Educational Technologies
Образователни технологии

ГИПОЦИКЛОИДА

**Борислав Борисов, Деян Димитров, Иван Стефанов,
Николай Нинов, Теодор Христов**
Природо-математическая гимназия – Ловеч

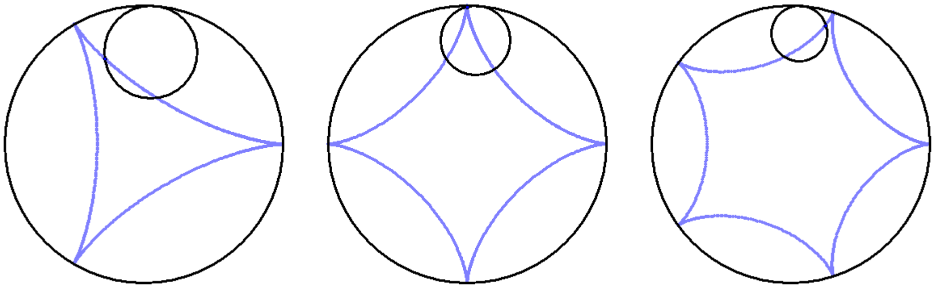
Аннотация. В статье представлены результаты работы Болгарской подкоманды – части международной команды учащихся. Эта команда была создана для реализации сетевого исследовательского проекта „Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами". Исследование проводилось с использованием программных продуктов GeoGebra, Geometer's Sketchpad и Maple. Для доказательства полученных гипотез использовался метод комплексных чисел. Для организации сетевого взаимодействия участников использовались облачные сервисы Google.

Keywords: circle; curve; trajectory; hypocycloid

В конце сентябре 2017 году мы приступили к совместной работе в рамках международного сетевого исследовательского проекта «Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами». Проект[1] был предложен российскими учеными: доцентом Г. А. Клековкиным и профессорами А. В. Ястребовым и В. Р. Майером. Идея проекта состояла в подготовке силами учащихся разных стран материалов для электронной энциклопедии. Для организации работы был создан сайт. Отправной точкой послужили статьи-матрицы, подготовленный руководителями проекта. Статьи-матрицы – это серии исследовательских задач, при решении которых могут быть получены ранее известные в науке и новые результаты о какой-либо из замечательных кривых. В настоящей статье рассматриваются результаты, которые получены в ходе решения задач, предложенных профессором А. В. Ястребовым в период с сентября 2017 года по апрель 2018 года.

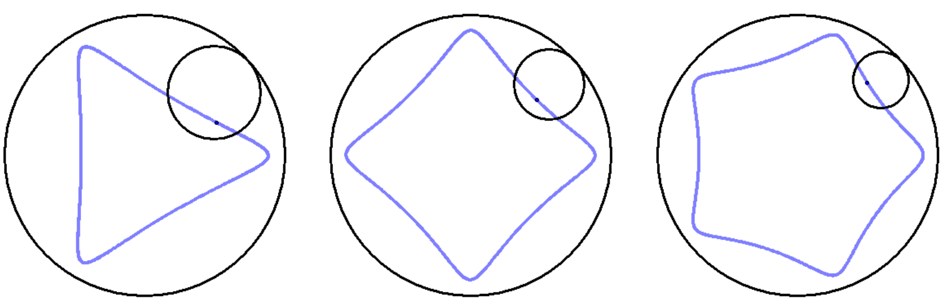
1. Определение и некоторые исторические данные.

Гипоциклоида – это траектория движения точки P окружности k радиуса r, которая катится без скольжения по окружности Γ радиуса R и имеет с ней внутреннее касание. Окружность Γ называют *направляющей окружностью*.

