m, l, n и g съответно с точките M, L, N и G . Точките $B = m \cap g$ и $D = n \cap l$ определят втората двойка срещуположни върхове на описания около k четириъгълник $ABCD$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Чрез движение на свободните точки A и C се променя формата на описания четириъгълник. В случаите, когато точка C се движи по някоя от построените вече допирателни прави m или l през A , то описаният четириъгълник се превръща в описан триъгълник. Учениците, експериментирайки върху чертежа, констатираха не само промяната на страните и ъглите на описания четириъгълник $ABCD$, но те достигат и до четириъгълник, който също е описан около k , но вече допирните точки M, L, N и G лежат върху продълженията на страните му (Фиг. 2). Сега окръжността k е външно вписана и ако те не се досетят, е уместно да се направи връзката

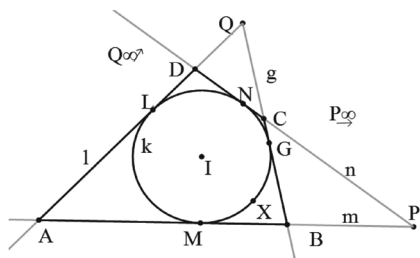
с външноописаните окръжности на триъгълника. Така естествено се достига до понятието външноописан четириъгълник.

Определение 2. Четириъгълник, на който продълженията на страните се допират до окръжност, се нарича външноописан около окръжността.

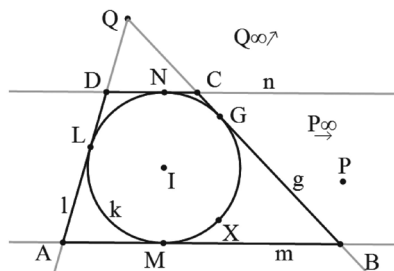
Да въведем точките $P = AB \cap CD$ и $Q = AD \cap BC$. Лесно се вижда от Фиг. 1 (Фиг. 2), че описаният (външноописаният) четириъгълник $ABCD$ може да се генерира и от допирателните прави m, n през точка P и l, g през точка Q към дадената окръжност $k(I; r)$. Това ни подсказва, че съществува и друга стратегия за построяване на описан четириъгълник, т.е. подмяна на свободните точки.

Новите възможности, които предоставя тази стратегия, са свързани с новите елементи за динамичен геометричен софтуер (безкрайни точки и функцията „размяна на крайна с безкрайна точка“) на специализирания ДГС Сам (Златанов и др., 2012), (Karaibryamov et al., under press). Учениците е достатъчно да знаят следното опростено определение на безкрайна точка: *Ще казваме че две прави се пресичат в безкрайна точка, когато те са успоредни.*

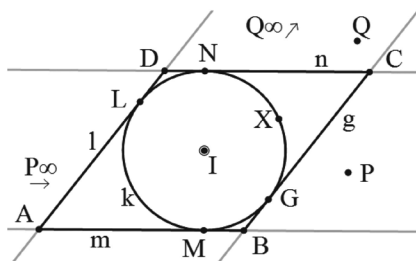
Вариант 2. Избираме произволно точките P и Q , които сега ще бъдат свободните точки (Фиг. 3). Построяваме допирателните прави m, n през точка P и l, g през точка Q към окръжността $k(I; r)$. Означаваме $A = m \cap l$, $B = m \cap g$, $C = n \cap g$, $D = n \cap l$.



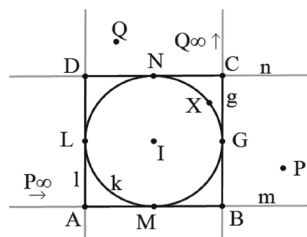
Фиг. 3



Фиг. 3.1



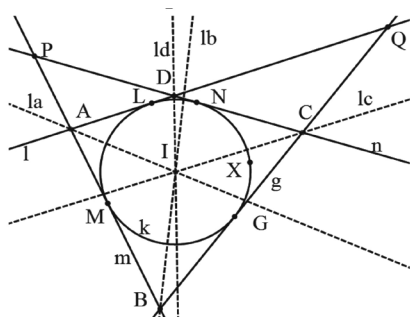
Фиг. 3.2



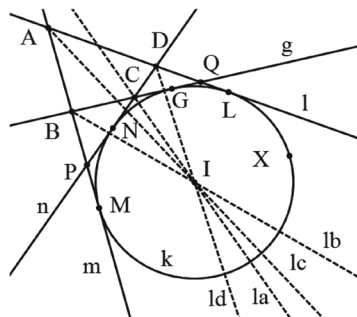
Фиг. 3.3

Нека P_∞ и Q_∞ са произволни безкрайни точки. Ако извършим размяната на P с P_∞ , то страните AB и CD ще станат успоредни и описаният четириъгълник $ABCD$ ще бъде трапец (Фиг. 3.1). След втората размяна, вече на Q с Q_∞ , описаният трапец $ABCD$ се трансформира в успоредник (Фиг. 3.2), който визуално учениците определят като ромб. *Sam*, чрез своята специална функция, генерира сам новите чертежи на екрана. Спестява се чертожно време и се показва връзката между фигурите. Динамиката на Q_∞ и P_∞ влияе върху ъглите и страните на описания успоредник. Възниква естественият въпрос: Наистина ли описаният успоредник е ромб или квадрат (Фиг. 3.3) и ако да, как да го докажем?

