

ГЕОМЕТРИЧНИ МЕСТА, ПОРОДЕНИ ОТ СПРЕГНАТИ ПРАВИ И ЧЕВИАНИ

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Резюме. В статията се разглеждат обобщения на една от задачите от Международната олимпиада по математика през 2010 г.

Keywords: Olympiad, problem solving, generalization, THE GEOMETER'S SKETCHPAD.

Много от геометричните задачи позволяват да се намерят техни обобщения. В някои случаи обаче, намирането на обобщение не е лесно за осъществяване. Затова откриването на обобщение представлява истинско предизвикателство към математическата изобретателност. Надеждното осъществяване на тази изобретателност е свързано със задълбоченото проследяване на връзките между отделните фигури и техните елементи. Необходимо е и доброто познаване на съответните им свойства.

Преодоляването на редица трудности при откриването на необходимите връзки може съществено да се опрости с използването на конструктивните и динамични възможности на програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP).

Ще покажем как с помощта на GSP може да се открие обобщение на една геометрична задача от международната олимпиада по математика през 2010 г. Тази задача се отнася до произволен $\triangle ABC$, затова във връзка с доказателствата на получените твърдения ще използваме барицентрични координати спрямо координатен триъгълник ABC , като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев, Чобанов, 1985). Освен това с $A_0\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B_0\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $C_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ще означаваме средите съответно на страните BC , CA и AB .

Задачата, на която търсим обобщение, е следната:

Нека P е точка от вътрешността на $\triangle ABC$. Правите AP , BP и CP пресичат описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ съответно в точки K , L и M . Допирателната към Γ в точката C пресича правата AB в точка S . Да се докаже, че ако $SC = SP$, то $MK = ML$ (Гроздев, 2010).

При търсенето на обобщение на тази задача, резултатите до които ще достигнем с помощта на изследванията с GSP, ще подредим последователно в съответните свойства на получаващата се конструкция, която води към намиране на желаното обобщение.

В началото е ясно, че описаната окръжност Γ можем да заменим с описана за $\triangle ABC$ крива от втора степен. По отношение на понятието център на крива от втора степен за описаната около $\triangle ABC$ крива са възможни два случая, които ще разгледаме отделно.

ОПИСАНИ ЕЛИПСИ И ХИПЕРБОЛИ

Нека $\bar{k}(O)$ е крива от втора степен с център O . По-нататък в условието на задачата в неявен вид е обявено, че точката P описва окръжност с център S и радиус SC . Затова можем да очакваме, че в търсеното обобщение точката P ще описва някаква крива от втора степен $\bar{k}(S)$ с център S , лежащ на правата AB и такъв, че SC е допирателна за $\bar{k}(O)$ в точката C . Кривата $\bar{k}(S)$ не може предварително да се определи по известните дотук данни, тъй като не са познати достатъчно елементи, за да е възможно построяването на $\bar{k}(S)$. Освен това не са изяснени напълно връзките на $\bar{k}(S)$ с $\bar{k}(O)$. Затова остава да се насочим към разшифроване на информацията, скрита в равенството $MK = ML$. Последното равенство показва, че вписаният в Γ триъгълник KLM е равнобедрен и затова правата през M и центъра на Γ минава през средата на KL . Това, пренесено върху случая с кривата $\bar{k}(O)$, означава, че за произволна точка M от $\bar{k}(O)$ правата KL трябва да е от спрегнатото направление на диаметъра OM на $\bar{k}(O)$. Но от всички прави KL , спрегнати с OM , търсим само тези, за които AK , BL и CM минават през една точка P . Затова с GSP търсим геометричното място на пресечната точка на правите AK и BL , когато правата KL пробягва множеството на всички спрегнати с OM прави. Така получаваме следното:

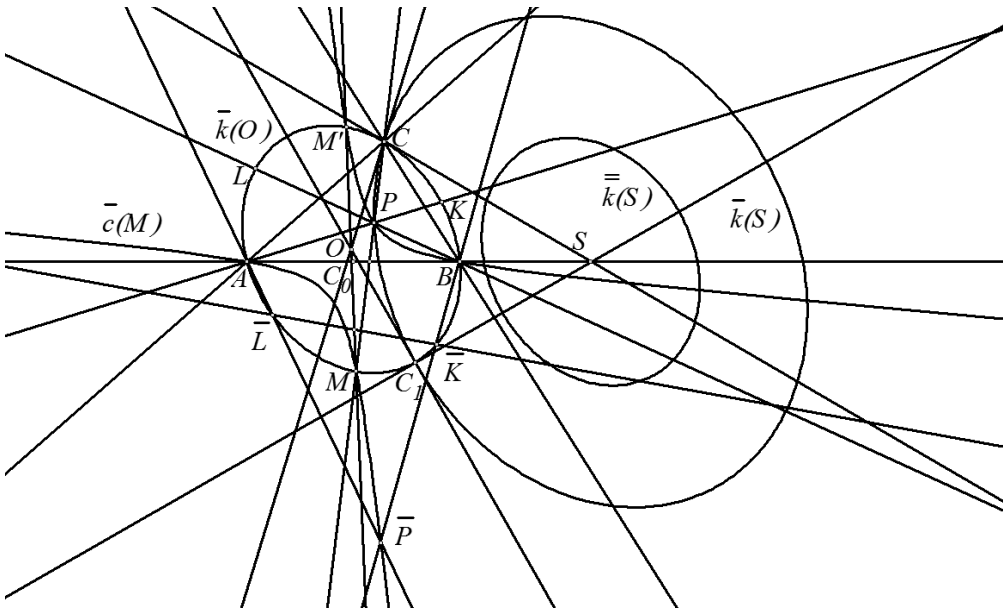
Свойство 1. Нека M е произволна точка от $\bar{k}(O)$, $\bar{l}$ е права от спрегнатото направление на OM и $\bar{l} \cap \bar{k}(O) = \{\bar{K}, \bar{L}\}$. Ако $A\bar{K} \cap B\bar{L} = \bar{P}$ и $\bar{l}$ описва множеството на спрегнатите с OM прави, то точката $\bar{P}$ описва крива от втора степен $\bar{c}(M)$ (Фиг. 1, 2).

