ИНТЕГРИРАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ФРАКТАЛНИ КОНСТРУКЦИИ ЧРЕЗ GEOGEBRA ЗА ХИБРИДЕН УЧЕБЕН ПРОЦЕС

Магдалена Петкова

Резюме. В статията се прави анализ на съвременното обучение, което пряко зависи от технологичното усъвършенстване. Изучаваният материал на всички нива следва да бъде адаптиран към интересите на новото поколение, към повишаване на знанията и уменията чрез комбиниране на различни компютърни продукти (вкл. GeoGebra) и изучаване на фрактални обекти с търсене на връзки между елементарната геометрия и фракталната. Показани са няколко разработени примери с включване на насочващи въпроси, на задачи за анализ и извличане на закономерности, както и построяването на следващи интеграционни нива на фрактални конструкции.

Keyword: fractal, GeoGebra, blended learning, Mathematics

ВЪВЕДЕНИЕ

В последните години в сферата на образованието се внедриха различни технологични новости, обвързани главно с използването на информационни и комуникационни технологии (ИКТ), включващи и мултимедийни системи в обучението на учащи от различни възрастови групи. Днешното младо поколение израства оградено от технологии с най-различно приложение. Поради това и промените на всички образователни нива са обвързани с тях. Няма как в подготовката на учащите да не се набляга на използване и интегриране на софтуерни и/или хардуерни продукти от ново поколение. Използването на софтуер в обучението се е наложило по цял свят.

ТЕОРЕТИЧЕН АНАЛИЗ

Появата на компютрите в учебния процес създава атмосфера, която привлича вниманието на учащите. Знае се, че различията в поколенията трудно се преодоляват. Стандартно един средностатистически човек общува с до три (четири) поколения (през интервал от 20 – 25 години). През последните години интервалът между поколенията драстично намаля до около 10 години. Развиха се така наречените **поколения *XYZ & Alpha***, които чрез постоянното използване на технологиите „*...са развили бързина и многоканалност на възприятията, многозадачност, нелинейно визуално мислене, очакване за своевременна реакция и възнаграждение, очакване за непрекъсната връзка към тяхната мрежа от приятели и ресурси и непрекъснат достъп до разнообразни информационни източници*“ (Иванова et al., 2009).

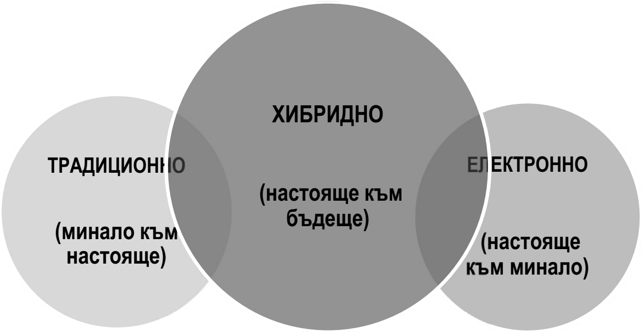
Използването само на черна дъска не е достатъчно интересен подход за участниците в обучението. Наблюдава се тенденция, според която училищата и университетите активно кандидатстват по проекти с цел финансиране и оборудване на училищни стаи и учебни зали с най-актуални технологични новости. Като пример тук могат да се споменат навлезлите в България интерактивни бели дъски (ИКТ) и специализирани софтуерни продукти с образователна насоченост.

През определен период от време е наложително да се прави актуализация на учебния процес. Идеята за създаване на специализиран софтуерен продукт за обучение се реализира успешно. Чрез използването на подходящ софтуер, съобразен със знанията, уменията и нуждите на учащите, може да се преподава учебен материал по нетрадиционен и интересен начин, който да предоставя възможност за развиване на креативно мислене, познавателни и изследователски способности. Представянето на (учебната) информация трябва да съответства на характеристиките и качествата на обучаваното поколение. Поради това следваха и изменения в методиките, техниките и средствата на учебния процес, които доведоха до появата на **електронното обучение.** Но след няколко годишни изследвания и апробации в тази посока редица изследователи достигнаха до извода, че освен предимства този вид обучение има и достатъчно голям брой недостатъци. Като например систематизираните от Павлова (Павлова, 2/2011):

- Ограничения от скоростта на връзката.
- Компютрите не могат да заместят пълноценно общуването между хората.
- Изисква повече време и средства на етапа на разработване.
- Програмите с включване на Интернет обикновено не позволяват конкретизиране на индивидуалните интереси.
- Не всяка дисциплина може да се изучава само чрез компютър – липсват общуване между хората, емоции и др.
- Липсва изява на личната активност на обучаемите, както и взаимодействие между участниците в учебния процес.
- Информацията обикновено е предоставена на отделни части, които могат да се видят в даден момент.
- Невинаги отразява реалните знания и не е сигурно кой точно бива изпитван.

Тук може да се допълни като недостатък и фактът, че за обучение по електронен път първоначално се записват голям брой кандидати, но тези, които го завършват и приключват успешно, са изключително малко. Това води до нуждата от ръководната и стимулираща сила на преподавателя. Във всяко свое действие изследователите се стремят към усъвършенстване. Логично е да търсят решения за превъзмогване на гореописаните недостатъци в електронното обучение, без да се изключва ИКТ. Може да се нарече „златна среда“ това, което напоследък се възприема като компромисно решение, т.е. **хибридното обучение** (**blended learning**, наричано още смесено или комбинирано). Този тип обучение се възприема като равновесната точка между традиционното и електронното (Фигура 1).

По своята същност хибридното обучение, представлява комбинация от съвременни приложения на педагогиката и начини на преподаване, която се осъществява чрез смесени визуални и физически ресурси. Комбинацията включва както технологично базирани материали, така и традиционни печатни учебници. Два са основните фактора при смесеното обучение, а именно времето, използвано за онлайн дейности, и необходимите технологии. Едно от най-адекватните определения за хибридното обучение е това на Heinze & Procter, според което „Смесеното обучение във висшето образование е обучение, което се подпомага от ефективна комбинация от различни методи за доставяне, модели на преподаване и стилове за обучение и което се базира на открита комуникация между всички включени в процеса“ (Heinze & Procter, 2004).



