ИНДИВИДУАЛНА ОБРАЗОВАТЕЛНА ТРАЕКТОРИЯ ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЧАСТЕН СЛУЧАЙ

Борислав Лазаров

Резюме. В статията е представено едно изследване на частен случай: работата по изготвяне и представяне на проект по математика от ученик в горния курс. Разработена е индивидуална образователна траектория, регистрирано е изграждане на компетентност от синтетичен тип. В резултат от образователния процес е наблюдавано значително повишаване на познавателната активност в средносрочен план; изградена е синтетична компетентност, в резултат на което са постигнати самостоятелни математически резултати.

Keywords: summarywise numbers, $l_1, l_2, \ldots, l_k$ -summarywise numbers, synthetic competence, individual educational trajectory, Socratic style

1. Увод

Индивидуалният подход в обучението по математика е широко спряган и сравнително малко прилаган в масовата педагогическа практика, най-вече поради изключително голямата му ресурсоемкост. Обаче когато все пак се намерят необходимите ресурси, предимно в извънкласни форми, възвращаемостта е впечатляващо висока (Grozdev, 2007).

Понятието ***траектория на познанието*** е въведено от Колягин (Колягин, 1977). Възможностите за внасяне на корекции в траекторията на познанието и свързаните с това ***лоши*** и ***добри управляеми*** процеси са изследвани от Ганчев (Ганчев & Кучинов, 1996) в контекста на урока по математика. ***Индивидуалната образователна траектория*** (ИОТ) е проекция на общото понятие върху отделен ученик. Тя задава ***добър управляем процес*** (Ганчев & Кучинов, 1996), като включва индивидуален подход, но има по-големи задачи. В контекста на тази статия ИОТ е *организация и провеждане на образователен процес в средносрочна или дългосрочна перспектива с отчитане на индивидуалните специфики при обучението и създаване на възможности за максимално развитие на творческия потенциал на личността*.

Проектирането и реализацията на индивидуална образователна траектория е комплексен процес, в който се включват следните елементи:

1) Формиране на индивидуално информационно обкръжение.
2) Индивидуализация на обема дидактически ресурси, включително на индивидуален изследователски инструментариум.
3) Индивидуализация на целите на образователния процес, гъвкав подход в преследването им.
4) Индивидуализация на темповете на учене, на изследователските дейности и оформянето на резултатите.
5) Отчитане на индивидуалните рефлексивни умения и възможностите за самоорганизация, търсене на синергичен ефект.

По-нататък ще илюстрираме с конкретни описания на дейности изброените елементи на ИОТ в контекста на един частен случай.

2. Сократовият стил след четвъртата стъпка от модела на Пойа

В четиристъпковия модел на Пойа за решаване на задача четвъртата стъпка е *анализ на решението* (поглед назад) (Polya, 1945). Тя е абсолютно необходим елемент в обучението, доколкото визира възможността разработените методи в едно решение да се пренасят в следващи задачи. Понякога, обаче, след такава стъпка може да настъпи творческо преосмисляне на задачата, което далеч надхвърля параметрите на образователен процес. Приложените в решението евристични схеми позволяват да се постигнат нови математически резултати, да се разработи ново направление за изследователска дейност. Разбира се, това един ученик не може да постигне самостоятелно, но с помощта на система от насочващи въпроси от страна на учителя, ученикът може да отиде много далеч.

Достигането до определени заключения чрез система от въпроси в педагогиката е известен метод, датиращ от времето на Сократ – сократов модел за обучение (Maxwell, 2011). Парадигмата, в която се прилага сократовият модел, е следната: *учителят знае добре накъде води обучаемите; той само подбира дидактическия инструментариум в рамките на контекста на класа; сократовата анкета е ключов елемент в дидактическия сценарий*.