Наблюденията с GSP върху кривата $\bar{c}(M)$ показват, че тя притежава следното:

Свойство 2. Кривата $\bar{c}(M)$ има за център точката C_0 и минава през A , B , M и точката M' , симетрична на M спрямо O (Фиг. 1, 2).

Това свойство позволява по-лесно да се построи кривата $\bar{c}(M)$ с GSP. Сега търсената точка P определяме от следното:

Свойство 3. За произволна точка M от $\bar{k}(O)$ точката P се определя като втората пресечна точка на правата CM и кривата $\bar{c}(M)$ (Фиг. 1, 2).



Фиг. 1

Като оставим точката M да пробягва кривата $\bar{k}(O)$, наблюденията с GSP показват, че е изпълнено:

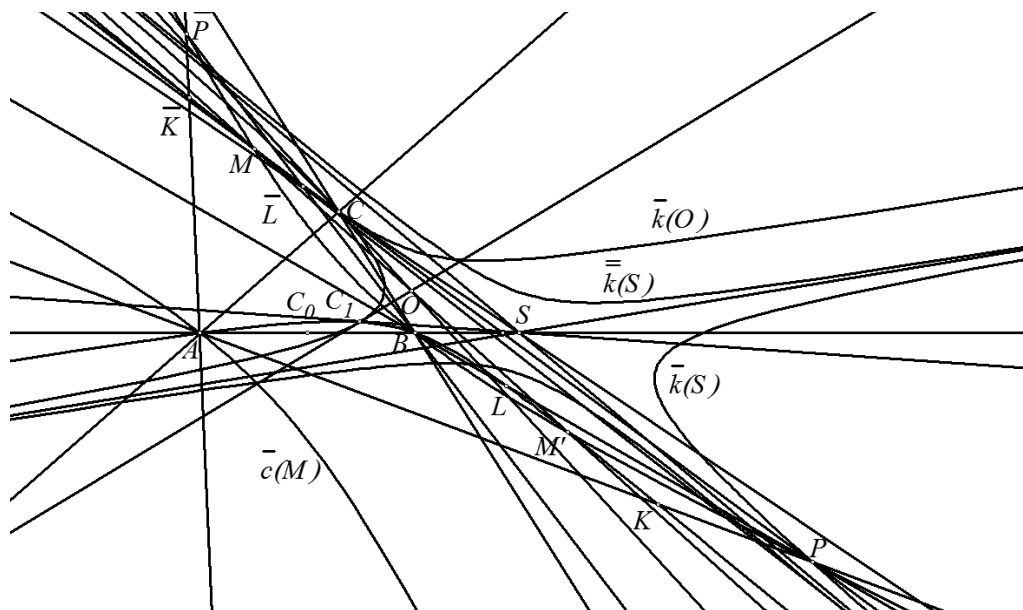
Свойство 4. Ако точката M описва $\bar{k}(O)$, точката P описва крива от втора степен $\bar{k}(S)$, която минава през върха C .

Сега остава да проверим с GSP свойството на допирателната за $\bar{k}(O)$ в точката C . Наблюденията с GSP показват, че е изпълнено следното:

Свойство 5. Ако допирателната на $\bar{k}(O)$ в точката C пресича правата AB в точка S , то S е център на $\bar{k}(S)$ (Фиг. 1, 2).

Резултатите от намерените свойства можем да обединим в следното:

Твърдение 1. Нека коничното сечение $\bar{k}(O)$ с център O е описано за $\triangle ABC$ и M е произволна точка от $\bar{k}(O)$. Ако K и L са такива точки от $\bar{k}(O)$, че правата KL е от спрегнатото направление на диаметъра OM и правите AK , BL и CM минават през точка P , то когато M описва $\bar{k}(O)$, точката P описва конично сечение $\bar{k}(S)$, което има за център пресечната точка S на допирателната към $\bar{k}(O)$ в C с правата AB (Фиг. 1, 2).



Фиг. 2

Оказва се, че ако при доказване на твърдение 1 се следва пътя, очертан от последователността на свойствата, довели до неговото формулиране, се получават известни усложнения при извършване на необходимите аналитични пресмятания. Това ни мотивира да потърсим още свойства на получената конфигурация, които биха довели до опростяване на някои от аналитичните изрази.

Наблюденията с GSP показват, че освен C кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ винаги притежават и втора пресечна точка C_1 , за която е в сила следното

Свойство 6. Втората допирателна през S към $\bar{k}(O)$ минава през другата пресечна точка C_1 на $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ (Фиг. 1, 2).

Това свойство дава възможност да се построи точката C_1 . Освен това, повдига въпроса за подобни свойства на допирателните към $\bar{k}(S)$ през точката O . Експериментите с GSP водят до формулирането на следното:

Свойство 7. Допирателните към $\bar{k}(S)$ през центъра O на $\bar{k}(O)$ минават през общите точки C и C_1 на двете криви (Фиг. 1, 2).