Фигура 1. Традиционното, електронното и хибридното обучение

Проведени са изследвания (Павлова, 2/2011), които установяват, че:

- значително се повишава качеството на обучението чрез предоставяне на различни възможности за комуникация в комбинация със семинарни занимания в учебните зали;
- студентите научават повече, когато към обучението им се добавят онлайн семинари и се изгради взаимодействие и удовлетвореност от постигнатото;
- комбинираната стратегия се оказва по-ефективна в сравнение със самообучението по електронен път, защото предоставя възможност за получаването на бързи образователни резултати от хора, които се обучават чрез нея.

В Интернет пространството съществуват много и най-различни софтуерни продукти, подходящи и приложими за използване в процеса на хибридното обучение.

Може да се твърди, че всеки софтуерен продукт от електронното обучение е приложим и при хибридното. Основната разликата се състои в това, че електронното обучение пренебрегва (измества на заден план) комуникацията и общуването лице в лице (face-to-face), което е предпоставка за отдалечаване и отчуждаване между обучаемите, обучаващите, обществото.

ИЗБОР НА ТЕМА

Избирането на подходяща тема за представяне пред определена аудитория е решаващо за последващите възприятия в живота на обучаваните. В статията на Славова et al. (2013) се разглежда групата на геометричните фрактали като подходяща за включване на *„...занимателен материал...,* защото занимателността е необходимо средство да възбужда и поддържа вниманието, тя е стимул за развитие на познавателните интереси на студентите, емоционална основа за усвояване на изучавания материал. Обучението по математика трябва да бъде построено така, че в този процес на получаване на знания студентът да се удивлява и възхищава от хармонията на нещата, с които се запознава, за да може по същество да оцени смисъла и значението на придобитите знания“. Фракталите са разглеждани като подход за „... *само*стоятелно творчество, самостоятелни разсъждения... при едновременното въздействие върху ума и емоциите на студентите... *“,* защото *„...* фракталите са обекти, притежаващи голяма естетическа привлекателност…“.

Не е важна само красотата на фракталите, но и тяхното приложение. В различните научни сфери изучаването на фракталната геометрия може да подпомогне изследването на обекти, зависещи от нелинейни динамични системи. Важни при фракталите са математическата формула, цветовата настройка, филтрите за трансформация.

Фракталната геометрия е в основата на редица изследвания, като например:

- **фракталната графика** – с помощта на която се създават компютърно генерирани фонови изображения и фантастични пейзажи за компютърни игри или книжни илюстрации;
- при изследване на земни и планетарни **релефи** (Луков et al., 2009);
- гравиран модел на разклонен фрактал на **компютърен чип** за охлаждане, разработен е от изследователи от Oregon State University;
- **фрактални антени** – Fractenna, САЩ (Fractal Antenna Systems, 2013) и Fractus, Европа (Fractus S.A Optimazed Antennas for Wireless Devices, 2013);
- **фрактална музика** – Harlan Brothers (Brothers, 2013);
- **фрактално изкуство** – William Latham, Greg Sams, Vicky Brago – Mitchell; и др.

ИЗБОР НА СОФТУЕР

След раждането на фракталната теория учени и изследователи работят за създаване, подобряване и улесняване на процеса на визуализиране на фрактали посредством разработването на различни приложни програмни средства. Най-подходящ начин за изучаване на фрактали се счита изследователският процес, осъществяван с подходящ софтуерен продукт. Може да се споменат например от:

1. Фракталната група продукти:

– 2D:

FractInt (free) – http://www.fractint.org/

Ultra Fractal – http://www.ultrafractal.com/

Fractal Science Kit (free) – http://www.fractalsciencekit.com/

Fractal Grower (free) –
http://cs.unm.edu/~joel/PaperFoldingFractal/paper.html

Videator - http://www.stone.com/Videator/Features.html

– 3D:

ChaosPro (free) – http://www.chaospro.de/index.php

XaoS (free) – http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php?id=main

Fractal Explorer - http://www.eclectasy.com/Fractal-Explorer/

Mandelbulber (free) – http://www.mandelbulber.com/

XenoDream – http://www.xenodream.com/

2. Географската група продукти:

Google Earth (free) – http://www.google.com/intl/bg/earth/index.html

NBOS – http://www.nbos.com/index.htm

3. Математическата група продукти:

Maple – http://www.maplesoft.com/index.aspx

В ръководствата на Славова за дистанционно обучение са реализирани няколко известни фрактала с помощта на Maple, които са подходящи, когато обучаемите имат познания или ще изучават дисциплини с Maple (Славова et al., 2013)(Славова, 2010).

4. Група Галерии:

http://www.enchgallery.com/index.htm

http://members.tripod.com/serguei_s/fractals.htm

От представените групи по-горе става ясна възможността за използване на различни софтуерни продукти при изучаване на фрактали, която зависи от професионалната насоченост на обучаемите. Могат да се използват и други програмни средства с тази цел. Например софтуерът **GeoGebra**:

– е лесно достъпен;
– е безплатен;

– е подходящ за използване в различните етапи от обучението;
– има възможност за модификация на ниво интерфейс при нужда;
– е подходящ за обучение на мултиетнически групи;
– разполага с инструменти за добавяне на анимация, динамичен текст;
– е приложим за интерактивни бели дъски (ИБД) и Android системи;
– може да се използва като средство за стимулиране и мотивиране към творческа работа;
– е подходящ за засилване на интереса към математиката;
– включва опции за съставяне на изпитни тестове, задачи с упътвания и/или отговори;
– може да повиши желанието за самостоятелната познавателна дейност на обучаваните;
– е подходящ за работа по проекти;
– се обновява съответно с новите хардуерни технологии;
– предоставя възможност за споделяне на разработени материали и обратна връзка в други потребители в онлайн пространството (Petkova, 2012), (Petkova, 2013).

Но подходящ ли е този софтуер за изучаване на фрактали или за създаване на фрактални конструкции, след като по предназначение е разработен като помощно средство за обучение и преподаване?

Целта на тази статия, след направения кратък анализ, е да предложи **възможност за интегриране на геометрични фрактални конструкции в хибриден учебен процес чрез GeoGebra учебни материали, насочено към пробуждане на креативно мислене, изследователски способности и пренос на информация при смяна на началните условия в учебния процес, многоканалност на възприятията и нелинейно визуално мислене.**

Разработени са няколко примерни задачи с допълнително зададени казуси към всяка от тях, които са подходящи за обучаващи се с професионална насоченост: математика, физика, астрономия, компютърна графика, инженерен дизайн, бъдещи учители и други.