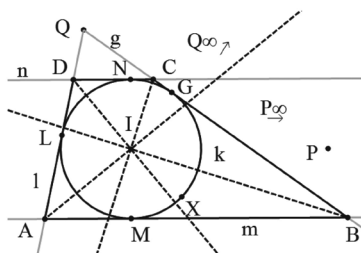
Учениците се убеждават експериментално, че трапецът и ромбът не могат да станат външноописани. За да насочим учениците към доказателството и на това твърдение предлагаме да се построят ъглополовящите l_a , l_b , l_c и l_d на ъглите на описания четириъгълник от Фиг. 1 и 3, а после да генерират от тях останалите чертежи. На Фиг. 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4 са представени с ъглополовящите си съответно произволен описан и външноописан четириъгълник, описани трапец и ромб.



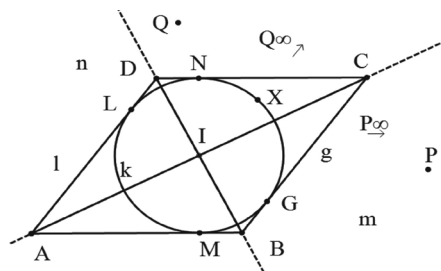
Фиг. 4.1



Фиг. 4.2



Фиг. 4.3



Фиг. 4.4

Учениците установяват, че ъглополовящите минават през центъра I на окръжността k , като: за описания четириъгълник (Фиг. 4.1) l_a, l_b, l_c и l_d са ъглополовящи на вътрешните ъгли, за външноописания четириъгълник (Фиг. 4.2) l_a и l_c са ъглополовящи на вътрешни ъгли, а l_b и l_d са ъглополовящи на външни ъгли. Манипулирайки чертежите чрез динамика на свободните точки, учениците се убеждават в запазването на релацията инцидентност на ъглополовящите с центъра на окръжността I . Разбира се, динамичният чертеж само подпомага откриването и формулирането на твърдението, което трябва да се докаже. Учениците сами достигат до първите характеристики на описан и външноописан четириъгълник.

Теорема 1. *Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност тогава и само тогава, когато ъглополовящите на три негови ъгъла се пресичат в една точка.*

Теорема 2. *Четириъгълникът $ABCD$ е външноописан тогава и само тогава, когато ъглополовящите на един вътрешен и външните на двата негови съседни ъгъла се пресичат в една точка.*

Доказателството на двете теореми се основава на познатото от седми клас твърдение от Евклидовата геометрия „Една точка лежи върху ъглополовящата на даден ъгъл тогава и само тогава, когато е на равни разстояния от раменете му“ и определението на окръжност.

Сега учениците, позовавайки се на свойството на диагоналите на ромба да бъдат ъглополовящи на ъглите му (Фигура 4.4) и на теорема 1, сами формулират и доказват твърдението:

Факт 1. *Описаният успоредник е ромб.*

В случая на описан трапец (Фиг. 4.3) за съответните ъгли $\sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle CDQ$, получени при пресичането на успоредните прави AB и CD с AD , имаме $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDQ$. Следователно техните ъглополовящи са успоредни, поради което не съществува крайната точка I , а от там и външноописаната окръжност. Така учениците са доказали и следващото твърдение:

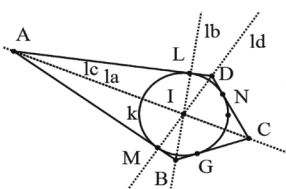
Факт 2. *Не съществуват външноописани трапеци и успоредници.*

Учениците могат да експериментират върху чертежите. Динамиката на свободните точки влияе върху дължините на страните на описаните и външноописаните четириъгълници. Така естествено възниква необходимостта от следващата теорема:

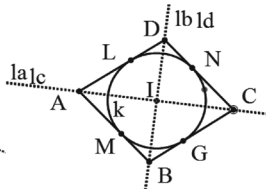
Теорема 3. *Необходимото и достатъчно условие четириъгълникът $ABCD$ да бъде описан е дължините на страните му да удовлетворяват условието $AB + CD = AD + BC$.*

Доказателство: Доказателството на необходимото условие и на достатъчното условие за случая, когато произволна двойка съседни страни (например AB и AD) са различни, е включено във всички настоящи учебници. За това **ще коментираме само случая, когато $AB = AD$** . Веднага следва $BC = CD$. Това означава, че четири-

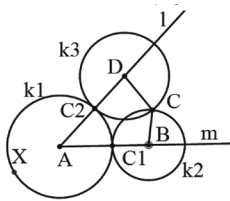
ъгълникът $ABCD$ е делтоид (Фиг. 5.1). Поради еднаквостта на триъгълниците ABC и ADC лесно се съобразява, че делтоидът удовлетворява условията на теорема 1 и следователно е описан четириъгълник. Ъглополовящите l_a и l_c съвпадат. Ако се добави условието $AB = BC$, делтоидът ще се превърне в ромб и ъглополовящите l_b и l_d също ще съвпадат (Фиг. 5.2). Във всички български учебници се разглежда само случаят, когато $ABCD$ е ромб.