Последните три свойства могат да се обединят по следния начин: Допирателните през центъра на едната крива към другата минават през общите им точки.

Известно е, че общата хорда на всеки две пресичащи се окръжности се разполага от тяхната централа. Понеже проведените досега наблюдения показват, че

$\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ винаги притежават две общи точки, то идваме до идеята да проверим с GSP възможността кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ да притежават същото свойство. Резултатът от този експеримент можем да формулираме по следния начин:

Свойство 8. Централата OS на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ минава през средата на тяхната обща хорда CC_1 .

Прави впечатление още, че е изпълнено следното:

Свойство 9. Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ са едновременно елипси или едновременно хиперболи (Фиг. 1, 2).

Последните свойства ни дават основание да използваме точките S и C_1 при геометричното определяне на $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$, както и съответното им построяване с GSP. Затова ще използваме свойства 5, 6 и 7, за да определим аналитично кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ при намиране на доказателство на твърдение 1.

Нека върху правата AB е дадена произволна точка $S(s, 1-s, 0)$. Определяме $\bar{k}(O)$ като крива, минаваща през A, B, C , произволна точка $C_1(\lambda, \mu, \nu)$ и допираща се до правата CS . Получаваме уравнението

$$(1) \quad \bar{k}(O): s\lambda\mu yz - (1-s)\lambda\mu zx - [s\mu\nu - (1-s)\nu\lambda]xy = 0.$$

След това от (1) и уравнението на SC_1 определяме координатите на точката C_1 така, че правата SC_1 да е допирателна за $\bar{k}(O)$ и получаваме

$$(2) \quad C_1 \left(\lambda, -\frac{(1-s)\lambda}{s}, \frac{(1-2s)\lambda + s}{s} \right).$$

От (1) и (2) се получава

$$(3) \quad \bar{k}(O): s\lambda yz - (1-s)\lambda zx - 2[(1-2s)\lambda + s]xy = 0.$$

Сега, ако $M(x_M, y_M, z_M)$ е произволна точка от $\bar{k}(O)$, а $M_0(m, 1-m, 0)$ е пресечната на CM и $\bar{k}(O)$, от (3) получаваме равенствата

$$(4) \quad x_M = \frac{\lambda m(s-m)}{\theta(m)}, \quad y_M = \frac{\lambda(1-m)(s-m)}{\theta(m)}, \quad z_M = \frac{2m(1-m)((1-2s)\lambda + s)}{\theta(m)},$$

където $\theta(m) = -2((1-2s)\lambda + s)m^2 + ((1-4s)\lambda + 2s)m + s\lambda$.

За редица пресмятания по-нататък ще са ни необходими координатите на центъра $O(x_0, y_0, z_0)$. Определяме ги, като намерим уравненията на спрегнатите диаметри d_a и d_b на правите BC и CA . За да намерим d_a , определяме пресечната точка A' на правата през A , успоредна на BC . След това правата d_a е определена от средата на AA' и A_0 . Аналогично се определя d_b . В параметричен вид тези прави се представят съответно със следните уравнения:

$$(5) \quad \begin{aligned} d_a : \quad x &= 2s\lambda t_1, \quad y = \frac{1}{2} - ((1-2s)\lambda + 2s)t_1, \quad z = \frac{1}{2} + ((1-4s)\lambda + 2s)t_1, \\ d_b : \quad x &= \frac{1}{2} - ((1-2s)\lambda + 2s)t_2, \quad y = 2(1-s)\lambda t_2, \quad z = \frac{1}{2} + ((3-4s)\lambda + 2s)t_2. \end{aligned}$$

След решаване на системата от уравненията на d_a и d_b се получава

$$(6) \quad x_0 = \frac{s\lambda((3-4s)\lambda + 2s)}{\tau(s)}, \quad y = \frac{(s-1)\lambda((1-4s)\lambda + 2s)}{\tau(s)}, \quad z = \frac{2((1-2s)\lambda + s)((1-2s)\lambda + 2s)}{\tau(s)},$$

където $\tau(s) = \lambda^2 + 4s(1-2s)\lambda + 4s^2$.

Сега преминаваме към намиране на уравнението на $\bar{k}(S)$. Нека $C'(2s, 2(1-s), -1)$ е точката, симетрична на C спрямо S . Разглеждаме координатна система с координатен триъгълник $C_1C'C$, като $C_1(1,0,0)$, $C'(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Ако една точка има координати (x', y', z') спрямо $\Delta C_1C'C$ и координати (x, y, z) спрямо ΔABC , то са изпълнени равенствата

$$(7) \quad x = \lambda x' + 2sy', \quad y = -\frac{1-s}{s}\lambda x' + 2(1-s)y', \quad z = \frac{(1-2s)\lambda + s}{s}x' - y' + z'.$$

От (7) лесно се получават равенствата

$$(8) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2\lambda}x - \frac{s}{2(1-s)\lambda}y, \quad y' = \frac{1}{4s}x + \frac{1}{4(1-s)}y, \\ z' &= -\frac{(1-4s)\lambda + 2s}{4s\lambda}x + \frac{(3-4s)\lambda + 2s}{4(1-s)\lambda}y + z. \end{aligned}$$

От (6) и (8) за координатите на O спрямо $\Delta C_1C'C$ се получават равенствата

$$(9) \quad x'_0 = \frac{2s((1-2s)\lambda + s)}{\tau(s)}, \quad y'_0 = \frac{\lambda^2}{\tau(s)}, \quad z'_0 = \frac{1}{2}.$$

От третото равенство в (9) следва, че точката O лежи върху правата, минаваща през средите на отсечките CC' и CC_1 . Оттук непосредствено се получава свойство 8.