ИСТОРИЧЕСКИ ФАКТИ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

Фракталите са геометрични обекти с удивителни свойства, всяка част на фрактала съдържа негово умалено подобно изображение. Благодарение на американския математик от полски произход Беноа Манделброт, работещ като математически аналитик в IBM, днес могат да се разглеждат, изследват и създават фрактални изображения. През 1977 г. е публикувана книгата на Манделброт „*The Fractal Geometry of Nature*”. Терминът, който произлиза от основата на латинската дума

fractus, е въведен от Манделброт през 1975 г. и означава **раздробен, фрагментен**. В математиката необикновените обекти са били споменавани в разработките на други учени като Поанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф и др., работили през периода 1875 – 1925 г. Но именно Манделброт успява да събере разнородните сведения и да види общото, като посочва важността на това откритие (Славова et al., 2013). Едни от основните свойства на фракталите са **безкрайността** и **самоподобието**, което е подчертано в определението на Манделброт (Mandelbrot, 1977): „Фракталът е структура, състояща се от части, които в някакъв смисъл са подобни на цялото*"*.

Самоподобният обект в математиката е такъв обект, който точно или приближено съвпада с част от себе си, т.е. цялото има същата форма, както и някоя негова част. В най-простия случай малка част от фрактала съдържа информация за целия фрактал (Славова, 2010).

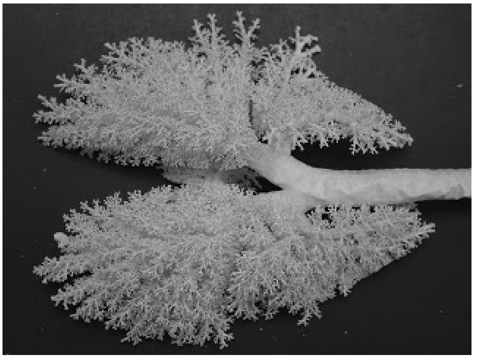
Фракталите могат много лесно да се визуализират чрез действието повторяемост при конструиране. Но по-важно е къде те могат да бъдат открити, а именно:

- **в природата – разклонени или спираловидни** фрактали. Много обекти, като снежинките, кристалите, звездните обекти, растенията и др., притежават фрактални свойства, в които с помощта на микроскоп или телескоп могат да се открият структури, аналогични на изходната (Фигури 2 ÷ 7)**;**
- **в геометрията – триъгълник на Серпински, крива на Кох и др.**, които ще бъдат споменати подробно по-нататък;
- **в алгебрата – множество на Манделброт, множество на Жулия** и др. (Fractal Pack 1 Educatour`s Guide, 2013).

Фигура 2. Дъб в Калифорния (Concord & Walnut Creek, 2007)

Фигура 3. Разклоняващи речни мрежи в плато Алегени в Пенсилвания и Западна Вирджиния (Perron/MIT, 2012)

Фигура 4. Вкаменелост (Fossil Museum. Iridescent Peltoceratoides and Cosmoceras Ammonites, Ulyanovsk, Russia, 2013)



Фигура 5. Дихателен орган на животно (Henry, 2013)

Фигура 6. Алое (Kane, 2009)

Фигура 7. Галактика (Paterson, 2009)

Според начина на дефиниране и генериране фракталите могат да се групират в три общи категории – **геометрични, алгебрични, стохастични** (Славова, 2010).

– Геометричните фрактали са най-нагледни и се получават с помощта на начупена в двумерния случай (или с повърхнина в тримерния случай), наречена генератор. При следващата стъпка на алгоритъма всяка от отсечките, образуващи начупената, се заменят с генератора в съответния мащаб. При безкрайно повторение на процедурата се получава геометричният фрактал.
– Алгебричните фрактали са най-голямата група. Те се получават с помощта на нелинейни процеси в *n*-мерни пространства, като този процес се интерпретира като дискретна динамична система. Нелинейните динамични системи

имат няколко устойчиви състояния. Това състояние, което се оказва динамична система след няколко итерации, зависи от нейното начално състояние. Затова всяко устойчиво състояние (атрактор) има някаква област на начални състояния, от които системата задължително ще попадне в разглежданите крайни състояния. По този начин фазовото пространство на системата се разбива на области на притегляне на атракторите. Ако фазовото пространство е двумерно, то оцветявайки областите на притегляне с различни цветове, може да се получи цветен фазов портрет на тази система (итерационен процес). Сменяйки алгоритъма за избор на цвят, може да се получат сложни фрактални картини.

– Стохастичните фрактали се получават, когато в итерационния процес някои от неговите параметри се променят случайно. Получават се обекти, които много приличат на природните – несиметрични дървета, изрязани брегови линии и др.

Фракталите могат да се класифицират и според самоподобността – **точна, квазисамоподобност и статистическа**.

– Точната самоподобност е най-силна. Фракталът е идентичен на себе си в различните мащаби.
– Квазисамоподобността е по-слаба форма на самоподобност, при която фракталът изглежда приблизително, но не напълно идентичен в различните мащаби. Квазисамоподобните фрактали съдържат малки копия на целия фрактал в деформирани и изродени форми.
– Статистическата самоподобност е най-слабата форма на себеподобност.

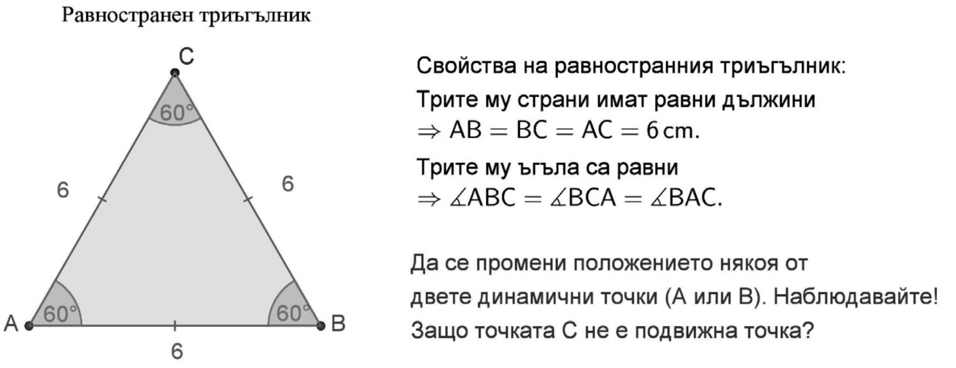
МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗНАНИЯ И ПРАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ – ОТ ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА КЪМ ФРАКТАЛНА ГЕОМЕТРИЯ

1. РАВНОСТРАНЕН ТРИЪГЪЛНИК – ТРИЪГЪЛНИК НА СЕРПИНСКИ

По дефиниция **равностранен** е този триъгълник, чиито страни са равни помежду си (Фигура 8). От тази дефиниция и от знанията за елементите на триъгълника могат да се изведат и визуализират основните му свойства.

