

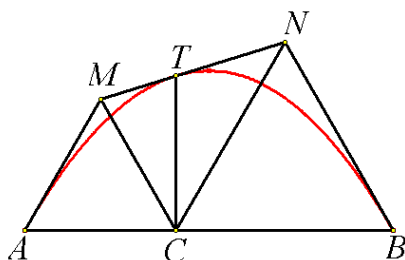
ГЕОМЕТРИЧНИ МЕСТА, ПОРОДЕНИ ОТ РАВНОСТРАННИ ТРИЪГЪЛНИЦИ С ВЪРХОВЕ ВЪРХУ ОКРЪЖНОСТ

Борислав Борисов, Деян Димитров,
Николай Нинов, Теодор Христов
Природо-математическа гимназия – Ловеч

Резюме. Статията е ученическа разработка под ръководството на доц. д-р Веселин Ненков. Новите резултати в нея получиха отлична оценка по време на представянето ѝ в международния конкурс „Методология и информационни технологии в образованието“ през 2019 г. и разработката беше удостоена с първа награда. Тя е посветена на геометрични места, определени от забележителни точки в триъгълник, получен от равностранны триъгълници с върхове върху постоянна окръжност. Конструкцията на триъгълника е подобна на тази от стартовата задача в първия международен „Мрежов изследователски проект“ с участието на България, Казахстан и Русия. Основната разлика в двете конструкции се състои в разположението на две двойки върхове на равностранны триъгълници – в първоначалната задача те лежат върху постоянна права, а в настоящата – върху окръжност. Получените геометрични места са окръжности, елипса и крива от четвърта степен.

Keywords: equilateral triangle; circle; ellipse; curve of fourth degree

1. Увод. През 2015 – 2016 г. в рамките на международния проект МІТЕ е проведен първият „Мрежов изследователски проект“, в който участват отбори, съставени от представители на България, Казахстан и Русия. Отборът „Огньовете на Светия Елм“ участва в мрежовата игра „Геометрически Scrabble в облаците“. Тази игра се състои в разработване на различни идеи за решаване, обобщаване и изменение на условието на следващата задача. *Точка C лежи върху отсечката AB . Върху отсечките AC и BC са построени равностранны триъгълници ACM и BCN , лежащи в една полуравнина относно AB . Ако T е пресечната точка на ъглополовящата на ъгъл MCN с MN , да се намери траекторията, която ще опише точката T при движението на C по AB .*

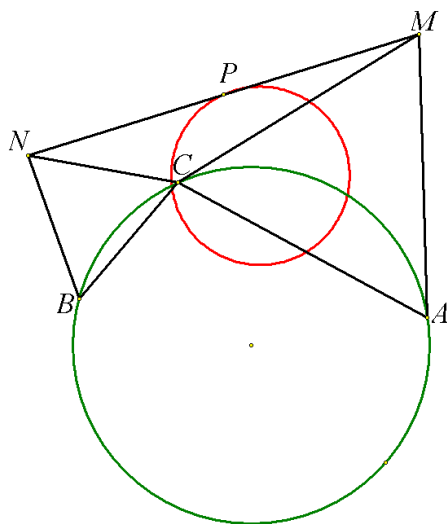


Решението на тази задача е част от парабола. Някои от измененията в условието на формулираната от проф. М. Шабанова задача се състоят в това точката T да се замени със средата на MN , петата на височината през върха C на $\triangle MNC$, медицентъра, ортоцентъра и центъра на описаната окръжност на $\triangle MNC$.

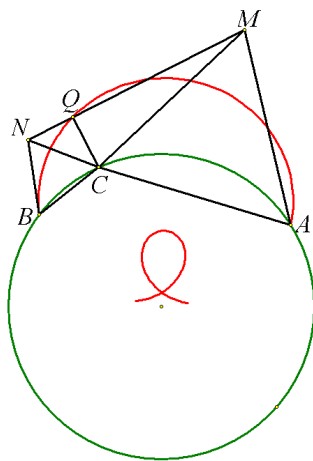
В настоящата разработка си поставяме за цел да изследваме геометричните места, които описват споменатите точки, свързани с $\triangle MNC$, но в случая, когато точките A , B , и C лежат на една окръжност.