Определяме кривата $\bar{k}(S)$ като минаваща през точките C_1 , C' , C и допираща се до правите OC_1 и OC . Получаваме уравнението

$$(10) \quad x'_0y'z' - y'_0z'x' + z'_0x'y' = 0.$$

След заместване на (9) в (10) се получава уравнението на $\bar{k}(S)$ спрямо ΔABC

$$(11) \quad \bar{k}(S): \begin{aligned} & 2(1-s)((1-2s)\lambda + s)x^2 + 2s((1-2s)\lambda + s)y^2 + \\ & + s((3-4s)\lambda + 2s)yz + (1-s)((1-4s)\lambda + 2s)zx = 0. \end{aligned}$$

Сега, ако P е произволна точка от $\bar{k}(S)$ и правата CP пресича AB в точка $P_0(p, 1-p, 0)$, от уравненията на правата CP и (11) за координатите на P се получават равенствата

$$(12) \quad \begin{aligned} x_p &= \frac{((8s^2 - 8s + 1)\lambda + 2s(1-2s))p + s((3-4s)\lambda + 2s)}{\theta(p)} p, \\ y_p &= \frac{((8s^2 - 8s + 1)\lambda + 2s(1-2s))p + s((3-4s)\lambda + 2s)}{\theta(p)} (1-p), \\ z_p &= \frac{2((1-2s)\lambda + s)(-p^2 + 2p - s)}{\theta(p)}, \end{aligned}$$

където $\theta(p) = -2((1-2s)\lambda + s)p^2 + ((1-4s)\lambda + 2s)p + s\lambda$.

За да определим вида на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$, търсим условията, които показват какъв е броят на общите им точки с безкрайната права (уравнението ѝ е $x + y + z = 0$). От уравненията (3) и (11) намираме, че условието, от което зависи вида на всяка от кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$, е знакът на израза $\tau(s) = \lambda^2 + 4s(1-2s)\lambda + 4s^2$. Следователно те са едновременно елипси или хиперболи. С това е установено свойство 9.

Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ определихме, като се възползвахме от предварително откритите с GSP техни свойства 5, 6 и 7. За да ги свържем обаче с първоначално търсената конструкция, трябва да установим и свойства 1, 2 и 3. Затова преминаваме към техните доказателства.

Ако M е безкрайна точка (това е възможно само когато $\bar{k}(O)$ е хипербола, което от своя страна се получава, когато m е един от двата корена на уравнението $\mathcal{V}(m) = 0$), правата $\bar{l}$ от спрегнатото направление на OM (това е асимптота за $\bar{k}(O)$) е успоредна на OM . Тогава $\bar{l} \cap \bar{k}(O) = \{\bar{K}, \bar{L} \equiv M\} = \{\bar{K} \equiv M, \bar{L}\}$. Затова, тъй като BM и AM са постоянни прави, то равенствата $A\bar{K} \cap BM = \bar{P}$ и $AM \cap B\bar{L} = \bar{P}$ означават, че точката $\bar{P}$ описва двете успоредни прави AM и BM , които заедно образуват крива от втора степен $\bar{c}(M)$. Това означава, че е изпълнено свойство 1. Освен това точката C_0 е център на $\bar{c}(M)$ и ако приемем, че $M' \equiv M$, т.е., че M е симетрична сама на себе си спрямо O , то можем да смятаме свойство 2 за

изпълнено. При това положение смятаме също, че правата CM пресича два пъти $\bar{c}(M)$ в нейната безкрайна точка M , което води до свойство 3. Така установяваме, че M е точка от хиперболата $\bar{k}(S)$.

По-нататък разглеждаме случая, когато M е крайна точка ($\vartheta(m) \neq 0$). Разглеждаме координатна система с координатен триъгълник ABM , като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $M(0,0,1)$. Ако една точка има координати (x'', y'', z'') спрямо ABM и координати (x, y, z) спрямо ΔABC , то са изпълнени равенствата

$$(13) \quad x = x'' + x_M z'', \quad y = y'' + y_M z'', \quad z = z_M z''.$$

От (13) лесно се получават равенствата

$$(14) \quad x'' = x - \frac{x_M}{z_M} z, \quad y'' = y - \frac{y_M}{z_M} z, \quad z'' = \frac{1}{z_M} z.$$

От (6) и (14) за координатите на O спрямо ΔABM се получават равенствата

$$(15) \quad \begin{aligned} x''_0 &= \frac{(1-s)\lambda}{(1-m)\tau(s)} (((1-4s)\lambda + 2s)m + 2s\lambda), \\ y''_0 &= \frac{s\lambda}{m\tau(s)} (((3-4s)\lambda + 2s)m - ((1-2s)\lambda + 2s)), \\ z''_0 &= \frac{((1-2s)\lambda + 2s)\theta(m)}{m(1-m)\tau(s)}. \end{aligned}$$

Сега определяме крива $\bar{c}(M)$, която минава през точките $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $M(0,0,1)$, $M'(2x''_0, 2y''_0, 2z''_0 - 1)$ и $M''(1,1,-1)$. Получаваме уравнението

$$(16) \quad \bar{c}(M): (1-2x''_0)x''_0 y'' z'' - (1-2y''_0)y''_0 z'' x'' + (y''_0 - x''_0)(1-2z''_0)x'' y'' = 0.$$

Като се използва (16), лесно се проверява, че $\bar{c}(M)$ има за център точката C_0 .

Следователно $\bar{c}(M)$ удовлетворява свойство 2.