Нека се постави следната елементарна задача за построение: Да се построи равностранен триъгълник по дадена страна.

Построение: Използват се за целта две окръжности с еднаква дължина на радиусите – $k_1\ (O_1, r)$ и $k_2\ (O_2, r)$, които покриват условието за равни страни. По построение точките C и D ще са пресечните точки на двете окръжности. Получават се два равностранни триъгълника: ΔO_1O_2C и ΔO_1O_2Dс дължини на страните, равни на радиусите на окръжностите (Фигура 9), което означава, че задачата има две решения.



Фигура 8. Свойства на равностранния триъгълник

Фигура 9. Построяване на равностранен триъгълник по дадена страна

При разглеждане на фиг.8 и фиг.9 в динамична среда може да се наблюдават зависимостите между елементите в триъгълника.

Казуси:

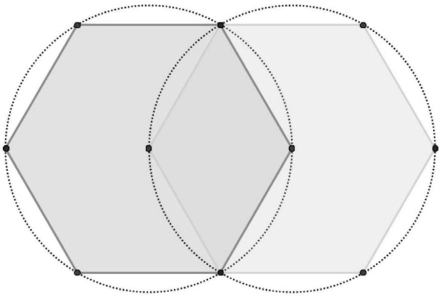
1. Възможно ли е да се открият повече равностранни триъгълници от посочените два в решението? Кога и при какви условия? Колко на брой равностранни триъгълника могат да се начертаят в конструкцията, ограничени от двете окръжности?

Решение: Общо могат да се намерят десет еднакви равностранни триъгълника. Съществуват различни начини за тяхното построение: чрез добавяне на още окръжности или чрез трансформации (осева симетрия, ротация, транслация).

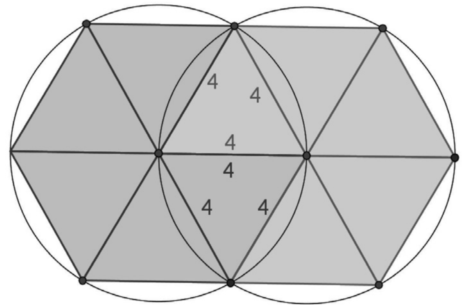
2. Правилният шестоъгълник *(хексагон)* ***съдържа в себе си шест равностранни триъгълника***. *Колко са правилните шестоъгълници, които* ***могат да се определят на чертежа? Колко еднакви и колко подобни хексагона могат са се***

открият в конструкцията (Фигура 10)*? По колко начин****а може да се построи правилен шестоъгълник на чертежа на фиг. 9****?*

Решение: Два са правилните шестоъгълника (Фигура 10, Фигура 11), които са еднакви помежду си.



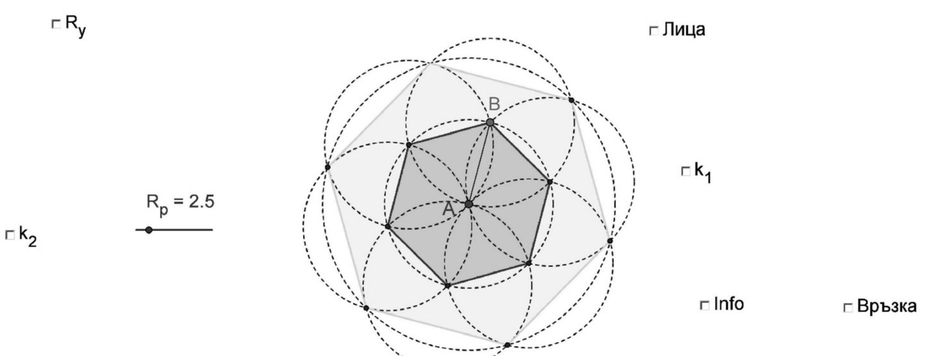
Фигура 10. Два правилни шестоъгълника



Фигура 11. Допълнително построение върху основен чертеж от фиг. 9 за визуализиране на правилни шестоъгълници чрез осева симетрия

Няма подобни хексагони в конструкцията (на този етап). Могат да се построят чрез добавяне на нови окръжности с радиус, равен на първата окръжност, чрез осева симетрия.

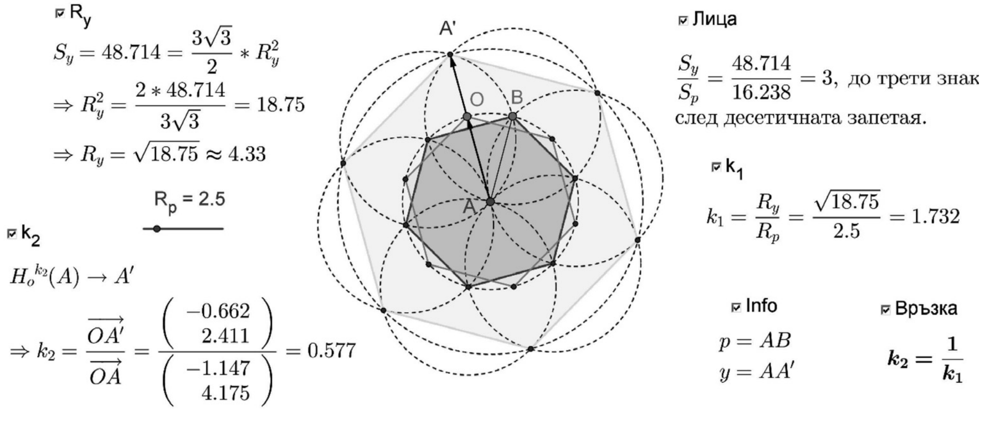
3. Да се построи подобен на наличните правилен шестоъгълник (хексагон), като се използва фиг. 9 (Фигура 12)*.*



Фигура 12. Начална конструкция

4. Колко еднакви и колко подобни хексагона могат да се открият в конструкцията? Да се определят съотношенията между лицата (S_y / S_p) и радиусите на двата подобни хексагона ($k_1 = R_y$ / R_p). Да се изследва коефициентът на подобност (k_2) между радиусите на двата подобни хексагона. Да се анализира връзката между коефициентите k_1 и k_2.