2. Формулиране на основните резултати. След извършване на изследвания с помощта на програмата Geometer's Sketchpad стигаме до формулирането на следващите твърдения.

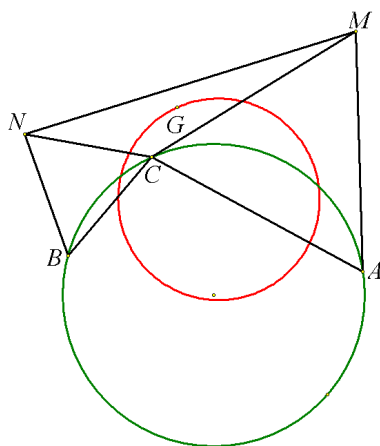
Твърдение 1. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са различно ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , средата на отсечката MN описва окръжност.



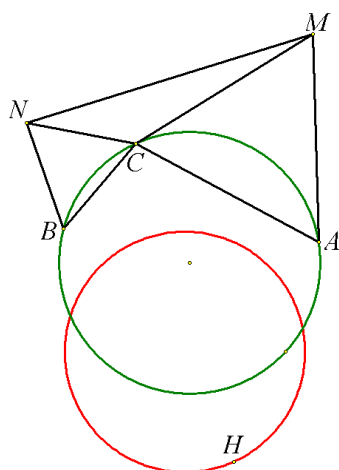
Твърдение 2. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са различно ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , петата на перпендикуляра, спуснат от C към правата MN , описва крива от четвърта степен, минаваща през точките A и B .



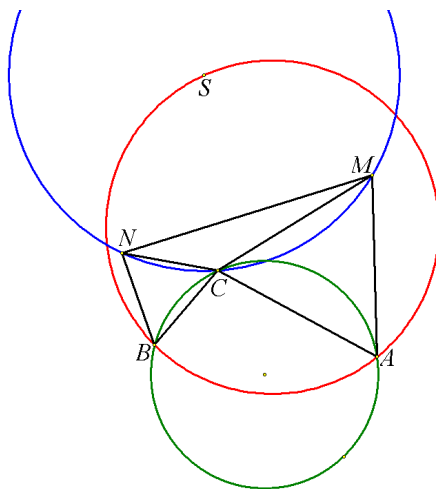
Твърдение 3. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са различно ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , медицентърът на $\triangle ABC$ описва окръжност.



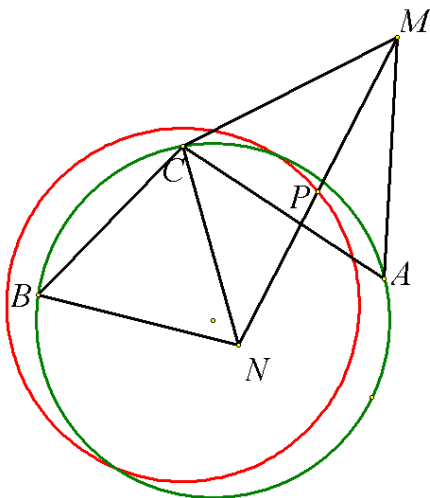
Твърдение 4. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са различно ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , ортоцентърът на $\triangle ABC$ описва окръжност.



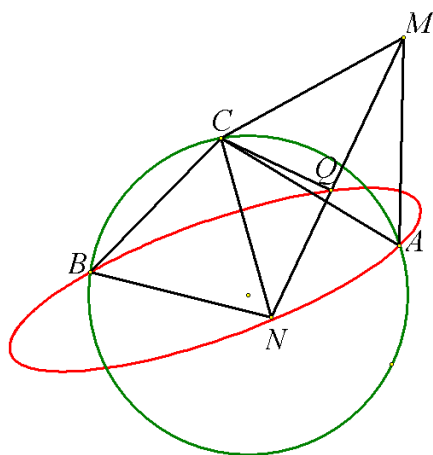
Твърдение 5. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са различно ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност описва окръжност, минаваща през точките A и B .