От (15) и (16) се получава още уравнението

$$(17) \quad \bar{c}(M): (1-s)m^2 y'' z'' + s(1-m)^2 z'' x'' + (m^2 - 2sm + s)x'' y'' = 0$$

Нека сега $\bar{K}(x''_1, y''_1, z''_1)$ е произволна точка от кривата $\bar{k}(O)$, чието уравнение спрямо ΔABM е следното

$$(18) \quad \bar{k}(O): (1-2x''_0)x''_0 y'' z'' + (1-2y''_0)y''_0 z'' x'' + (1-2z''_0)z''_0 x'' y'' = 0.$$

Правата $\bar{l}$, определена с уравненията

$$(19) \quad \bar{l}: x'' = x_1'' - x_0''(2x_0'' - 1)l, \quad y'' = y_1'' + y_0''(2y_0'' - 1)l, \quad z'' = z_1'' + (y_0'' - x_0'')(2z_0'' - 1)l,$$

е спрегната с диаметъра OM и минава през $\bar{K}$.

От (18) и (19) за координатите на втората пресечна точка $\bar{L}(x_2'', y_2'', z_2'')$ на $\bar{l}$ и $\bar{k}(O)$ се получават равенствата

$$(20) \quad \begin{aligned} x_2'' &= \frac{(x_0'' - y_0'')y_0''x_1'' + (1 - 2x_0'')x_0''y_1''}{y_0''z_0''}, \\ y_2'' &= \frac{(1 - 2y_0'')y_0''x_1'' + (y_0'' - x_0'')x_0''y_1''}{z_0''x_0''}, \\ z_2'' &= \frac{(y_0'' - x_0'')(1 - 2z_0'')}{x_0''y_0''z_0''}(y_0''x_1'' - x_0''y_1'') + z_1''. \end{aligned}$$

Нека $A\bar{K} \cap B\bar{L} = \bar{P}(x_3'', y_3'', z_3'')$. Тогава са изпълнени равенствата

$$(21) \quad x_3'' = \frac{x_2''z_1''}{(y_1'' + z_1'')z_2'' + x_2''z_1''}, \quad y_3'' = \frac{y_1''z_2''}{(y_1'' + z_1'')z_2'' + x_2''z_1''}, \quad z_3'' = \frac{z_1''z_2''}{(y_1'' + z_1'')z_2'' + x_2''z_1''}.$$

След заместване на (21) в лявата част на (16) и използване на равенствата (20) и (18) се установява, че е в сила равенството (16), т.е. $\bar{P}$ лежи върху $\bar{c}(M)$. Следователно кривата $\bar{c}(M)$ удовлетворява свойство 1 и затова $\bar{c}(M)$ е кривата, предсказана от експериментите с GSP.

Следващата стъпка, която предприемаме, е да намерим втората пресечна точка P на CM и $\bar{c}(M)$, като използваме (17). Получаваме следните координати

$$(22) \quad x_P'' = \frac{(1 - 2s)m + s}{1 - m}, \quad y_P'' = \frac{(1 - 2s)m + s}{m}, \quad z_P'' = -\frac{m^2 - 2sm + s}{m(1 - m)}.$$

Сега от (13) и (22) при $m = p$, получаваме равенствата (12). С това е доказано свойство 3, което чрез свойство 4 води до кривата $\bar{k}(S)$, построена по свойства 5, 6 и 7.

Забележка 1. Трябва да се отбележи, че точката M може да се получи от безкрайната точка $M_0(1, -1, 0)$. В този конкретен случай (4), (15), (17) и (22) имат специално представяне, което може да се получи като навсякъде се изнесе най-високата степен на m и в получените изрази се премине към граничен преход

при $m \rightarrow \infty$ (същото се отнася и за точката $M_0(1, -1, 0)$, която се получава от $\bar{M}_0\left(1, \frac{1}{m} - 1, 0\right)$ при $m \rightarrow \infty$). Същата операция трябва да се приложи и за точката P в (12). Всички окончателни резултати при новите (4), (15), (17), (22) и (12) остават в сила и за това са в сила и получените свойства.

Сега като имаме предвид забележка 1, от приведената последователност от разсъждения следва, че окончателно е обоснована конструкцията, построена с помощта на GSP, водеща до формулирането на твърдение 1. Следователно е доказано и твърдение 1.

Изследванията, които доведоха до формулирането и доказването на твърдение 1, показаха, че получената конструкция е богата на интересни свойства. Това ни провокира да потърсим други свойства на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$. Наблюденията с GSP върху разположението на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ ни насочва към предположението, че тези криви са хомотетични. Заключение, че $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ са винаги хомотетични при следващите експерименти с GSP се оказва твърде прибързано. По-задълбочените наблюдения с GSP показват, че хомотетията е свойство на елипсите, но не и на хиперболите. Така установяваме следните специални свойства на $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$:

Свойство 10. Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ са елипси, те са хомотетични (Фиг. 1).

Свойство 11. Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ са хиперболи, те имат успоредни асимптоти (Фиг. 2).

Свойство 12. Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$ са хиперболи, трансляцията с вектор $\overrightarrow{OS}$ привежда $\bar{k}(O)$ в хипербола $\bar{k}(S)$, която лежи в ъгъла, определен от асимптотите на $\bar{k}(S)$, не съдържащи $\bar{k}(S)$ (Фиг. 2).