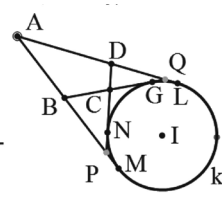
Фиг. 5.1



Фиг. 5.2



Фиг. 6



Фиг. 7

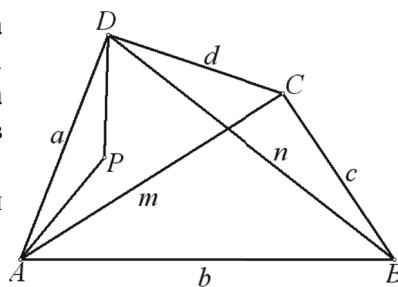
Очаква се учениците да предложат второ доказателство на Факт 1, използвайки теорема 3.

Теорема 3 предлага възможност да се построява описан четириъгълник без да е зададена вписаната в него окръжност. Избираме произволно точката A и правите m и l през A (Фиг. 6). Построяваме окръжност $k_1(A; r = AX)$, където X е произволна точка. Определяме точките: $C_1 = m \cap k_1$ и $C_2 = l \cap k_1$. Избираме произволните точки $B \in m$ и $D \in l$, така че C_1 / AB и C_2 / AD . Тогава пресечната точка на окръжностите $k_2(B; r = BC_1)$ и $k_2(D; r = DC_2)$ е върхът C . Тази конструкция осигурява условието $AB - BC = AD - CD$, което е еквивалентно на достатъчното условие на теорема 3. Прилагайки динамика върху свободните обекти A, X, B, D, m, n учениците установяват случаи, когато окръжностите k_2 и k_3 не се пресичат, т.е. точка C не съществува. Така възниква необходимост учениците да се запознаят и с основното твърдение в геометрията на четириъгълниците

Теорема* За произволен четириъгълник $ABCD$ е в сила неравенството $ac + bd \geq mn$, където a, b, c и d са дължините съответно на страните AB, BC, CD и DA , а m и n – на диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$.

Доказателство. 1. Да допуснем, че всеки два съседни ъгъла на четириъгълника $ABCD$ са равни. Следователно всеки от тях е равен на 90° и тогава четириъгълникът $ABCD$ е правоъгълник. Сега е в сила $a^2 + b^2 = m^2$ и теоремата е вярна.

2. Нека поне два съседни ъгъла не са равни и за определеност да приемем, че $\angle BAD > \angle ABC$



Фиг. 8

(Фигура 8). Тогава съществува вътрешна точка P за четириъгълника $ABCD$, така че $\sphericalangle PAD = \sphericalangle CBD$ и $\sphericalangle PDA = \sphericalangle BDC$. Тогава $\triangle APD \sim \triangle BCD$ и можем да запишем

$$(1) \quad \frac{a}{n} = \frac{DP}{d} = \frac{AP}{c}.$$

Но $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BDP + \sphericalangle PDA = \sphericalangle PDB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle PDC$. Тогава, отчитайки първото равенство на (1), установяваме $\triangle ADB \sim \triangle PDC$ и можем да запишем

$$(2) \quad \frac{b}{CP} = \frac{n}{d}.$$

Така от (1) и (2) получаваме $ac + bd = n(AP + CP) \geq n.AC = m.n$. Равенство се достига, когато $P \in AC$.

Теорема 4. *Необходимото и достатъчно условие четириъгълникът $ABCD$ да бъде външноописан е дължините на страните му да удовлетворяват условието $|AB - CD| = |AD - BC| \neq 0$.*

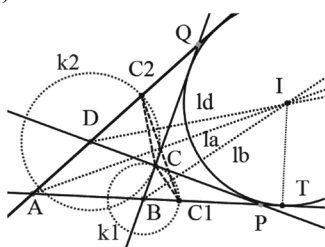
Доказателство: Необходимост. Нека четириъгълникът $ABCD$ е външноописан. Следвайки означенията на Фиг. 7 и отчитайки равенството на допирателните към окръжност от външна точка ($AM = AL$, $BM = BG$, $DN = DL$, $CN = CG$), можем да запишем:

$$\begin{aligned} |AB - CD| &= |AM - BM - (DN - CN)| = |AL - BG - DL + CG| = \\ &= |(AL - DL) - (BG - CG)| = |AD - BC|. \end{aligned}$$

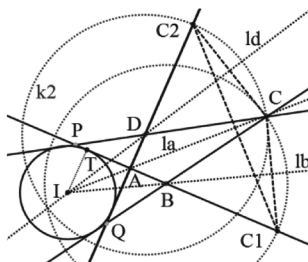
Достатъчност. Нека $|AB - CD| = |AD - BC| \neq 0$. Условието разликите да са различни от нула изключва възможността $ABCD$ да е успоредник.

I. Нека $AB \neq AD$. Следователно и $CD \neq BC$.

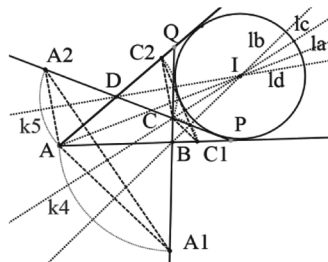
а) Нека: а₁) $AB > CD$ и $AD > BC$ или а₂) $AB < CD$ и $AD < BC$. Тогава $|AB - CD| = |AD - BC| \Leftrightarrow AB + BC = AD + DC$. Намираме точките: C_1 от $BC_1 = BC$ и C_2 от $DC_2 = DC$, така че точка B / AC_1 и D / AC_2 (Фиг. 8.1 за случая а₁) или (Фиг. 8.2 за случая а₂)).