Решение: Съществува само един подобен (по-големия) на основния хексагон (Фигура 13).



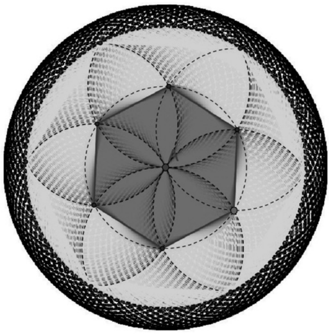
Фигура 13. Допълнителни елементи върху чертежа на фиг. 12

Точката A е център на конструкцията и чрез нея може да се променя мястото на цялата композиция. Точката B от чертежа е полуподвижна точка[1] и лежи върху централната окръжност. С промяна на местоположението ѝ по окръжността ще се променят местоположенията и на останалите зависещи от нея обекти.

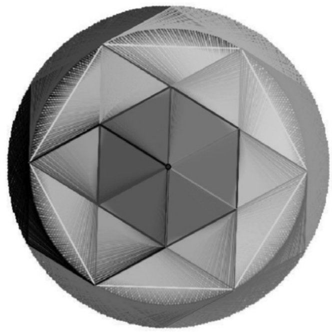
Ако се включи проследяване на движението на всички динамични елементи по конструкцията, ще се наблюдават следните красиви фигури.

5. Може ли да се въведе понятието „самоподобност", като се включат знанията на учащите за равностранен триъгълник?

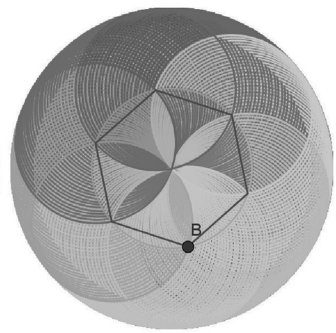
Понятието „самоподобност" води до разглеждане на система от задачи, която включва обекти от фракталната геометрия. Един от най-елементарните за построение обекти от фракталната геометрия е **триъгълник на Серпински**. Наименуван е на откривателя си – полския математик Вацлав Франчишек Серпински (Wacław Franciszek Sierpiński). Това е равностранен триъгълник (но не е задължително), чиито страни са разделени на три равни части. В техните среди са построени равностранни триъгълници, към страните на последните триъгълници, също са



Фигура 14



Фигура 15



Фигура 16

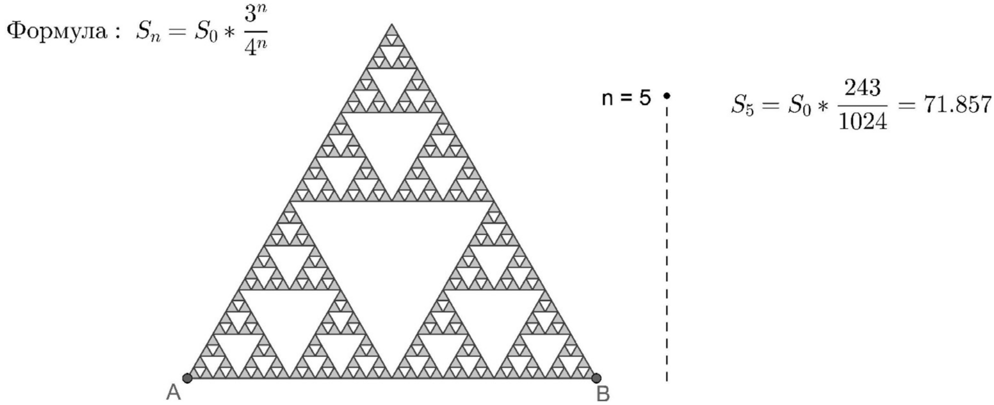
построени равнострании триъгълници на същия принцип и т. н. Серпинският триъгълник се построява, като многократно се премахва средният триъгълник от предварителното генериране. По този начин се поражда фрактална структура (Фигура 17).

При него при $n = 0$ итерации началният обект е триъгълник с лице S_0. При $n = 1$ итерации средната част на триъгълника – обърнат триъгълник със страна $\frac{1}{2}$ от началната – се отстранява и не се отчита по-нататък като лице. Останалото общо лице е $\frac{3}{4}$ от началното, т.е. $S_1 = \frac{3}{4} S_0$, но в него два пъти по-малкият по страна триъгълник се нанася 3 пъти. При $n = 2$ итерации с всеки от трите малки триъгълника се процедира както с първия, като премахнатите части в средите не се отчитат по-нататък. Останалото лице е $\frac{9}{16}$ от началното, като съответният четири пъти по-малък триъгълник се нанася 9 пъти в него (Георгиев, 2011). Броят на плътните триъгълници се увеличава с коефициент 3 на всяка стъпка, т.е. 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 и т. н.

В динамична среда на обучение на всяка итерация се визуализира съответното лице. При наблюдение на промяната на фрактала през първите пет итерации може да се изведе основна формула, която да отразява отношението на лицето на началния триъгълник, спрямо лицето на фрактала във времевия момент n при което.

6. Може ли да се покаже, че лицето на триъгълника на Серпински е равно на 0 (Славова et al., 2013)***?***

Решение: Нека лицето на изходния (началния) триъгълник е $S_0 = 1$ кв. см. При първата стъпка ($n = 1$ итерации) се отстранява $\frac{1}{4}$ от лицето, т.е. $S_1 = S_0 - G_P$, където