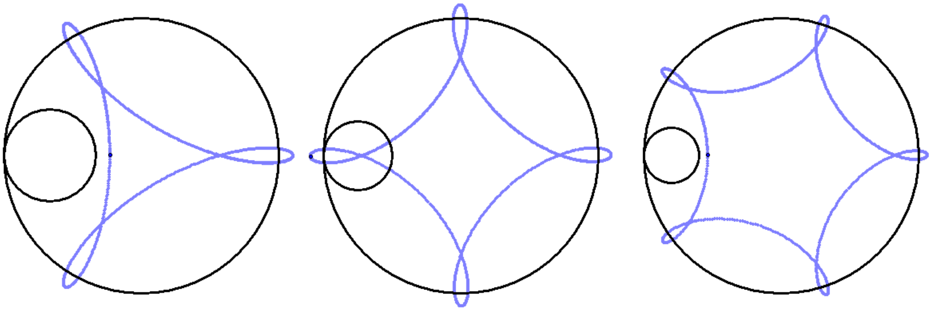


Термин гипоциклоида составлен из греческих слов *υπϋ* (под) и *κυκλοειδÞζ* (произведенная кругом). Первая известная гипоциклоида была описана Дюрером (Albrecht Dürer, 1471 – 1528) в “Under weysung der Messung, mi tdem Zirckelund Richtscheyt, in Linien, Eben enunnd gantzen corporen“ («Руководство к измерению циркулем и линейкой, в плоскостях и целых телах», 1525 г.). Первое систематическое исследование гипоциклоид и эпициклоид принадлежит де Лагиру (Philippe de La Hire, 1640 – 1718). Результаты представлены в „Traité de epicycloïdes, et de leur usage dans les méchaniques“, 1666 г. Здесь были рассмотрены вопросы построения касательных, спрямлений, квадратур. Гипоциклоиды привлекли внимание Л. Эйлера (Leonhard Euler, 1707 – 1783), К. Клеро (Claude Clairaut, 1713 – 1765), Дж. Серре (JosephSerret, 1819 – 1885), Г. Монжа (Gaspard Monge, 1746 – 1818) и др.

2. Родственные гипоциклоиды. Рассматривается случай, когда точка P находится внутри окружности k радиуса r, которая катится без скольжения по направляющей окружности Γ радиуса R и имеет с ней внутреннее касание. В этом случае траектория точки P называется *укороченной гипоциклоидой*.



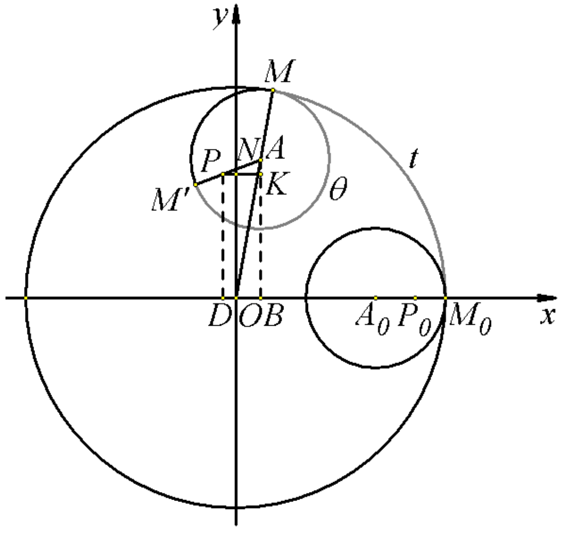
Возможен и случай когда точка P находится вне окружности k радиуса r и катится без скольжения по направляющей окружности Γ радиуса R, имея с ней внутреннее касание. В этом случае траектория точки P называется *удлиненной гипоциклоидой*.



Укороченная и удлиненная гипоциклоиды имеют и общее название *гипотрохоиды*. В связи со специальными названиями обычная гипоциклоида называется еще *остроконечной гипоциклоидой*.