Преминаваме към доказване на специалните свойства на $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(S)$. За целта търсим уравнението на образа $\bar{k}(S)$ на $\bar{k}(O)$ при трансляция с вектор $\overrightarrow{OS}(\xi, \eta, \zeta)$,

където $\xi = -\frac{2s}{\tau(s)}(\lambda - 2s)((1 - 2s)\lambda + s)$, $\eta = \frac{2(1-s)}{\tau(s)}(\lambda + 2s)((1 - 2s)\lambda + s)$, $\zeta = -\frac{2}{\tau(s)}((1 - 2s)\lambda + s)((1 - 2s)\lambda + 2s)$. Получаваме уравнението

$$(23) \bar{k}(S): \tau(s)(s\lambda yz - (1-s)\lambda zx - 2((1-2s)\lambda + s)) + 2\tau(s)((1-2s)\lambda + s)((1-s)x + sy) - 4s(1-s)((1-2s)\lambda + s)(\lambda^2 + 2s(1-2s)\lambda + 2s^2) = 0.$$

По направлението на произволен вектор $\vec{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ ($\alpha + \beta + \gamma = 0$) определяме права $r: x = s + \alpha v$, $y = 1 - s + \beta v$, $z = \gamma v$. От (11) намираме, че пресечните

точки на r с $\bar{k}(S)$ се получават при стойности на параметъра v , удовлетворяващи равенството

$$(24) \quad (s\lambda\beta\gamma - (1-s)\lambda\gamma\alpha - 2((1-2s)\lambda + s)\alpha\beta)v_1^2 = -2s(1-s)((1-2s)\lambda + s),$$

а от (23), че пресечните точки на r с $\bar{\bar{k}}(S)$ се получават при стойности на параметъра v , удовлетворяващи равенството

$$(25) \quad (s\lambda\beta\gamma - (1-s)\lambda\gamma\alpha - 2((1-2s)\lambda + s)\alpha\beta)\tau(s)v_2^2 = 2s(1-s)((1-2s)\lambda + s)\lambda^2.$$

Ако $\bar{k}(S)$ и $\bar{\bar{k}}(S)$ са хиперболи, то $\tau(s) > 0$. В този случай, ако r има общи точки с $\bar{k}(S)$, уравнението (24) има решения, а (25) няма решение и затова правата r няма обща точка с $\bar{\bar{k}}(S)$. Това означава, че $\bar{k}(S)$ и $\bar{\bar{k}}(S)$ лежат в различните противоположни ъгли на общите им асимптоти. От (24) и (25) следва още равенството $\frac{v_1^2}{v_2^2} = -\frac{\tau(s)}{\lambda^2}$. Затова, ако $\bar{k}(S)$ и $\bar{\bar{k}}(S)$ са елипси, т.е. $\tau(s) < 0$, кривата $\bar{k}(S)$ се получава от $\bar{\bar{k}}(S)$ при хомотетия с център S и коефициент на хомотетията $\frac{\sqrt{-\tau(s)}}{\lambda}$. С това свойства 10, 11 и 12 са доказани.

От свойство 10 и получените резултати следва, че съответните линейни ексцентритети на елипсите $\bar{k}(S)$ и $\bar{\bar{k}}(O)$ имат отношение $\frac{\sqrt{-\tau(s)}}{\lambda}$.

В случай, че кривите са хиперболи, лесно се вижда, че векторите

$$(26) \quad \begin{aligned} \vec{e}_1(\alpha_1 = (1-4s)\lambda + 2s - \sqrt{\tau(s)}, \beta_1 = (3-4s)\lambda + 2s + \sqrt{\tau(s)}, \gamma_1 = -4((1-2s)\lambda + s)), \\ \vec{e}_2(\alpha_2 = (1-4s)\lambda + 2s + \sqrt{\tau(s)}, \beta_2 = (3-4s)\lambda + 2s - \sqrt{\tau(s)}, \gamma_2 = -4((1-2s)\lambda + s)), \end{aligned}$$

са колинеарни с асимптотите на тези хиперболи.

От барицентрични координати (x, y, z) спрямо $\triangle ABC$ към афинни координати (X, Y) спрямо координатна система с център S и координатни оси по асимптотите на $\bar{k}(S)$ и $\bar{\bar{k}}(S)$ се преминава чрез равенствата

$$(27) \quad x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + s, \quad y = \beta_1 X + \beta_2 Y + 1 - s, \quad z = \gamma_1 X + \gamma_2 Y.$$

От (27), (26) и (11) за афинното уравнение на $\bar{k}(S)$ се получава

$$(28) \quad \bar{k}(S): XY = \frac{s(1-s)}{4\tau(s)}.$$

От (27), (26) и (23) за афинното уравнение на $\bar{\bar{k}}(S)$ се получава

$$(29) \quad \bar{\bar{k}}(S): XY = -\frac{s(1-s)\lambda^2}{4\tau^2(s)}.$$

От (28) и (29) следва, че отношението на линейните ексцентрицитети на $\bar{k}(S)$ и $\bar{k}'(S)$ е равно на $\frac{\sqrt{\tau(s)}}{\lambda}$ (Моденов, 1969). Така за елипсите и хиперболите получаваме следното:

Свойство 13. *Отношението на съответните линейни ексцентрицитети на $\bar{k}(S)$ и $\bar{k}(O)$ е равно на $\frac{\sqrt{|\tau(s)|}}{\lambda}$.*