В нашето изследване ние не предлагаме методика за построяване на сократова анкета (една такава методика е дадена от Пойа в цитираната книга), но следваме стила, прокламиран в метода. Това се обуславя от различната парадигма, в която протича образователно-изследователският процес: *учителят (научният ръководител) води обучаемите в определено направление без да знае отнапред крайната точка на образователния процес; той разчита предимно на своята ерудиция, като подбира дидактическия инструментариум гъвкаво и динамично, прилагайки сократов стил*.

По този начин чрез сократовия стил обучението прераства в интерактивен процес с елементи на изследователско търсене. Дидактическата цел на този процес е

изграждането у обучаемия на една амалгама от компетенции, които определяме като ***синтетична компетенстност*** (Lazarov, 2010). Психологическа обосновка такъв подход може да намери в гещалтпсихологията, което, обаче, е извън сферата на нашия интерес.

3. Последиците от едно участие в Турнира *Черноризец Храбър*

Следната задача бе включена в темата за 11.-12. клас на 19-ия турнир *Черноризец Храбър* през 2010 г.

Задача. Едно число ще наричаме ***сумарно***, ако е едновременно сума на две последователни естествени числа и на три последователни естествени числа. Относно коя операция множеството на сумарните числа е затворено, т.е. резултатът от операцията на всеки две сумарни числа е също сумарно число?

А) събиране
Б) изваждане
В) умножение
Г) деление
Д) никоя от тези

Пролет Лазарова беше ученичка в 11. клас, когато се яви на Турнира. По време на състезанието тя не успя да реши горната задача. Веднага след това тя бе подканена от автора отново да обмисли задачата, но тя отново не успя. Тогава ѝ бе предложено да разгледа включените в темите за по-малките класове задачи на тази тема, изискващи намирането на броя на сумарните числа, ненадвишаващи съответно 10 (5.-6. клас) и 2010 (7.-8. клас). Пролет се справи бързо с първата задача. За да реши втората ѝ бе подсказано да потърси общия вид на едно сумарно число. Тя се справи бързо със случая 2010, реши и първоначалната задача.

По време на анализирането на решението бе обсъден важният въпрос с означенията – за множеството на сумарните числа беше избрано означението **S**. Обърнато беше внимание на възможността получените в решението резултати да се формулират като независимо твърдение:

Теорема 1. **М**ножеството **S** на сумарните числа има вида

$$\mathbf{S} = \{6n + 3 : n \in \mathrm{N}\}.$$

(Отговор на задачата: **S** е затворено единствено относно умножението.)

Поглеждайки назад решението на основната задача и двете спомагателни задачи, естествено възникна идеята подобни въпроси да се поставят за числа, които са едновременно сума на 3 и на 4 последователни естествени числа, на 4 и 5 последователни естествени числа и т.н. Пролет бе подканена да разгледа съответните примери. Ето някои от тях.

Множеството на числата, които са едновременно сбор на три последователни естествени числа и сбор на четири последователни естествени числа. Търсенето на означение за това множество доведе до символите $S_{3,4}$. Съответният на теорема 1 резултат за $S_{3,4}$ изглежда така: $S_{3,4} = \{6(2n+1) : n \in \mathrm{N}\}$ и $S_{3,4}$ не е затворено относно нито една от аритметичните операции.

Множеството $S_{3,5}$ на числата, които са едновременно сбор на три последователни естествени числа и сбор на пет последователни естествени числа, е затворено както относно събирането, така и относно умножението. Множеството $S_{2,4}$ на числата, които са едновременно сбор на две последователни естествени числа и сбор на четири последователни естествени числа, е празното множество.

4. Първи стъпки в изследователско направление

Разгледаните примери показаха на Пролет (и на автора – нейния ръководител), че въпросите около числата, които имат представяне, аналогично на сумарните числа, са съдържателни. Примерите по естествен начин подсказаха едно непосредствено обобщение на понятието *сумарно число*:

Нека l_1 и l_2 са естествени числа, по-големи от 1. Едно число ще наричаме l_1,l_2 - ***сумарно***, ако е едновременно сбор на l_1 последователни естествени числа и сбор на l_2 последователни естествени числа. Множеството на l_1,l_2 -сумарните числа ще бележим с S_{l_1,l_2} . Ясно е, че $S=S_{2,3}$.