Фиг. 8.1



Фиг. 8.2



Фиг. 8.3

Следователно ΔBCC_1 и ΔDCC_2 са равнобедрени и $AC_1 = AB + BC_1 = AB + BC$, $AC_2 = AD + DC_2 = AD + DC$. Тъй като по условие $AB + BC = AD + DC$, то следва $AC_1 = AC_2$ или ΔAC_1C_2 също е равнобедрен. Тогава ъглополовящите l_a , l_b и l_d съответно на ъглите BAD , C_1BC , C_2DC са и симетрали на страните CC_1 и CC_2 на ΔCC_1C_2 . Но симетралите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, поради което и ъглополовящите l_a , l_b и l_d имат обща точка I . Съгласно теорема 2 четириъгълникът $ABCD$ е външноописан. На фиг. 8.1 и 8.2 е добавена и външновписаната окръжност k (I ; $r = IT$). Всяка от фигурите 8.1 и 8.2 се получава от другата чрез динамика на свободните точки A , B , C и D .

Интересно за учениците е да проследят, че няма значение дали разгръщането на сумите $AB + BC$ и $AD + CD$ се изпълнява по страните през върха A (Фиг. 8.1) или по страните през срещуположния му връх C (Фиг. 8.3), защото връхните ъгли имат обща ъглополовяща. Сега симетралите на страните на ΔAA_1A_2 съвпадат с ъглополовящите l_c , l_b и l_d .

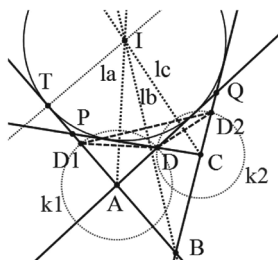
б) Нека: б₁) $AB > CD$ и $AD < BC$ или б₂) $AB < CD$ и $AD > BC$. Тогава $|AB - CD| = |AD - BC| \Leftrightarrow AB + AD = BC + CD$. Намираме точките D_1 от $AD_1 = AD$ и D_2 от $CD_2 = CD$, така че точка A / BD_1 и C / BD_2 (Фиг. 8.4 за случая б₁) или (Фиг. 8.5 за случая б₂)). По построение ΔDAD_1 и ΔDCD_2 са равнобедрени, а съгласно построенията и достатъчното условие $AB + AD = BC + CD$, следва $AD_1 = AD_2$, т.е. и D_1DD_2 е равнобедрен. Тогава ъглополовящите l_a , l_b и l_c са и симетрали на страните D_1D_2 , DD_1 и DD_2 на ΔDD_1D_2 . Следователно l_a , l_b и l_c се пресичат в една точка I . Съгласно теорема 2 четириъгълникът $ABCD$ е външноописан.

II. Нека $AB = AD$. Веднага следва $BC = CD$. Това означава, че четириъгълникът $ABCD$ е делтоид (Фиг. 9). Лесно се съобразява, че ъглополовящите $l_a \equiv l_c$, l'_b и l'_d се пресичат в една точка I' , която е център на външновписаната окръжност.

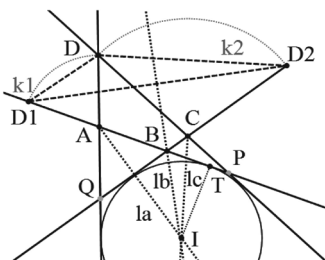
Така като следствие на теореми 3 и 4 получаваме твърдението:

Факт 3. Делтоидът е едновременно описан и външноописан четириъгълник.

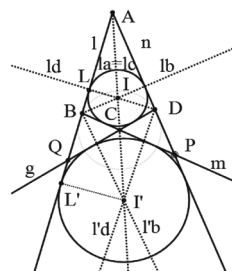
Част от изследванията, например случаите б₁) и б₂), могат да се зададат за самостоятелна работа и да бъдат докладвани от ученици.



Фиг. 8.4



Фиг. 8.5

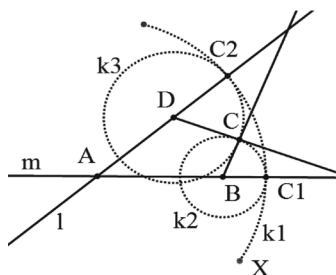


Фиг. 9

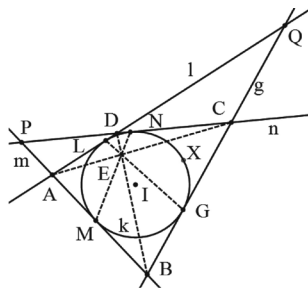
Теорема 4 предлага възможност за построяване на външноописан четириъгълник без да е зададена външноописаната окръжност. Избираме произволно точката A и правите m и l през A (Фиг. 10). Построяваме окръжност, където X е произволна точка. Определяме точките: $C_1 = m \cap k_1$ и $C_2 = l \cap k_1$. Избираме произволните точки $B \in m$ и $D \in l$, така че B / AC_1 и D / AC_2 . Тогава пресечната точка на окръжностите $k_2(B; r = BC_1)$ и $k_3(D; r = DC_2)$ е върхът C . За да съществува точката C , отново трябва да са изпълнени и условията на Теорема*.

Продължавайки да повишаваме обема и нивото на знанията на будните и любознателни ученици, въвеждаме точката $E = AC \cap BD$ и построяваме правите MN и LG . Веднага учениците установяват експериментално, че правите MN и LG минават през точката E и това забележително свойство на точка E се запазва при динамика на свободните точки A, C, I и X както за описания, така и за външноописания четириъгълник $ABCD$ (Фиг. 11.1, 11.2).