3. Параметрические уравнения гипоциклоид. Одна из самых важных задач есть нахождение математического описания гипоциклоид путем составления уравнений. Будем использовать обозначения, отмеченные на следующем фигуре. Пусть еще $AP = A_0P_0 = p$, $\sphericalangle MAM' = \theta$ и $\sphericalangle M_0OM = t$. По отношению к рассмотренной координатной системе Oxy точка P, движущаяся вместе с маленькой окружностью имеет координаты $P(x, y)$. Перед началом движения точки M и M' совпадают с точкой M_0. Через некоторое время в ходе движения маленькой окружности эти точки разделяются, пройденные точками M от M_0 и M' от M одинаковые, т.е. $\overset{\frown}{MM'} = \overset{\frown}{M_0M}$. Так как $\overset{\frown}{MM'} = r.\theta$ и $\overset{\frown}{M_0M} = R.t$, то $\theta = \dfrac{R}{r}.t$. Далее будем рассматривать прямоугольный треугольник APK. Отмечаем, что выполняются следующие равенства:

$$\sphericalangle PAK = \sphericalangle M'AB = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OAM' = \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + (\theta - \pi) = \theta - t - \frac{\pi}{2} = \frac{R-r}{r}.t - \frac{\pi}{2}.$$



Потом имеем $PK = AP.\sin\sphericalangle PAK = p\sin\left(\frac{R-r}{r}.t-\frac{\pi}{2}\right) = -p\cos\frac{R-r}{r}.t$ и $NK = OB = (R-r)\cos t$. Отсюда $PN = PK - NK = -\left[p\cos\frac{R-r}{r}.t + (R-r)\cos t\right]$. Так как $x = -PN$, получаем $x = (R-r)\cos t + p\cos\frac{R-r}{r}.t$. Выполнены и следующие равенства $AK = AP.\cos\sphericalangle PAK = p\cos\left(\frac{R-r}{r}.t-\frac{\pi}{2}\right) = p\sin\frac{R-r}{r}.t$ и $BA = (R-r)\sin t$. Следовательно, $y = BK = BA - AK = (R-r)\sin t - p\sin\frac{R-r}{r}.t$. Общие параметрические уравнения, описывающие движение произвольной точки P, являются следующими:

$$x = (R-r)\cos t + p\cos\frac{R-r}{r}.t,\quad y = (R-r)\sin t - p\sin\frac{R-r}{r}.t.$$

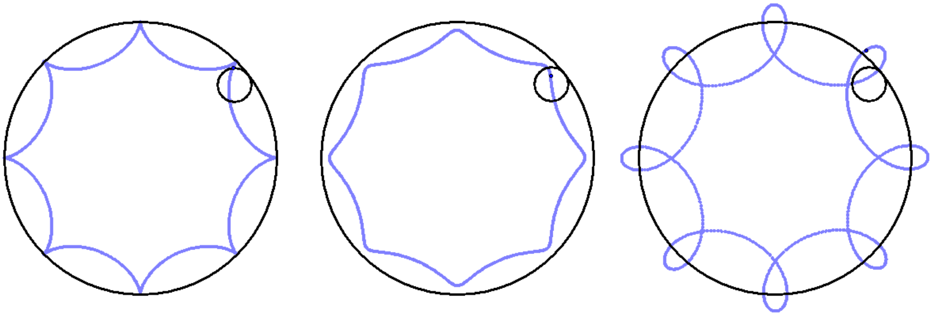
В случае, когда рассматривается обычная остроконечная гипоциклоида, имеем $p = r$, поэтому уравнения этой гипоциклоиды имеют вид:

$$x = (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}.t,\quad y = (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}.t.$$

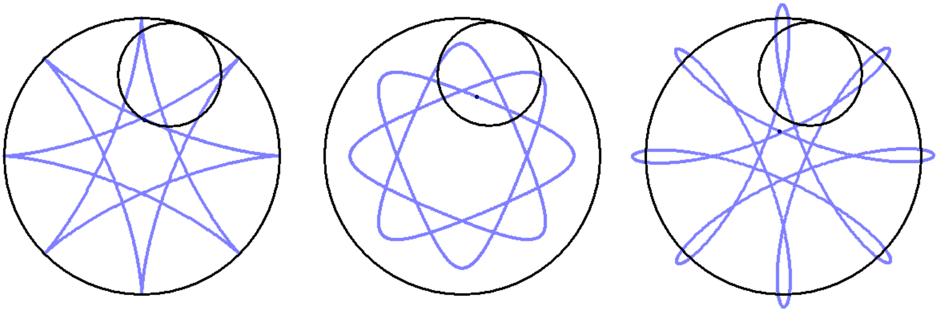
4. Исследования гипоциклоид. Интересно узнать когда гипоциклоиды замыкаются и когда это замыкание происходит в первой раз. Пусть точка P начинает двигаться вместе маленькой окружностью при $t = 0$ и продолжает этот движением до момента $t = \overline{t}$, когда точка P вернулась в начальное положение в первый раз. Из параметрических уравнений кривой получаем систему уравнений: $(R-r)\cos\overline{t} + p\cos\frac{R-r}{r}.\overline{t} = R - r + p$,