Въпросите за затвореност на едно множество относно определена операция са типични за висшата алгебра. Преценено бе, че въвеждането на терминологията на алгебричните структури няма да обогати съдържателно темата, а ще натовари с формализъм и без туй нетривиалната за един ученик материя.

По-нататък обобщенията вървяха по естествен път. Пролет лесно се справи с изследването на множеството от числата, които са едновременно сбор на три, четири и пет последователни естествени числа, за което въведе означението $S_{3,4,5}$. Така тя стигна до следната обща дефиниция.

Нека $l_1,l_2,...,l_k$ са естествени числа, по-големи от 1. Едно число наричаме $l_1,l_2,...,l_k$- ***сумарно***, ако е едновременно сума на l_i последователни естествени числа за всяко $i = 1,2,...,k$. Множеството на $l_1,l_2,...,l_k$ - сумарните числа отбелязваме с $S_{l_1,l_2,...,l_k}$.

Следвайки сократовия стил, на Пролет и бе поставен въпросът да изследва най-примитивните представители на множества от типа $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$, тези, за които k=1, т.е. от вида S_l. Разбира се, започна се с конкретни примери: S_2 са нечетните числа, по-големи или равни на 3; S_3 са кратните на 3, по-големи от или равни на 6; S_5 са кратните на 5, по-големи от или равни на 15. Тя обобщи примерите в следната

Теорема 2. Множеството S_l се състои от членовете на аритметичната прогресия с първи член $\frac{l(l+1)}{2}$ и разлика l.

По този начин беше направена и връзка с изучавания в училище материал. Понеже тъкмо беше приключен разделът прогресии, Пролет се почувства в свои води – позната материя, но вече изпълнена с допълнително съдържание. Непосредствено следствие от теорема 2 бяха следните резултати, обобщаващи разгледаните примери

Теорема 3. Ако l е нечетно, то $S_l = \{ln : n \in \mathrm{N}, n \geq \frac{l+1}{2}\}$.

Теорема 4. Ако l е четно, то $S_l = \left\{\frac{l}{2}(2n+1) : n \in \mathrm{N}, n \geq \frac{l}{2}\right\}$.

Сега Пролет беше насочена към изясняването на съответните въпроси за $l_1, l_2, \ldots, l_k$-сумарните числа: да опише съществуването и структурата на $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ и да изследва тези множества за затвореност относно аритметичните операции. Следният резултат, който е равносилен на дефиницията, бе откроен като

Теорема 5. (Основна теорема за $l_1, l_2, \ldots, l_k$-сумарните числа) За произволни естествени числа $l_1, l_2, \ldots, l_k$, по-големи от 1, $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k} = S_{l_1} \cap S_{l_2} \cap \ldots \cap S_{l_k}$.

За пълноценното приложение на теореми 2 и 5, които представяха $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ като общи членове на аритметични прогресии, Пролет трябваше да установи следния (технически не прост) помощен резултат.

Лема 1. Нека са дадени аритметичните прогресии от естествени числа

$$A' = \{a_1' + (n-1)d' : n \in \mathrm{N}\}, \quad A'' = \{a_1'' + (n-1)d'' : n \in \mathrm{N}\}.$$

Ако съществува общ член на A' и A'', то съществуват безбройно много общи членове, които образуват аритметична прогресия с разлика НОД (d', d'').

Непосредствено следствие от теорема 5 и лема 1 е следната

Теорема 6. Нека $k \geq 2$ е естествено число и $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k} \neq \emptyset$. Тогава $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ е аритметична прогресия с разлика НОД ($l_1, l_2, \ldots, l_k$).