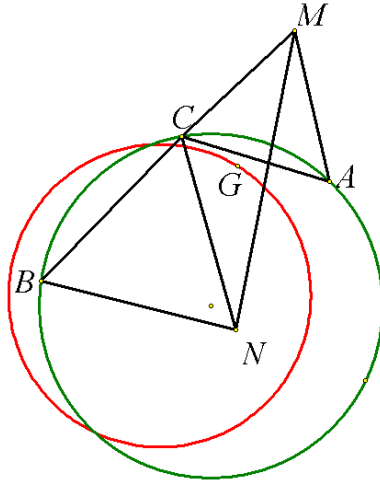
Твърдение 6. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са еднакво ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , средата на отсечката MN описва окръжност.



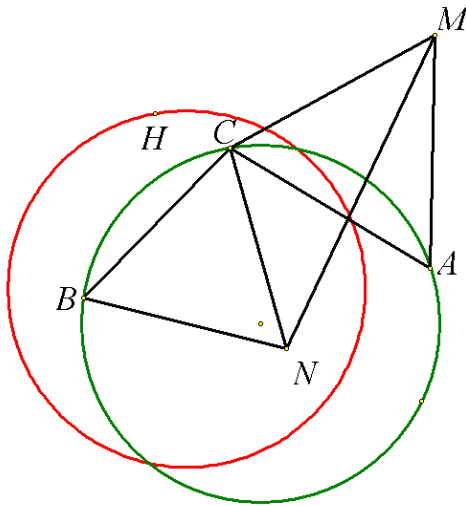
Твърдение 7. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са еднакво ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , петата на перпендикуляра, спуснат от C към правата MN , описва елипса, минаваща през точките A и B .



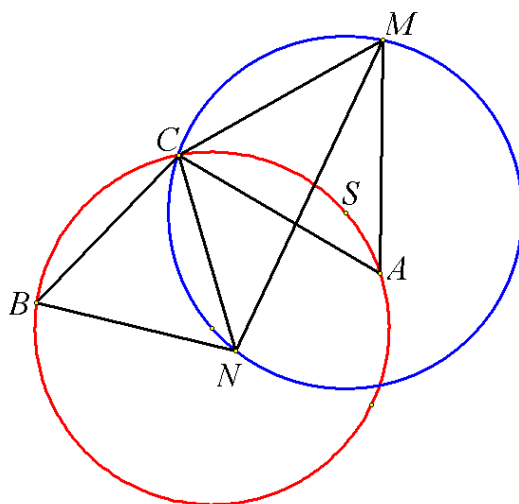
Твърдение 8. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че AMC и BNC са еднакво ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , медицентърът на $\triangle ABC$ описва окръжност.



Твърдение 9. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че триъгълниците AMC и BNC са еднакво ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , ортоцентърът на $\triangle ABC$ описва окръжност.



Твърдение 10. Точките A , B и C лежат на окръжност Γ , а точките M и N са такива, че триъгълниците AMC и BNC са еднакво ориентирани равностранни триъгълници. Ако точката C се движи по окръжността Γ , центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност описва окръжността Γ .



3. Доказателства на формулираните твърдения. Формулираните твърдения ще докажем, като разгледаме геометричните фигури в комплексната равнина. Афиксите на точките ще означаваме със съответните им малки букви. Избираме Гаусова координатна система, спрямо която Γ е единичната окръжност. Следователно $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$.

Ако триъгълниците AMC и BNC са противоположно ориентирани, то са изпълнени равенствата:

$$(1) \quad m = a\omega + c\bar{\omega}, \quad n = b\bar{\omega} + c\omega, \quad \bar{m} = \frac{a\omega + c\bar{\omega}}{ac}, \quad \bar{n} = \frac{b\bar{\omega} + c\omega}{bc},$$

където $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

За комплексното число ω са изпълнени равенствата $\omega\bar{\omega} = 1$, $\omega^3 = \bar{\omega}^3 = -1$, $\omega^2 = -\omega$, $\bar{\omega}^2 = -\bar{\omega}$, $\omega + \bar{\omega} = 1$.