$(R-r)\sin\overline{t} - p\sin\frac{R-r}{r}.\overline{t} = 0$. Отсюда следует равенство $\sin\frac{R}{2r}\overline{t} = 0$. Последнее равенство приводит нас к следующим результатам:

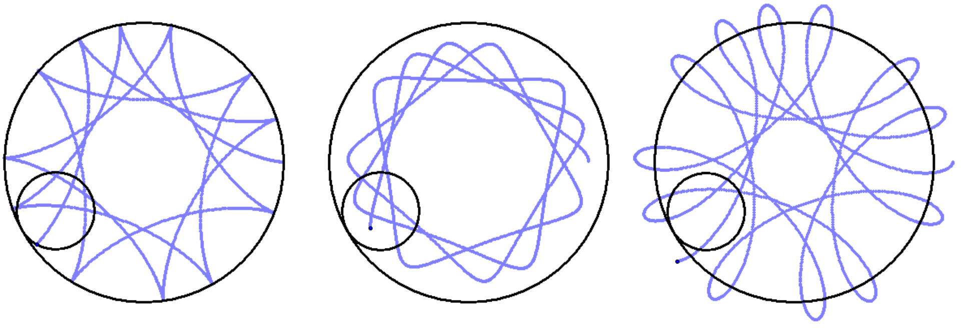
1) Если $\frac{R}{r}$ целое число, гипоциклоида замыкается, когда $\overline{t} = 2\pi$.



2) Если R и r целые взаимно простые числа, но $\frac{R}{r}$ нецелое число, гипоциклоида замыкается, когда $\overline{t} = r.2\pi$.



3) Если $\dfrac{R}{r}$ иррациональное число, гипоциклоида не замыкается. В этом случае следами точки P заполняет венец между двумя окружностями.



Далее интересно узнать, сколько дуг содержит замкнутая гипоциклоида.

Из параметрических уравнений следует равенство:

$$x^2 + y^2 = (R - r)^2 + p^2 + 2(R - r)\,p\cos\frac{R}{r}t\,.$$

Если остроконечная гипоциклоида имеет общую точку с направляющей окружностью, то выполняются равенства $p = r$ и $x^2 + y^2 = R^2$ (уравнение направляющей окружности). Подставим эти равенства вверхнее уравнение и получим $\cos\dfrac{R}{r}t = 1$. Решения этого уравнения выражаются формулами $\dfrac{R}{r}t_k = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Когда $k = 1$, получается первая общая точка гипоциклоиды и направляющей окружности. Следовательно,

Первая дуга остроконечной гипоциклоиды получается, когда $0 \le t \le 2\pi.\dfrac{r}{R}$.

4) Если $\dfrac{R}{r}$ целое число и $t_k = \overline{t} = 2\pi$, получаем $\dfrac{R}{r}.2\pi = 2k\pi$, т.е. $k = \dfrac{R}{r}$.

Отсюда следует пятый случай.

5) Если $\dfrac{R}{r}$ целое число, число дуг остроконечной гипоциклоиды равняется $\dfrac{R}{r}$.

Случаи 1) и 5) показывают, что при целом $\dfrac{R}{r}$ гипоциклоида содержит $\dfrac{R}{r}$ дуг, и она замыкается, когда точка касания двух окружностей опишет один раз большую окружность.