Резултатите от теорема 1 до теорема 6 в съдържателен план бяха получени за около месец. Разбира се, нито разработката, нито оформянето беше гладък процес – имаше лутания както в евристичната, така и в техническата част. Например някои примери първоначално бяха обявени за теореми, понеже не се виждаха по-общите резултати. Избистрянето на въпросите около означенията също изигра ключова роля за обобщаване на резултатите: първоначално вместо S_{l_1,l_2} се използваше означението $S_{l,m}$, зад което не прозираше ясно общото понятие $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$.

Паралелно Пролет се учеше да набира текста на TeX, понеже наближаваше срокът за предаване на статия за участие в годишната конференция на Ученическия институт. За самата конференция трябваше да се подготви презентация. Необходимостта да бъдат отделени най-съществените резултати доведе до преосмисляне на формулировките, което постепенно изграждаше у Пролет по-висок стил на изразяване. Това пък даваше възможност да се поставят въпроси, третиращи по-задълбочено материята.

Понеже Пролет нямаше подкрепа в училище, тя прояви инициатива и организира сама съучениците си, за да им представи своята разработка. Това се оказа много полезно за представянето ѝ на националната ученическа конференция. Повишената ѝ познавателна активност доведе до получаването на нови резултати след предаването на статията.

5. Задълбочаване на изследователските търсения

Подготовката за изследователско търсене беше осъществена и Пролет можеше да дискутира определени детайли, да повдига сама въпроси не само от технически, но и от съдържателно естество. Беше ѝ предложено да изследва затвореност на $l_1, l_2, \ldots, l_k$-сумарните числа относно аритметичните операции в светлината на основната теорема. Това доведе до формулирането на следните два резултата.

Теорема 7(8). Ако $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k} \neq \emptyset$, то $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ е затворено относно събирането

(умножението), точно когато S_{l_i} е затворено относно събирането (умножението) $\forall i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

За доказателството на тези теореми Пролет трябваше да се запознае с релацията *сравнение по модул*. При това нивото на абстрактност, до което беше стигнала, позволяваше да обединява резултатите за двете операции в обща формулировка, например

Лема 2. Нека $\circ$ е някоя от операциите събиране или умножение и нека AA е аритметична прогресия с членове естествени числа и разлика *d*. Ако съществуват $a,b,c \in A$, такива че $a \circ b \equiv c \pmod{d}$, то $a \circ b \equiv c \pmod{d}$ за всички $a,b,c \in A$.

В по-нататъшните изследователски търсения бяха получени още два съдържателни резултата.

Теорема 9. Ако S_l е затворено относно събирането, то то е затворено и относно умножението.

Теорема 10. За всяко нечетно l множеството S_l е затворено относно събирането.

Допълнителен стимул за Пролет бе възможността за участие в международната ученическа конференция EUROMATH-2011. Нейният ентусиазъм значително нарасна, което доведе до получаването на нови математически резултати.

Теорема 11. $S_{2^k, q2^{k+m}} = \emptyset \quad \forall k,m,q \in \mathrm{N}$.

Теорема 12. Ако l_i, $i = 1,2,\ldots,k$, са две по две взаимно прости, то $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k} \neq \emptyset$.

Теорема 13. Ако l_i, $i = 1,2,\ldots,k$, са нечетни, то $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k} \neq \emptyset$.