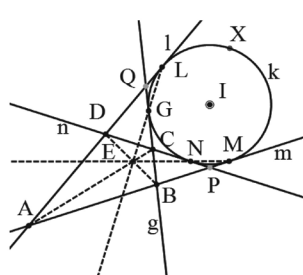
Така за пореден път използването на динамичен геометричен софтуер въвежда в учебния процес евристичния момент. Учениците сами достигат до следващото твърдение.



Фиг. 10



Фиг. 11.1

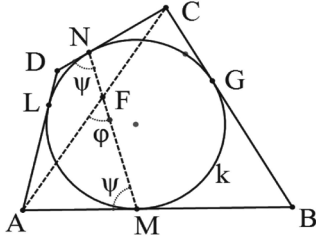


Фиг. 11.2

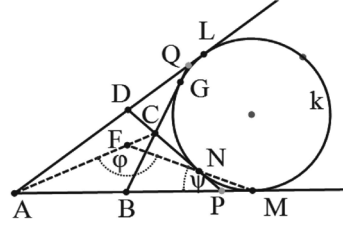
Теорема 5. *Диагоналите на описания (външноописания) четириъгълник и правите съединяващи допирните точки на срещуположните му страни (продълженията на срещуположните му страни) с вписаната (външноописаната) окръжност се пресичат в една точка.*

Първо доказателство: Да разгледаме описания четириъгълник $ABCD$ от фиг. 12.1 и външноописания четириъгълник $ABCD$ от фиг. 12.2. Да означим с M, G, N и L допирните точки съответно на страните AB, BC, CD и DA .

Известните доказателства на теорема 5 разглеждат поотделно двата случая. Ще представим един фрагмент от това пространно доказателство, за да ви запознаем с идеята му.



Фиг. 12.1



Фиг. 12.2

А) Нека $AC \cap MN = F$. Означаваме $\angle AFM = \varphi$ и $\angle AMF = \psi$. За двата случая можем да запишем:

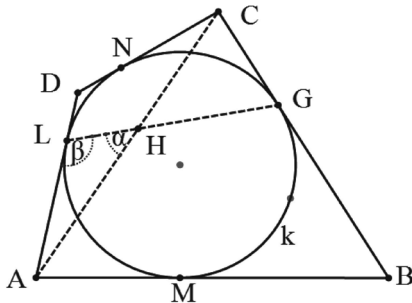
$$(3) \quad 2S_{AFM} = AF \cdot MF \cdot \sin \varphi = AM \cdot FM \cdot \sin \psi.$$

За описания четириъгълник $ABCD$ (Фиг.12.1) имаме $2S_{CFN} = CF \cdot NF \cdot \sin \angle CFN = CN \cdot FN \cdot \sin \angle CNF$. Но $\angle CFN = \angle AFM$ (връхни ъгли), $\angle CNF = 180^\circ - \angle DNF = 180^\circ - \psi$, защото $\angle DNF = \angle AMF = \frac{\widehat{MLN}}{2}$ (периферни ъгли). Следователно

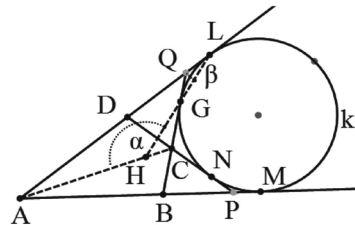
$$(4) \quad 2S_{CFN} = CF \cdot NF \cdot \sin \varphi = CN \cdot FN \cdot \sin(180^\circ - \psi) = CN \cdot FN \cdot \sin \psi.$$

Тогава от (3) и (4) получаваме $\frac{S_{AFM}}{S_{CFN}} = \frac{AF \cdot MF}{CF \cdot NF} = \frac{AM \cdot FM}{CN \cdot FN}$, от където следва

$$(5) \quad \frac{AF}{CF} = \frac{AM}{CN}.$$



Фиг. 12.3



Фиг. 12.4

A.2) За външно описания четириъгълник $ABCD$ (Фиг. 12.2) имаме

$2S_{CFN} = CF \cdot NF \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = CN \cdot FN \cdot \sin \angle CNF$. Но $\angle CNF = \angle MNP$ (върхни ъгли), а поради $PM = PN$ и $\angle PNM = \angle PMN$. Следователно $\angle CNF = \psi$. Така можем да запишем

$$(6) \quad 2S_{CFN} = CF \cdot NF \cdot \sin \varphi = CN \cdot FN \cdot \sin \psi.$$

От (3) и (6) получаваме $\frac{S_{AFM}}{S_{CFN}} = \frac{AF \cdot MF}{CF \cdot NF} = \frac{AM \cdot FM}{CN \cdot FN}$, от където следва, че равенството (5) е в сила и за външно описания четириъгълник $ABCD$.