Если $\dfrac{R}{r}$ несократимая рациональная дробь и $t_k = \overline{t} = r.2\pi$, то находим $\dfrac{R}{r}.r.2\pi = 2k\pi$, т.е. $k = R$. Так получаем шестой случай.

6) Если R и r целые взаимно простые числа, но $\dfrac{R}{r}$ нецелое число, число дуг остроконечной гипоциклоиды равняется R.

Случаи 2) и 6) показывают, что при рациональном $\dfrac{R}{r}$ гипоциклоида содержит R дуг и она замыкается, когда точка касания двух окружностей опишет r раза большую окружность.

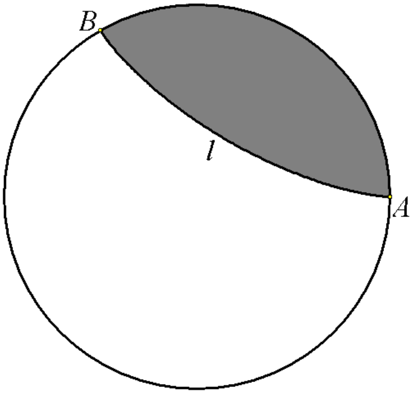
5. Длина и площадь гипоциклоиды. Пользуясь средствами интегрального исчисления можно определить длину L и площадь σ остроконечной гипоциклоиды. В начале определим длину l одной дуги гипоциклоиды. Используя случай 4), имеем

$$l = \int_0^{2\pi.\frac{r}{R}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 2(R-r)\int_0^{2\pi.\frac{r}{R}} \sin\frac{R}{2r}t\,dt = 8(R-r).\frac{r}{R}.$$

Так как гипоциклоида составлена из $\dfrac{R}{r}$ дуг, то $L = \dfrac{R}{r}.l = 8(R-r)$.

Площадь σ находим по формуле $\sigma = \dfrac{1}{2}\oint xdy - ydx$, где интеграл взят по гипоциклоиде. Так получается

$$\sigma = \frac{(R-r)(R-2r)}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos\frac{R}{r}t\right)dt = \pi(R-r)(R-2r).$$

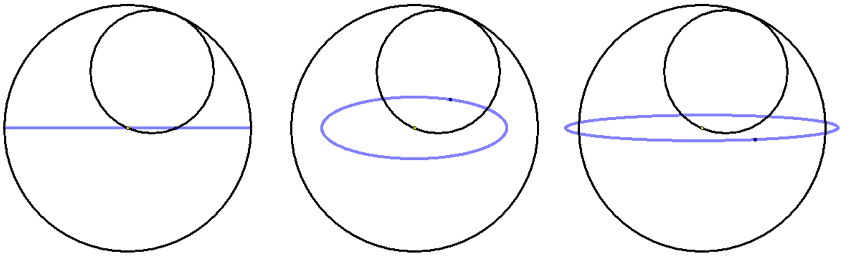


Последняя формула дает нам возможность найти площадь S, заключенную между дугой гипоциклоиды и направляющей окружностью. Площадь окружности - πR^2. Тогда

$$S = \frac{\pi R^2 - \pi(R-r)(R-2r)}{R/r} = \frac{\pi r^2(3R-2r)}{R}.$$

6. Некоторые специальные гипоциклоиды. В начале мы построили гипоциклоиды при $\frac{R}{r}=3$ и $\frac{R}{r}=4$. Первая из этих гипоциклоид называется *дельтоид* или *кривой Щейнера*, а вторая – *астроидой*. Используя полученные результаты, можно установить, что дельтоид имеет длину $16r$ и площадь $2\pi r^2$. Следовательно, площадь дельтоиды два раза больше площади катящейся окружности. Для астроиды находим, что длина есть $6R$, а площадь – $6\pi r^2$. Интересно, что длина астроиды не сильно отличается от длины направляющей окружности ($2\pi R$), а ее площадь в шесть раза больше площади катящейся окружности.