Разбира се, пътят до тези резултати беше неравен и лъкатушен. Сократовият стил бе прилаган в пълна степен. Теорема 11 имаше няколко по-слаби предварителни

варианта, а за теорема 12 се наложи Пролет да се запознае с китайската теорема за остатъците. Всички тези търсения имаха за цел получаването на критерий за съществуване на $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$. За да се установи, че нито една от теоремите 12 и 13 не е критериална, трябваше да се дадат съответни контра примери. Съставянето на примери „на ръка" е трудоемко и това наложи привличането на система за компютърна алгебра (СКА). Запознаването със синтаксиса на такава система има съдържателен обучаващ елемент в математически план, който е предмет на наше допълнително изследване. Прилагайки СКА, беше проверено, че $S_{4,9,12}$ не е празно, а 4, 9 и 12 не са нито две по две взаимно прости, нито нечетни ($S_{4,9,12} = \{126 + 36(n-1) : n \in \mathrm{N}\}$). Намирането на критериален резултат за съществуване на $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ остана отворен въпрос.

6. Мястото на отворените въпроси

Не всички въпроси, поставени на Пролет, намериха своя отговор. Това не беше пречка работата ѝ да продължи, вече с приложение на СКА. Изказването на правдоподобни хипотези също е част от изследователския процес, доколкото построяването на примери и контрапримери е нетривиална дейност. Например една правдоподобна хипотеза, която не бе доказана, нито отхвърлена с контрапример, е, че $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k} \neq \emptyset$, точно когато максималната степен на 2, която дели всеки четен индекс, е една и съща.

Ново направление за изследователски търсения беше вдъхновено от доклада *Някои проблеми от теория на числата, като основа на изследователски проекти за ученици* на акад. Додунеков на семинара *Дидактическо моделиране*. За поставянето на задачи в това направление се наложи въвеждането на нови понятия.

Нека $\circ$ е знак за някоя от операциите събиране, която ще цитираме като *a*, или умножение, която ще цитираме като *m*. Нека *S* е множество от естествени числа, което запазва операцията $\circ$ и нека $s \in S$. Ще казваме, че елементът s е $\circ$-прост в *S*, ако не може да се разложи във вида $s = s_1 \circ s_2$ за някакви $s_{1,2} \in S$; s ще наричаме $\circ$-съставен в S, ако не е $\circ$-прост. Множеството *S* ще наричаме $\circ$***-u-p-d-p*** множество, ако притежава свойството: винаги, когато $s = s_1' \circ s_2' = s_1'' \circ s_2''$ и $s_{1,2}'$, както и $s_{1,2}''$ са $\circ$-прости в *S*, следва че $\{s_1', s_2'\} = \{s_1'', s_2''\}$ (единственост на разлагането на два $\circ$-прости елемента). Съкращението $\circ$-u-p-d-p иде от ***unique-prime-decomposition property*** относно $\circ$). В случая, когато $\circ$ е операцията събиране (умножение), говорим за *a*-прости (*m*-прости) и *a*-съставни (*m*-съставни) числа в затворено относно събирането (умножението) множество *S*.

Отворен остана въпросът дали съществува $\circ$-u-p-d-p множество $S_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$, в което единствеността на разлагането на $\circ$-прости елементи е нетривиална, но бяха получени следните резултати:

1) съществува нееднозначно разлагане на *m*-прости елементи в множеството **S**, например 4275 = 15.285=57.75, т.е. **S** не е *m*-u-p-d-p.

2) $S_{3,5}$ е *a*-u-p-d-p, но по тривиален начин – единственият *a*-прост елемент на $S_{3,5}$ е 15.

Наличието на отворени въпроси е в пълно съответствие със сократовия стил и е важен елемент в построяването на индивидуална образователна траектория. Отворените въпроси дават възможност ИОТ да бъде продължавана в съответното направление.

7. Заключителни бележки

В представената индивидуална образователна траектория бяха реализирани всички обявени в увода елементи.

Формирането на индивидуално информационно обкръжение беше ключово: поради кратките срокове за навлизане в тематиката, първоначално на Пролет не беше препоръчана никаква литература, доколкото това не бе нужно за решаването на задачата от турнира. Впоследствие тя беше насочвана към съответна литература, за да се запознае с някои свойства на сравненията, китайската теорема за остатъците, основната теорема на аритметиката.