Б) Нека $AC \cap LG = H$. Означаваме $\angle AHL = \alpha$ и $\angle ALH = \beta$. За двата случая можем да запишем

$$(7) \quad 2S_{AHL} = AH \cdot LH \cdot \sin \alpha = HL \cdot AL \cdot \sin \beta.$$

B.1) По съображения, аналогични на тези от A.1), за описания четириъгълник $ABCD$ (Фиг. 12.3) имаме

$$(8) \quad 2S_{CHG} = CH \cdot GH \cdot \sin \alpha = CG \cdot HG \cdot \sin \angle CGH = CG \cdot HG \cdot \sin(180^\circ - \beta).$$

От (7) и (8) получаваме $\frac{S_{AHL}}{S_{CHG}} = \frac{AH \cdot LH}{CH \cdot GH} = \frac{HL \cdot AL}{CG \cdot HG}$, откъдето следва

$$(9) \quad \frac{AH}{CH} = \frac{AL}{CG}.$$

B.2) По съображения, аналогични на тези от A.2), за външноописания четириъгълник $ABCD$ (Фиг. 12.4) имаме

$$(10) \quad 2S_{CHG} = CH \cdot GH \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = CG \cdot HG \cdot \sin \angle CGH = CG \cdot HG \cdot \sin \beta.$$

От (7) и (10) получаваме $\frac{S_{AHL}}{S_{CHG}} = \frac{AH \cdot LH}{CH \cdot GH} = \frac{HL \cdot AL}{CG \cdot HG}$, от където следва (9). Отчитайки, че $AL = AM$ и $CG = CN$ записваме равенство (9) във вида

$$(11) \quad \frac{AH}{CH} = \frac{AM}{CN}.$$

Сравняването на (5) и (11) води до равенството $\frac{AF}{CF} = \frac{AH}{CH}$, където $F, H \in AC$. Това означава, че точките F и H делят отсечката AC в едно и също отношение. Следователно точките F и H съвпадат, а правите AC , MN и LG минават през една точка, т.е. правата AC минава през пресечната точка на правите MN и LG .

С) Аналогични разсъждения се повтарят за диагонала BD и правите MN и LG , в резултат на което се доказва, че и правите BD , MN и LG минават през една точка,

т.е. правата BD минава през пресечната точка на правите MN и LG . Следователно правите AC , BD , MN и LG минават през една точка и тя е точно $E = AC \cap BD = F = H$.

От проективна гледна точка двете фигури – описан и външноописан четириъгълник – не са различни. Следвайки идеите, развити в (Златанов и др. 2, 2012) и (Karaibryamov et al., under press), ние предлагаме кратко доказателство на теорема 5, основаващо се на **теоремата на Брианшон**: *Шестостранникът $abcdef$ е описан около конично сечение k тогава и само тогава, когато правите $p = (ab)(de)$, $q = (bc)(ef)$ и $r = (cd)(fa)$ минават през една точка.*

Второ доказателство: Това доказателство на теорема 5 е в две стъпки, като се прилага частен случай на теоремата на Брианшон за описан четириъгълник с известни допирни точки на страните му към окръжността k .

i) Четиристранникът $mnlng$ е описан (външноописан) за окръжността k като правите m и n се допират до k съответно в точките M и N тогава и само тогава, когато правите MN , AC и BD минават през една точка. Достатъчно е да приложим Теоремата на Брианшон за правите $mmlnng$. Следва, че правите $(mm)(nn) = MN$, $(ml)(ng) = AC$ и $(ln)(gn) = DB$ се пресичат в една точка, т.е. $MN \cap AC \cap BD = E$.

ii) Четиристранникът $mnlng$ е описан (външноописан) за окръжността k , като правите g и l се допират до k съответно в точките L и G тогава и само тогава, когато правите LG , AC и BD минават през една точка. Достатъчно е да приложим теоремата на Брианшон за правите $llmggn$. Следва, че правите $(ll)(gg) = LG$, $(lm)(gn) = AC$ и $(mg)(nl) = BD$ се пресичат в една точка, т.е. $LG \cap AC \cap BD = E$. Следователно $LG \cap MN \cap AC \cap BD = E$.

Ако учениците не поставят въпроса „къде във второто доказателство са използвани свойствата на окръжността“, добре е учителят да ги насочи и чрез дискусия и илюстрации да им покаже, че теорема 5 е частен случай на по-общо твърдение, касаещо и елипса, парабола или хипербола (обединени с общото название конично сечение):

Теорема 5*. *Ако $ABCD$ е четириъгълник, описан около коничното сечение k , то правите AC , BD и съединителните прави на допирните точки на срещуположните му страни с k се пресичат в една точка.*

Наистина всички ученици от школите и участници в по-големи състезания се запознават с основните теореми на проективната геометрия (теоремите на Дезарг, Пап, Паскал и Брианшон) и ги прилагат. Считаме, че е време и масовият ученик да се облекчи при решаването на подходящите групи задачи. Двете доказателства на теорема 5, които предложихме по-горе, красноречиво подкрепят нашата теза. Предимствата на проективния подход касаят не само опростяване на решението на задачите, но те формират у учениците креативност, която подпомогната от

динамичните геометрични софтуери може да ги направи откриватели както на известни, така и на нови твърдения (Златанов и др. 2, 2012), (Karaibryamov et al., 2012), (Гроздев & Ненков, 2011), (Гроздев & Ненков, 2012).

Изявените ученици от осми клас вече са подготвени за предизвикателството да участват в обобщаването на задача от първия ден на 53-та международна олимпиада по математика, проведена в гр. Мар дел Плата, Аржентина от 7 до 16 юли, 2012.