Фигура 17. Триъгълник на Серпински при $n = 0 \div 5$ итерации

лицето G_1 е премахната част от триъгълника след първата итерация. Следователно се получава, че $S_1 = S_0 - \frac{1}{4} \Rightarrow S_1 = \frac{3}{4}$ кв. см, което потвърждава гореизведената формула относно отношението между началното и итерационното лице. На следващата стъпка ($n = 2$ итерации) се отстраняват още три триъгълника с лица, равни на G_2, където $G_2 = \frac{1}{4^2}$ кв. см. Следователно $S_2 = S_0 - G_1 - 3G_2 \Rightarrow S_2 = S_0 - \frac{1}{4} - 3.\frac{1}{16} \Rightarrow$ $S_2 = S_0 - \frac{1}{4} - 3.\frac{1}{4^2} = \frac{15}{16}$ кв. см. При $n = 3$ итерации се отстраняват девет триъгълника с лица, равни на G_3, където $G_3 = \frac{1}{4^3}$ кв. см. Тогава $S_3 = S_0 - G_1 - 3G_2 - 3^2 G_3 \Rightarrow$ $S_2 = S_0 - \frac{1}{4} - 3.\frac{1}{4^2} - 3^2.\frac{1}{4^3} = \frac{27}{64}$ кв. см. Аналогично за S_4, S_5, ... ,S_n. Лицето на цялата премахната част е $G_n = \frac{1}{4} + 3.\frac{1}{4^2} + 3^2.\frac{1}{4^3} + ... + 3^{n-1}.\frac{1}{4^n} + ... = 1$ кв. см. Тогава лицето на триъгълника на Серпински при n итерации ще бъде равно на разликата на лицата на началния триъгълник и премахнатата от него част, т.е. $S_n = S_0 - G_n = 1 - 1 = 0$ кв. см, което трябваше да се докаже.

7. Да се пресметне лицето на триъгълника на Серпински след 10 итерации, ако страната на дадения равностранен триъгълник е равна на 32 см (Славова et al., 2013)**.**

Решение: По формулата за намиране на лицето на равностранен триъгълник имаме, че $S_0 = \frac{1}{2}.\alpha_0^2.\sin(60^\circ) \Rightarrow S_0 = \frac{1}{2}.32^2.\frac{\sqrt{3}}{2}$ кв. см. Търси се лицето след

10 итерации, т. е. $S_{10} = \frac{1}{2}.\alpha_{10}^{2}.\sin(60^{\circ}) \Rightarrow S_{0} = \frac{1}{2}.\alpha_{10}^{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$ кв. см. Може да се формулира връзка между дължините на страните на равностранните триъгълници по време на итерационния процес, която се явява геометрична прогресия ($a_0 = 32$ см, $a_1 = \frac{1}{2}.a_0 = 16$ см, $a_2 = \frac{1}{2}.a_1 = 8$ см,...) с формулата $a_n = a_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, тогава $a_{10} = 32.\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{1}{16}$ см. Следователно като се замести във формулата, се получава

$$S_{10} = \frac{1}{2}.a_{10}^{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{16}\right)^{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1024} \text{ кв. см.}$$

Възможно е всеки от обучаваните да решава този казус при различни начални данни за броя итерации и дължини на страните на равностранния триъгълник.

8. Може ли да се намери връзка между триъгълника на Паскал и този на Серпински?

Решение: При запълване на нечетните числа в триъгълника на Паскал се получава триъгълникът на Серпински (Ho, 2012).

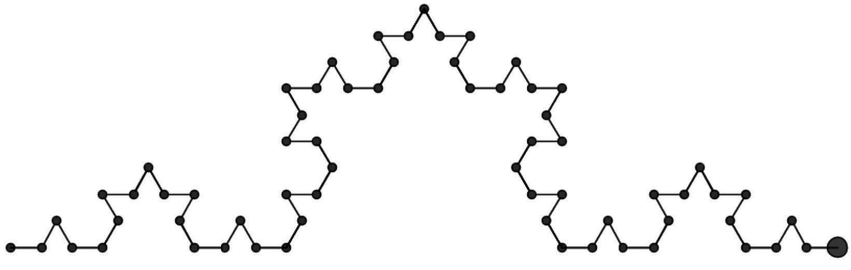
$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

Фигура 18. Триъгълник на Паскал

2. РАВНОСТРАНЕН ТРИЪГЪЛНИК – СНЕЖИНКА И ТРИАДА НА КОХ

Може да бъде разгледан и друг известен геометричен фрактал, който също има пряка връзка с равностранния триъгълник.

Триадната крива (или триада) на Кох е открита от Хелге фон Кох през 1904 г. Построението започва с отсечка с единична дължина ($n = 0$ поколение на кривата, наречен още генератор). По-нататък всяко звено се заменя с образуващия елемент – получава се следващото поколение, което е крива от 4 праволинейни звена, всяко с дължина по $\frac{1}{3}$ от предходното. За получаване на всяко следващо поколение всички звена на предишното поколение се заменят с намаления образуващ елемент. При $n \to \infty$ кривата на Кох става фрактален обект (Фигура 19).



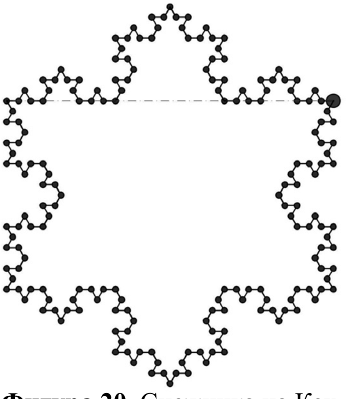
Фигура 19. Триада на Кох при $n = 3$ (чрез точката в края се променя дължината на генератора)

Казуси:

1. Да се пресметне дължината на начупената след 5 стъпки, след 10 стъпки, ако дължината на първоначалната отсечка е 10 см.

2. Да се анализира въпросът има ли дължина фракталът „триадна крива на Кох“.

Снежинката на Кох съдържа в себе си три триади на Кох, които образуват равностранен триъгълник на нулево ниво. Построяването на фрактала започва от равностранен триъгълник, към който по средната третина на всяка от страните се построява равностранен триъгълник, като се отстранява хипотенузата му. На този етап се получава шестолъчна звезда, наречена още „звезда на Давид“. На всяка от страните на получената звезда се построява равностранен триъгълник по посочения начин (Фигура 20).



Фигура 20. Снежинка на Кох

Казуси:

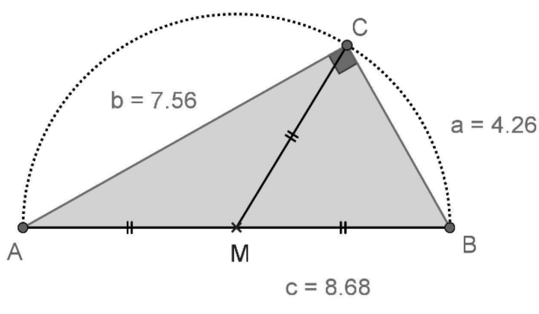
1. Може ли да се постави аналогична задача като при кривата на Кох?