Описани параболи

Показахме, че описаната за $\triangle ABC$ крива $\bar{k}(O)$ може да се определи с точка $S \in AB$ и точка C_1 така, че SC и SC_1 са тангенти за $\bar{k}(O)$. Всъщност при това определяне никъде не използвахме, че $\bar{k}(O)$ има за център точката O . От друга страна беше показано, че видът на $\bar{k}(O)$ зависи от знака на $\tau(s)$. Следователно една парабола $\bar{\pi}(S)$, описана за $\triangle ABC$ може да се определи по същия начин от точка $S \in AB$ и точка C_1 , чиито координати се определят с (2) и равенството $\tau(s) = 0$. От последното равенство лесно се вижда, че са изпълнени и равенствата:

$$(30) \quad \begin{aligned} (1-2s)\lambda + s &= -\frac{\lambda^2}{4s}, & (1-2s)\lambda + 2s &= \frac{(2s-\lambda)(2s+\lambda)}{4s}, \\ (1-4s)\lambda + 2s &= -\frac{\lambda(2s+\lambda)}{2s}, & (3-4s)\lambda + 2s &= \frac{\lambda(2s-\lambda)}{2s}. \end{aligned}$$

От (2) и (30) за координатите на C_1 получаваме

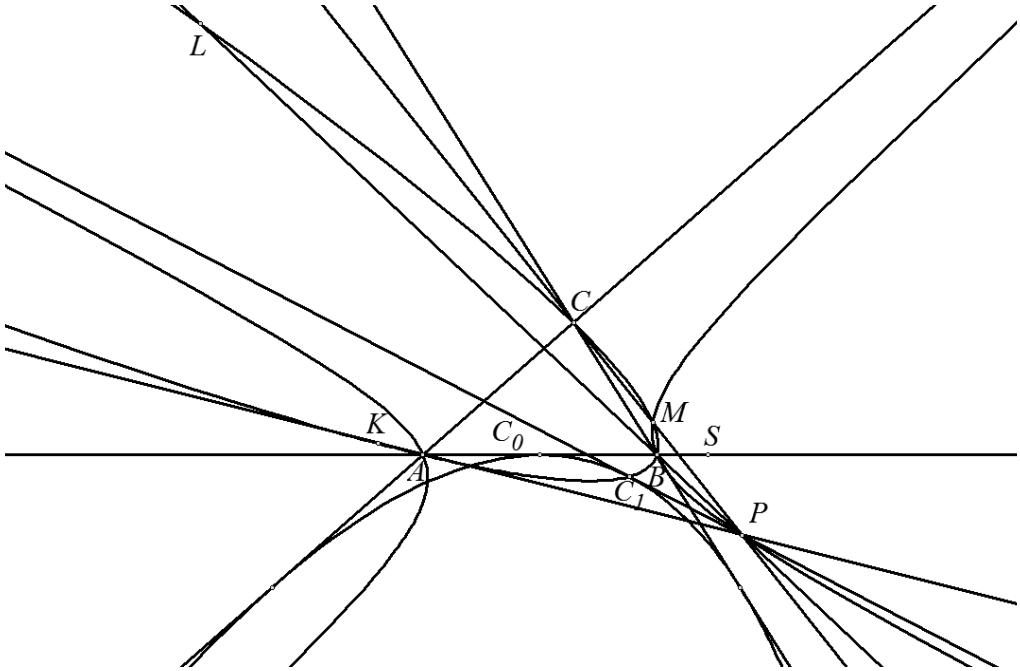
$$(2') \quad C_1 \left(\lambda, -\frac{1-s}{s} \lambda, -\frac{\lambda^2}{4s^2} \right).$$

За всяка точка $S \in AB$ уравнението $\tau(s) = 0$ по отношение на λ определя две точки C'_1 и C''_1 , които от своя страна определят две описани за $\triangle ABC$ параболи. Така възниква въпросът за това какво множество ще опишат C'_1 и C''_1 , когато S описва правата AB . Наблюденията с GSP водят до следния извод: *Когато точката S описва правата AB , точките C'_1 и C''_1 описват парабола $\bar{\pi}(C)$, вписана в $\triangle ABC$ така, че минава през средата C_0 на AB и през точките, симетрични на C спрямо A и B (Фиг. 3).*

Лесно се определя, че така намерената специална за ΔABC парабола $\bar{\pi}(C)$ се описва с уравнението:

$$(31) \quad \bar{\pi}(C): x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz + 4zx - 2xy = 0.$$

След заместване на координатите на C_1 от (2') в (3) и използване на равенството $\tau(s) = 0$ се установява, че C_1 наистина е точка от $\bar{\pi}(C)$.



Фиг. 3

Сега е интересно да се установи вариант на първоначалната задача за описани около ΔABC параболи. Пътят на разсъждения беше проправен при изследванията, проведени с елипси и хиперболи. Остава с помощта на GSP да приложим същата последователност на разсъждения и съответните им изследвания. Установяваме следните свойства:

Свойство 1'. Нека M е произволна точка от $\bar{\pi}(S)$, $\bar{l}$ е права от спрегнатото направление на диаметъра d през M и $\bar{l} \cap \bar{\pi}(S) = \{\bar{K}, \bar{L}\}$. Ако $A\bar{K} \cap B\bar{L} = \bar{P}$ и $\bar{l}$ описва множеството на спрегнатите с d прави, то точката $\bar{P}$ описва крива от втора степен $\bar{c}(M)$ (Фиг. 3).

Свойство 2'. Кривата $\bar{c}(M)$ е хипербола с център точката C_0 , която минава през A , B , M и една от асимптотите ѝ е успоредна на оста на $\bar{\pi}(S)$ (Фиг. 3).

Свойство 3'. За произволна точка M от $\bar{\pi}(S)$, точката P се определя като втората пресечна точка на правата CM и кривата $\bar{c}(M)$ (Фиг. 3).

Геометричното място, което описва точката P обаче се характеризира със свойство много по-различно от свойство 4. То е следното:

Свойство 14. Ако точката M описва $\bar{\pi}(S)$, точката P описва права, която е тангента за $\bar{\pi}(C)$ в точката C_1 (Фиг. 3).