Центърът на външноописаната окръжност спрямо страната BD на даден $\triangle ABD$ е означен с I . Окръжността се допира до правите AB , BD и AD съответно в точките M , C и L . Правите LC и BI се пресичат в точка F , а правите MC и DI – съответно в точка J . Ако S и T са пресечните точки на BD съответно с AF и AJ , да се докаже, че C е средата на отсечката ST . (предложена от Евангелос Психас, Гърция)

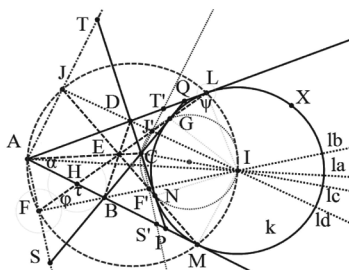
Задачата и нейното решение можете да намерите в Математика плюс (Гроздев, 2012). Ние предлагаме обобщение на тази олимпийска задача за външноописан четириъгълник.

Задача 2. Нека четириъгълникът $ABCD$ е външноописан като удовлетворява условията: $AB + BC = AD + DC$, $AB > CD$ и $AD > BC$. Центърът на външноописаната окръжност е означен с I . Нека окръжността се допира до правите AB , AD , BC и CD съответно в точките M , L , G и N , а правите LG и BI се пресичат в точка F , а правите MN и DI се пресичат в точка J . Ако S е пресечната точка на правите AF и BC , а T е пресечната точка на правите AJ и CD , да се докаже, че отсечките CS и CT са равни.

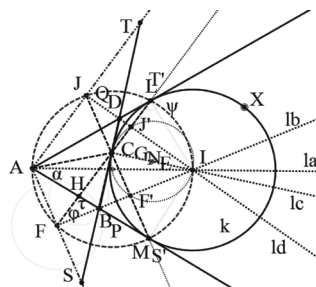
Решение: (Фиг. 13.1 - кадър от динамичен чертеж 131). В решението има три основни етапа.

а) Да се докаже, че правите AC , BD , MN и LG са конкурентни (теорема 5).

б) Да се докаже, че точките M , L , F и J принадлежат на окръжност с диаметър AI .



Фиг. 14.1



Фиг. 14.2

От IL перпендикулярна на AL и IM перпендикулярна на AM (като радиуси в точките на допирание на външноописаната окръжност до продълженията на страните на четириъгълника $ABCD$) следва, че точките L и M принадлежат на окръжността k с диаметър AI .

Да въведем означенията: $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle QLG = \sphericalangle QGL = \sphericalangle FGB = \psi$, $\sphericalangle FBH = \tau$, където $H = GL \cap AB$. За да докажем, че точка F принадлежи на k е достатъчно да докажем, че $\varphi = \sphericalangle LFI = \sphericalangle LAI = \frac{\alpha}{2}$. От $\sphericalangle FBH = \tau = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ следва $\sphericalangle FBG = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. Разглеждайки $\triangle FBG$, получаваме $\varphi = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \psi$. Но от $\triangle HBG$ следва, че $\psi = \tau - \beta$, а от $\triangle AHL$ следва, че $\psi = 180^\circ - \tau - \alpha$. Чрез последните две равенства намираме $\psi = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Следователно $\varphi = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \psi = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$ и $F \in k$ ($d = AI$). Аналогично се доказва и $\sphericalangle MJI = \sphericalangle MAI = \frac{\alpha}{2}$, от където следва, че и $J \in k$ ($d = AI$). Следователно FI е перпендикулярна на AF и IJ е перпендикулярна на AJ .

в) Да се докаже, че $CS = CT$.

Съгласно условието и доказаното в б) можем да отбележим: правата $BI \equiv FI$ (ъглополовяща) е перпендикулярна на правата AS и правата $DI \equiv IJ$ (ъглополовяща) е перпендикулярна на правата AT . Това означава, че $\triangle ABS$, $\triangle ABS$ и $\triangle ADT$ са равнобедрени, т.е. $AB = SB$ и $AD = DT$. Тогава $CS = CB + BS = CB + BA$ и $CT = CD + DT = CD + DA$. Но четириъгълникът $ABCD$ е външноописан, удовлетворявайки условието $AB + BC = AD + DC$. Следователно $CS = CT$.

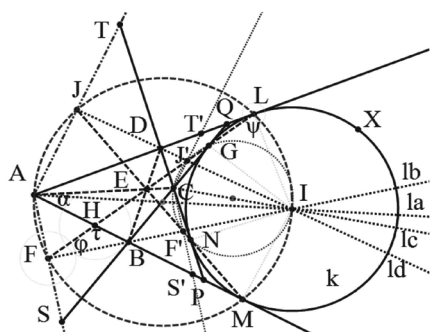
Като се използва динамиката на свободните точки G и N можем да постигнем тяхното съвпадане с точка C (Фиг. 13.2, която е кадър от динамичния чертеж 132). Тогава съвпадат и точките C и E , B и P , D и Q . Така се осъществява колинеарност на точките B , C , D и замяна на четириъгълника $ABCD$ с триъгълника ABD , а задачата от 53-та международна олимпиада по математика се явява частен случай на предложената от нас задача за външноописан четириъгълник.

На края нека отбележим, че за създаването на динамичния чертеж 13.1, така че от него да се получи фиг. 13.2, бе избрано допирните точки M , N , L и G , принадлежащи на окръжността k , да бъдат свободни точки.