Рассмотрим сейчас случай, когда $R=2r$. Из уравнения гипоциклоиды получаем равенства: $x=(r+p)\cos t$, $y=(r-p)\sin t$. Если точка P находится на катающейся окружности $p=r$, формулы будут $x=2r\cos t$, $y=0$. Это означает, что точка P описывает диаметр направляющей окружности. Когда $p \neq r$, из формул получается уравнение $\frac{x^2}{(r+p)^2}+\frac{y^2}{(r-p)^2}=1$. Следовательно, в этих случаях точка описывает эллипс с полуосями $r+p$ и $|r-p|$. Отсюда следует, что хорошо знакомый эллипс является особым видом гипоциклоиды.



БЕЛЕЖКИ/NOTES

1. Сайт для организации сетевых исследовательских проектов по математике «Пишем сами» (URL: https://sites.google.com/site/pisemsami/home).

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Aleksandrova, N. (2008). *History of mathematical terminology, notions and notations. Vacabulary-Handbook*. Moscow: LKI. [Александрова, Н. (2008). *История математических терминов, понятий, обозначений*. *Словарь-справочник*. Москва: ЛКИ.]

Aleksandrova, N. (1984). *Mathematical terminology*. Sofia: Nauka i izkustvo [Александрова, Н. (1984). *Математически термини*. София: Наука и изкуство.]

Berman, G. (1980). *Cycloida*. Moscow: Nauka. [Берман, Г. (1980). *Циклоида*. Москва: Наука.]

Gelert, V., H. Kestner & Z. Noiber. (1983). *Mathematical encyclopedia vocabulary*. София: Sofia: Nauka i Izkustvo. [Гелерт, В., Х. Кестнер & З. Нойбер. (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: Наука и изкуство.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *About the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the median of a triangle*. Sofia: Archimedes 2000. [Гроздев, С. & В., Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.]

Markushevich, A. (1952). *Notable curves*. (1952). Moscow: State Printing House for theoretical-technical literature. [Маркушевич, А. (1952). *Замечательные кривы*. Москва: Гос. изд-во теоретико-технической литературы.]

Sevelov, A. (1960). *Plane curves*. MoscoW: State Printing House for Physics-mathematics literature. [Савелов, А. (1960). *Плоские кривы*. Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы.]

Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic geometry*. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]

Grozdev, S. & V. Nenkov. (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology, vol. VII (LXIX), No 1B*. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122 – 125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247-8558).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics*: *The Bulgaria Experience* (*Theory and Practice*). Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

Shabanova, M., R. Atamuratova, M. Belorykova, V. Nenkov & M. Pavlova. (2016). The game “Geometry scrabble in cloud” an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in Mathematics*, 45, 223 – 228. (ISSN 1313-3330).

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2016). First International net research project for students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 6*, 567 – 571 (ISSN 1310-2230). [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 567 – 571 (ISSN 1310-2230).]

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova, V. Nenkov (2017). Second International net research project for students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 5*, 457 – 465.(ISSN 1310-2230). [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова, В. Ненков. (2017). Второй международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 5*, 457 – 465.(ISSN 1310-2230).]

HYPOCYCLOID

Abstract. The paper presents results of the Bulgarian sub-team – a part of an international team of students. The team was created for the realization of the net research project "Encyclopedia of notable plane figures: we work by ourselves". The investigation is carried out using the software products GeoGebra, Geometer's Sketchpad and Maple. The method of the complex numbers is applied in the proofs. The organization of the net interaction is based on Google Cloud Service.

✉ **Mr. Borislav Borisov, Student**
Mathematics High School – Lovech
1, Akad. Urumov Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: borislavst27@gmail.com

✉ **Mr. Deyan Dimitrov, Student**
Mathematics High School – Lovech
1, Akad. Urumov Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: dido3637@gmail.com

✉ **Mr. Ivan Stefanov, Student**
Mathematics High School – Lovech
1, Akad. Urumov Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vankata068068@gmail.com

✉ **Mr. Nikolay Ninov, Student**
Mathematics High School – Lovech
1, Akad. Urumov Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: nikininov1@gmail.com

✉ **Mr. Teodor Hristov, Student**
Mathematics High School – Lovech
1, Akad. Urumov Str.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: tedo3637@abv.bg