Така свойство 14 превъща специалната парабола $\bar{\pi}(C)$ в забележителна за ΔABC , тъй като то описва забележително свойство на описаните за ΔABC параболи $\bar{\pi}(S)$.

Резултатите от последните четири свойства можем да обединим в следното:

Твърдение 2. Нека $\bar{\pi}(S)$ е описана за ΔABC парабола и M е произволна точка от $\bar{\pi}(S)$. Ако K и L са такива точки от $\bar{\pi}(S)$, че правата KL е от спрегнатото направление на диаметъра на $\bar{\pi}(S)$ през M и правите AK , BL и CM минават през точка P , то когато M описва $\bar{\pi}(S)$, точката P описва права, допирателна за параболата $\bar{\pi}(C)$, вписана в ΔABC така, че минава през средата на AB и през точките, симетрични на C спрямо A и B (Фиг. 3).

За да докажем твърдение 2 първо ще намерим допирателната на $\bar{\pi}(C)$ в точката C_1 . От уравненията на диаметъра d_a в (5) и равенствата (30) се вижда, че един вектор колинеарен с оста на $\bar{\pi}(S)$ е следният:

$$(32) \quad \vec{O}(x_0 = -8s^2\lambda, y_0 = (2s - \lambda)(2s + \lambda), z_0 = 2\lambda(2s + \lambda)).$$

От (2') и (32) определяме параметричните уравнения на права $p(C_1)$ през точката C_1 и колинеарна с $\vec{O}$ във вида

$$(33) \quad p(C_1): x = \lambda - 8s^2\lambda u, \quad y = -\frac{1-s}{s}\lambda + (2s - \lambda)(2s + \lambda)u, \quad z = -\frac{\lambda^2}{4s^2} + 2\lambda(2s + \lambda)u.$$

След заместване на (33) в (31) се получава уравнението спрямо u : $(\lambda + 2s)^2 u^2 + \frac{\lambda}{s^2}(4s - 1)\tau(s)u + \frac{\lambda^2}{s^2}\tau(s) = 0$. Предвид $\tau(s) = 0$, последното има двоен корен $u = 0$, което означава, че $p(C_1)$ е допирателна на $\bar{\pi}(C)$ в C_1 .

Можем да запишем правата $p(C_1)$ с общо уравнение във вида

$$(34) \quad p(C_1): \lambda(2s - \lambda)x - \lambda(2s + \lambda)y + (2s - \lambda)(2s + \lambda)z = 0.$$

Кривата $\bar{c}(M)$ определяме, както преди спрямо ΔABM и получаваме уравнението

$$(35) \quad \bar{c}(M): x_0''^2 y'' z'' - y_0''^2 z'' x'' + (y_0'' - x_0'') z_0'' x'' y'' = 0.$$

От (35) лесно се вижда, че $\bar{c}(M)$ има за център C_0 , както и че безкрайната точка (x_0'', y_0'', z_0'') на $\bar{\pi}(S)$ е решение на (35). С това свойство 2' е доказано.

Като вземем предвид, че $\tau(s) = 0$, от (4) получаваме

$$(4') \quad x_M = \frac{8s\lambda m(s-m)}{(2s+\lambda-2\lambda m)^2}, \quad y_M = \frac{8s\lambda(1-m)(s-m)}{(2s+\lambda-2\lambda m)^2}, \quad z_M = -\frac{4\lambda^2 m(1-m)}{(2s+\lambda-2\lambda m)^2}.$$

От (14), (4') и (30) получаваме, че $\bar{O}$ спрямо ABM може да се представи във вида:

$$(36) \quad x_0'' = 2\lambda(2s-\lambda)m, \quad y_0'' = 2\lambda(2s+\lambda)(1-m), \quad z_0'' = -(2s+\lambda).$$

От (36) и (35) уравнението на $\bar{c}(M)$ приема вида (17). Следователно всички разсъждения, проведени при доказателството на свойство 1, са валидни и за свойство 1', с което приключва доказателството на свойство 1'.

От (13) и (34) за уравнението на $p(C_1)$ спрямо ΔABM се получава

$$(37) \quad p(C_1): \lambda(2s-\lambda)x'' - \lambda(2s+\lambda)y'' + (\lambda(2s-\lambda)x_M - \lambda(2s+\lambda)y_M + (2s-\lambda)(2s+\lambda)z_M)z'' = 0.$$

Сега, като се използват (4') и (2), лесно се проверява, че координатите на точката P са решение на (37). С това свойство 14 е доказано, което води до окончателното доказателство на твърдение 2.

Забележка 2. За (4') и следващите от него резултати трябва да се има предвид забележка 1.

В заключение трябва да отбележим, че намерените геометрични места, описани в получените твърдения, имат различни свойства в различните три случая на пораждащи ги конични сечения.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. (2010). Напредване назад. *Математика плюс*. 3 (71), 46–50.
Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Изд. Московского университета.
Паскалев, Г. & Чобанов, И. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.

Сава Гроздев

професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев”, бл. 8, 1113 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков

доктор по педагогика
Технически колеж Ловеч
ул. „Съйко Съев” № 31, Ловеч
E-mail: vnenkov@mail.bg

LOCI, THAT ARE GENERATED BY CONJUGATED LINES AND CEVIANS

Abstract. The paper considers generalizations of a problem from the International Mathematical Olympiad in 2010.

Sava Grozdev

Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Veselin Nenkov

Doctor in Mathematics
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech
E-mail: vnenkov@mail.bg