2. Да се предложи вариант на построяване на друга снежинка, като се опише по какво процедурата на получаване се отличава от тази на класическата снежинка на Кох.

3. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА – ДЪРВОТО НА ПИТАГОР

Общоизвестна е теоремата на Питагор, която гласи, че в правоъгълен триъгълник $\Delta ABC : AB = c, AC = b, BC = a$ е в сила равенството между страните му: $a^2 + b^2 = c^2$.

На фиг. 21 е представено горното равенството, като са добавени и други зависимости между елементите в триъгълника.



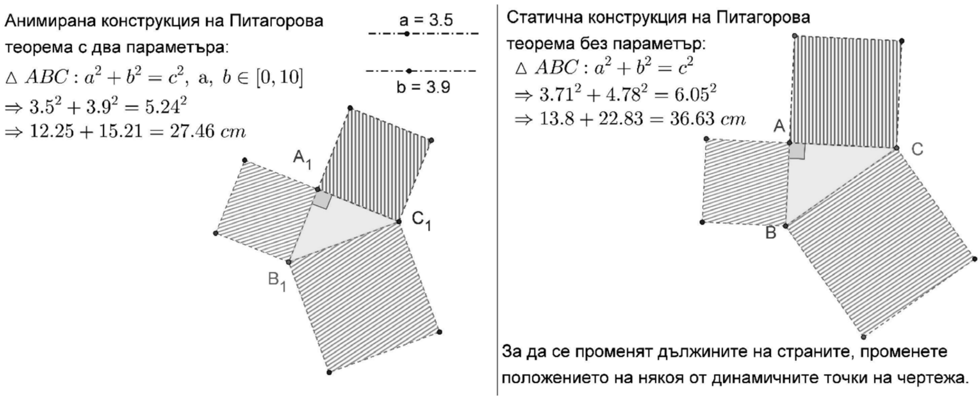
$$a^2 + b^2 = c^2 \;\Rightarrow\; 4.26^2 + 7.56^2 = 8.68^2 \;\Rightarrow\; 18.13 + 57.17 = 75.31$$

Фигура 21. Питагорова теорема

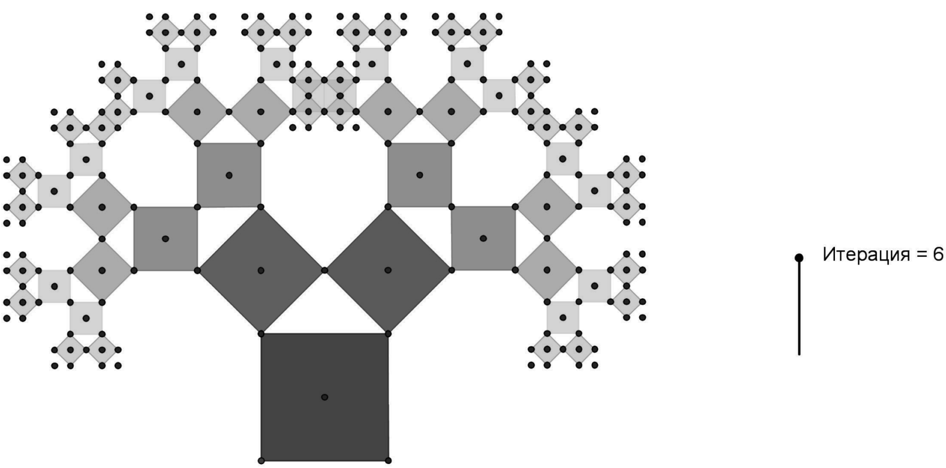
Хипотенузата *AB* на ΔABC се явява диаметър на полуокръжността $\overset{\frown}{ACB}$. Точката *M* е център на полуокръжността и пета на спуснатата от връх *C* медиана към хипотенузата. Следователно е вярно равенството $AM = MB = CM = r$.

В GeoGebra среда са реализирани две конструкции на Питагоровата теорема, със и без параметър, като в зависимост от това се получават анимирана или статична конструкция (Фигура 22).

Дървото на Питагор е равнинна фигура, построена от квадрати. При класическото дърво на Питагор построението има за генератор квадрат, страната на който е равна (съвпада) с хипотенузата на правоъгълен равнобедрен триъгълник, докато при наклонено от вятъра дърво на Питагор правоъгълният триъгълник не е равнобедрен.



Фигура 22. Питагорова теорема със и без параметър



Фигура 23. Дърво на Питагор с генератор правоъгълен равностранен триъгълник

Основни свойства:

– На всяко ниво сборът от лицата на квадратите е равен на лицето на изходния квадрат, т. е. при n-ниво $\rightarrow S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$.

– Очертанията на клонките образуват логаритмична спирала[2].

Казуси:

1. Да се докаже чрез елементарни действия първото свойство на дървото на

Питагор, че сборът от лицата на квадратите на едно ниво е равен на лицето на предходния квадрат, ако се приеме лицето на изходния квадрат за 1 кв. см. Да се анализира задачата при двата вида генератори.

2. Да се анализира построението от фиг. 23 и в GeoGebra да се построи следващото ниво, като се използва предоставеният допълнителен инструмент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работата с GeoGebra поставя на по-високо ниво обучението по математика и фракталната геометрия. Този софтуерен продукт може да се модифицира за нуждите на потребителите (студенти, ученици, преподаватели, изследователи). То се оказва достъпно средство както за организиране на примери за моментно представяне, така и за по-сложни конструкции, изискващи задълбочени изследвания в дадена област. Изучаването на фракталната геометрия като надграждащ материал за нивото знания на учащите е интересен подход за въвеждането му. Сложността може да бъде намалена до ниво, подходящо за представяне по време на обучение на разнообразни специалности. Материалът може да бъде разширен, като бъдат включени повече фрактални структури и се наблегне на връзката им с елементарната геометрия (ако е възможно) и приложенията им в различни отрасли.

Учебният материал е приложим за хибриден учебен процес, където част от него ще се представя по време на упражнения, друга част ще се анализира при самостоятелна работа. Не на последно място трябва да се отбележи важността на нужните знания и умения на самия обучител, който трябва да е много добре запознат с фракталната геометрия, теорията на хаоса, за да може да подготви подходящи за обучението конструкции в GeoGebra среда. Използването на GeoGebra допринася за творческото развитие и усъвършенстване на обучаваните и отговаря адекватно на изискванията на дигиталните поколения ***XYZ & Alpha***. Най-подходящо може да се окаже комбинирането на GeoGebra конструкциите с някои от посочените по-горе софтуерни продукти за сравнение и анализиране на фрактални структури.