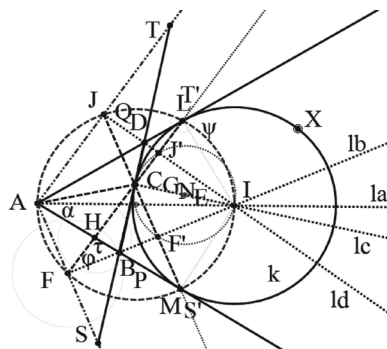
Изследванията в доказателството на теорема 4 и особено разискванията около разгъването на сумите на двойките съседни страни (Фиг. 8.3) ще подскажат на будните ученици съществуването и на друга двойка равни отсечки и те ще участват в съставянето на следващата задача.

Задача 2*. Нека четириъгълникът $ABCD$ е външноописан като удовлетворява условията: $AB + BC = AD + DC$, $AB > CD$ и $AD > BC$. Центърът на външноописаната окръжност е означен с I . Нека окръжността се допира до правите AB , AD , BC и CD съответно в точките M , L , G и N , правите LG и DI се пресичат в точка J' , а правите MN и BI се пресичат в точка F' . Ако S' е пресечната точка на правите CF' и AB , а T' е пресечната точка на правите CJ' и AD , да се докаже, че отсечките AS' и AT' са равни.

На фиг. 14.1, която е кадър от динамичния чертеж 141, са включени всички обекти, участващи в двете задачи. Доказателството протича аналогично на доказателството на задача 3, поради което няма да го представяме. Фиг. 14.2 е кадър от динамичния чертеж 142, където свободни остават само точките L и M , които вече съвпадат съответно с точките T' и S' , след като сме поискали да съвпадат точките C , G , N и сме трансформирали външноописания четириъгълникът $ABCD$ в триъгълника ABD . В този частен случай релацията $AS' = AT'$ следва веднага от свойството на допирателните.



Фиг. 14.1



Фиг. 14.2

Условията на задачи 2 и 2* съответстват на случая a_1) от теорема 4. Учениците, които вече са се почувствали уверени в знанията и творческите си умения, могат да поемат отговорността самостоятелно или в екип да формулират задачите, съответстващи на останалите три подслучая на теорема 4, да подготвят решенията им и свързаните с тях динамични чертежи.

ДГС Sam и динамичните чертежи, създадени чрез него за настоящата работа, можете да изтеглите от <http://fmi-plovdiv.org/admin/upload.file.jsp?dirID=19&fileID=1243&refTo=1>, да проследите всички построения чрез панела за презентация, да експериментирате върху чертежите чрез движение на свободните обекти.

Заклучение. Нашият подход за представяне на теоретичната част на темата “Описани четириъгълници” ще превърне учениците от слушатели в активни участници в учебния процес. Присъствието на евристичните моменти и използването на динамичен геометричен софтуер прави обучението увлекателно, атрактивно, съвременно и формира позитивно отношение към математиката. Следвайки този подход, учителят преподава не само знания, а и методи на изследователско мислене, той стимулира креативността на учениците и обогатява математическата им култура.

Разбира се, целият обем от знания, които предлагаме във връзка с темата и уменията за работа с динамичните геометрични софтуери ще се овладеят в различна степен от различните групи ученици. Разслоението ще се почувства дори и сред учениците, които обичат математика и са избрали да я изучават и в часовете на СИП. Но учениците от всяка група ще имат самочувствието, че са творци, дори и когато преоткриват известни факти. Този подход ще даде шанс на учителя да открие талантите, да ги изведе до високото ниво на международните олимпиади по конкретната тема, а те – талантливите ученици – ще бъдат удовлетворени от възможността да обогатят значително знанията и уменията си, както и да ги демонстрират в училищната общност.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. (2012). Международна олимпиада по математика. *Математика плюс*, 3, 48-56.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2011). Ортоцентър на вписан четириъгълник, *Математика плюс*, 4, 63-69.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.
- Златанов Б., Караибрямов, С. & Царева, Б. (2012). Върху нова функция в динамичния софтуер, *Практически семинар на проекта Fibonaccі, Боровец* 9-12.04.2012.
- Златанов, Б., Караибрямов, С. & Царева, Б. (2012). Вертикална интеграция на обучението в средното училище и университета чрез проективни методи в динамична среда, *Математика плюс*, 1, 50-60.
- Кендеров, П. (2010). Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonaccі. *Математика и математическо образование*, 39, 63-71.
- Князева, Е. & Курдюмов, С. (2011). *Синергетика: от прошло до бъдеще. Основания синергетика: Человек, конструирующий себя и свое будущее*. Москва.
- Karaibryamov S., Tsareva, B. & Zlatanov, B. (2012). Educational Software for Interactive Training of Students on the Theme “Mutual Intersecting of Pyramids and Prisms in Axonometry”, *Acta Didactica Napocensia*, 5, (1), 29-44.

Karaibryamov, S., B. Tsareva & Zlatanov B. Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam (in print).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience. (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.

INTERACTIVE STUDY OF CIRCUMSCRIBED QUADRILATERALS IN DYNAMIC ENVIRONMENT

Abstract. The paper is dedicated to the computer based inquiry approach to the topic of circumscribed quadrilaterals.

Bistra Tsareva

✉ Associated Professor, PhD
Plovdiv University „P. Hilendarski“
4003 Plovdiv
E-mail: btsareva@gmail.com

Radka Todorova

✉ Mathematics teacher
High School „H. Prodanov“
Karlovo
E-mail: rad_tod@abv.bg