Основен дидактически ресурс беше диалогът в сократов стил. Освен това поставените задачи често бяха настройвани с подходяща *декомпозиция* (Lazarov, 2006). Например основната задача бе декомпозирана с двете задачи за по-малките класове; теорема 11 имаше няколко по-прости предшественика. В изследователския инструментариум първоначално основен беше индуктивният подход с разработване на примери, включително с използване на система за компютърна алгебра. Впоследствие се прилагаха елементи на програмното обучение.

Тактическите цели на образователния процес се променяха в зависимост от постигнатите резултати. Постоянно се отчиташе изменението в ЗАР и се определяше съответен сектор от ЗБР. Като стратегическа цел обаче се визираше изграждането на синтетична компетентност.

Темповете на работа по темата бяха съгласувани с натоварването в училище. Индивидуалната програма отчиташе напредъка по отделни въпроси, при нужда се повтаряха определени детайли, изчистваха се неясноти. Това ставаше както в началните стадии на разработване на конкретен въпрос, така и по време на оформянето му във вид, подходящ за публикуване или докладване.

Много от доказателствата бяха преосмисляни от Пролет след получаването на по-общи резултати. В процеса на работата първоначалната неувереност се преодоляваше, самочувствието се увеличаваше. Постепенно познавателната активност нарастваше и сократовият диалог често преминаваше в интерактивен, в който въпросите се поставяха от Пролет, а отговорите се търсеха съвместно. Всичко това свидетелстваше за нараснали рефлексивни умения и възможности за самоорганизация.

Връзката на отделни въпроси с изучавания в училище материал доведе до синергичен ефект – спечели и усвояването на училищния материал, и работата по темата. Но истински синергичен ефект се постигна при изследователските търсения със СКА.

Осъществяването на пълноценно изследователски ориентирано обучение е нереално в класно-урочните форми (Лазаров & Тодорова, 2011). Разгледаният частен случай показва, че сократов стил (и изследователски-ориентирано обучение) е изключително удачен при извънкласна индивидуална работа или работа в малки групи, където може пълноценно да се разработят ИОТ за изграждане на синтетична компетентност.

ЛИТЕРАТУРА

Ганчев, И.& Кучинов, Й. (1996). *Организация и методика на урока по математика*. София: Модул.

Колягин, Ю. (1977). *Задачи в обучение математике. Часть 2. Обучение математике через задачи и обучение решению задач*. Москва: Просвещение.

Лазаров, Б. (2011). *19. Есенен математически турнир Черноризец Храбър*, Математика и информатика, бр. 1.

Лазаров, Б. & Тодорова М. (2011). *Организиране на изследователско търсене на учениците в среда на система за динамична геометрия*. Образование и технологии. Том 2/2011.

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: Association for the Development of Education.

Lazarov, B. (2006). *Tuning a math problem*. ICMI Study 16, *Challenging Mathematics in and beyond the Classroom. http://www.amt.edu.au/icmis16pbullazarov.pdf*

Lazarov, B. (2010). *Building Mathematics Competence via Multiple Choice Competitions*. Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Vol. 14. No. 1

Maxwell, M. (2011) *Introduction to the Socratic Method and its Effect on Critical Thinking*. http://www.socraticmethod.net

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press, 1945.

✉ **Борислав Лазаров**
доцент, доктор по педагогика
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев”, бл. 8
1113 София, България
lazarov@math.bas.bg

INDIVIDUAL EDUCATIONAL TRAJECTORY – A CASE STUDY

Abstract. The paper presents a case study: a particular student's activity dedicated to generalization of a problem from Chernorizec Hrabar Math Tournament. An individual educational trajectory has been developed that leads to forming student's competence of synthetic type. As a result of the applied medium-term educational strategy considerable increase of the student's activeness has been registered. Some new mathematical results have been obtained.

✉ **Borislav Lazarov**
Associate Professor, Doctor in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: lazarov@math.bas.bg