БЕЛЕЖКИ

1. Полуподвижна е такава точка, която има ограничено движение от някакво условие. Например т. $N(0, y_N)$ е полуподвижна, защото едната ѝ координата е константа, а другата – променлива, което означава, че тази точка може да се движи само по траектория, изчертаваща права линия, успоредна на оста...
2. **Логаритмична спирала** е специален вид спирална крива, която често се проявява в природата. Уравнението ѝ в полярни координати (ρ, θ) при $a, b = const$ има следния вид: $\rho = a.e^{b.\theta}$.

3. Павлова, В. (2/2011). Традиции и перспективи за развитие на дистанционно обучение в Университета за национално и световно стопанство. Икономически алтернативи, Издание на Университета за национално и световно стопанство(JEL: I21, http://alternativi.unwe.bg/alternativi/index.php?nid=48&hid=1911), стр. 27 – 33.
4. Славова, С. (2010). Компютърно моделиране на фрактали. Ръководство за дистанционно обучение. 1 – 34. София, България.
5. Славова, С. К., Панайотова, Г., & Иванов, И. Г. (2013). Геометрични фрактали в обучението. Извлечено от http://fractalmagics.com/index.php/en/-24761
6. Славова, С., & Иванов, И. (07 Август 2013 г.). Fractal Magic. Компютърно моделиране на фрактали с Maple. Извлечено от http://fractalmagics.com/index.php/en/-24761
7. Brothers, H. (2013). Fractal Music Workshops. Извлечено от Brothers Technology: http://www.brotherstechnology.com/fractal-music/fractal-music-workshops.html
8. Concord & Walnut Creek, C. (13 March 2007 г.). Hiking Lime Ridge. Извлечено от http://www.endorphin-express.com/hikinglimeridge.html
9. Fossil Museum. Iridescent Peltoceratoides and Cosmoceras Ammonites, Ulyanovsk, Russia. (08 August 2013 г.). Извлечено от Fossil Pictures – Ammonites: http://www.fossilmuseum.net/EdResources/AmmoImages.htm
10. Fractal Antenna Systems. (2013). Извлечено от Fractal Antenna Systems: http://www.fractenna.com/
11. Fractal Pack 1 Educatour`s Guide. (01 August 2013 г.). Извлечено от Fractal Foundation: www.FractalFoundation.org
12. Fractus S. A. Optimized Antennas for Wireless Devices. (2013). Извлечено от Fractus S.A: http://www.fractus.com/
13. GeoGebra. (08 Ноември, 2012 г.). Извлечено от http://www.geogebra.org/cms/.
14. Heinze, A., & Procter, C. (2004). Reflections On The Use Of Blended Learning. *Education in a Changing Environment. 13th – 14th September 2004*, ISBN: 0902896806. MANCHESTER: University of Salford, http://www.edu.salford.ac.uk/her/.
15. Henry, R. (2013). Fractals in Physiology. The airways of a mammalian (dog) lung. Извлечено от University of Tennessee College of Veterinary Medicine:
http://classes.yale.edu/fractals/panorama/biology/physiology/animallungs/animallungs.html
16. Ho, A. (09 Ноември, 2012 г.). Chaos Introduction. Sierpinski Triangle. Извлечено от http://www.zeuscat.com/andrew/chaos/chaos.html
17. Kane, J. (2009). Berkeley Photo Day – Spiral. Извлечено от Flickr: http://flickrhivemind.net/Tags/aloe,spiral/Interesting
18. Paterson, R. (2009). The Fractal History of Mankind - Hari Seldon's Psychohistory Is Real. Извлечено от Robert Paterson's Weblog:
19. http://smartpei.typepad.com/robert_patersons_weblog/2009/04/in-this-recession-can-we-know-what-the-future-will-be-like-sort-of-yes.html
20. Perron/MIT, T. (05 December 2012 г.). Solving the Mystery of River Formation. Извлечено от Science now: http://news.sciencemag.org/2012/12/solving-mystery-river-formation

ЛИТЕРАТУРА

Георгиев, Ц. (2011). Въведение във фракталния анализ на природни науки. *Сборник с доклади от Трета международна годишна конференция „Екологизация 2012“* (стр. 9 – 18). София: НБУ.

Иванова, А., Иванова, Г., & Смрикаров, А. (2009). Новото поколение обучавани и бъдещето на електронното обучение във висшите училища – eLearning 2.0 и персонална среда за обучение. *Трудове на Третата национална конференция с международно участие по електронно обучение във висшето образование* (стр. 27 – 36, ISBN 978-954-23-0). Свищов: Академично издателство на СА „Д. Ценов“.

Луков, С., Шкевов, Р., Томова, Д., & Ерохин, Н. (2009). Приложение на теорията на фракталите в изследване на земни и планетарни релефи. *Fifth Scientific Conference with International Participation* (стр. 345 – 349). Sofia: SENS.

Славова, С. (2010). *Компютърно моделиране на фрактали. Ръководство за дистанционно обучение*. София, 1 – 34.

Mandelbrot, B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature.* New York.

Petkova, M. (2012). Teaching and Learning Mathematics Based on GeoGebra Usage. *Proceedings of the Union of Scientists – Mathematics, Informatics and Physics*, Vol. 8, 145 - 152, ISSN 1311-9974.

Petkova, M. (2013). GeoGebra in School Course in Geometry. *Proceedings of The Union of Scientists - Mathematics, Informatics and Physics* (In press).

INTEGRATION OF GEOMETRIC FRACTAL STRUCTURES BY GEOGEBRA FOR A BLENDED LEARNING PROCESS

Abstract. The paper analyzes contemporary teaching, which depends directly on technological improvement. The learning material at all levels should be adapted to the interests of the new generation, the increase of knowledge and skills combining various computer products (including GeoGebra) and studying fractal objects by looking for connections between elementary and fractal geometry. Several elaborated examples are presented including purposeful questions, tasks for analysis and deduction of regularities, but also constructing subsequent integration levels of fractal structures.

Magdalena Petkova
✉ Assistant Professor
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences and Education
Ruse University „A. Kanchev“
8, Studentska Street
7017 Ruse, Bulgaria
E-mail: mpetkova@uni-ruse.bg