Доказателство на твърдение 1. Ако Z е средата на MN , то са изпълнени равенствата $z = \frac{m+n}{2} = \frac{a\omega + b\bar{\omega} + c}{2}$ и $\bar{z} = \frac{ac\omega + bc\bar{\omega} + ab}{2abc}$. Първото от тези

равенства води до $c = 2z - a\omega - b\bar{\omega}$. След заместване на тази стойност на c във второто равенство получаваме, че точката Z удовлетворява уравнението

$$4abz\bar{z} - 2(a\omega + b\bar{\omega})z - 2ab(a\omega + b\bar{\omega})\bar{z} - (a-b)(a\bar{\omega} - b\omega) = 0.$$

Последното уравнение показва, че търсеното геометрично място е окръжност. С това твърдение 1 е доказано.

Доказателство на твърдение 2. От условието за перпендикулярност следва, че височината на $\triangle MNC$ през върха C има следното уравнение

$$(2) \quad (z - c)(\bar{m} - \bar{n}) + (\bar{z} - \bar{c})(m - n) = 0.$$

От друга страна, уравнението на правата MN е следното

$$(3) \quad (\bar{m} - \bar{n})z - (m - n)\bar{z} - (\bar{m}n - m\bar{n}) = 0.$$

От (2) и (1) получаваме равенството

$$(4) \quad [a\omega - b\bar{\omega} - ab(\omega - \bar{\omega})\bar{z}]c^2 + (b\bar{\omega} - a\omega)(z - ab\bar{z})c + ab[(\omega - \bar{\omega})z + b\bar{\omega} - a\omega] = 0.$$

От (3) и (1) следва

$$(5) \quad [a - b + ab(\omega - \bar{\omega})\bar{z}]c^2 - [(b\bar{\omega} + a\omega)z + ab(a\omega - b\omega)\bar{z} - (a-b)(a\bar{\omega} + b\omega)]c + ab(\omega - \bar{\omega})z - ab(a-b) = 0.$$

Умножаваме (4) и (5) съответно с $a - b + ab(\omega - \bar{\omega})\bar{z}$ и $-[a\omega - b\bar{\omega} - ab(\omega - \bar{\omega})\bar{z}]$, след което събираме съответните резултати.

Така получаваме, че

$$\begin{aligned} c = 2ab & \left[3ab(3 - i\sqrt{3})z\bar{z} - 3(a + b\bar{\omega})z - 3ab(a + b\bar{\omega})\bar{z} + (3 + i\sqrt{3})(a-b)(a+b\omega) \right] / \\ & / \left[12ab\bar{\omega}(a+b\omega)z\bar{z} - (3 - i\sqrt{3})(a-b\bar{\omega})(a+b\omega)z - 6\bar{\omega}ab(a-b\bar{\omega})(a+b\omega)\bar{z} - \right. \\ & \left. - (3 + i\sqrt{3})(a-b)(a-b\bar{\omega})(a+b\omega) \right]. \end{aligned}$$

След заместване на c от последното равенство в (4) получаваме уравнението

$$\begin{aligned} & 12(3 - i\sqrt{3})a^2b^2z^2\bar{z}^2 - 6ab[5a + 4b - i\sqrt{3}(a + 2b)]z^2\bar{z} + \\ & + 3[2a^2 + 3ab + 2b^2 + i\sqrt{3}b(a-b)]z^2 - 6a^2b^2[5a + 4b - i\sqrt{3}(a + 2b)]z\bar{z}^2 + \\ & + ab[3(12a^2 + 5ab + 7b^2) - i\sqrt{3}(2a^2 + 5ab + 17b^2)]z\bar{z} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left[3(3a^3 + 2a^2b + b^3) + i\sqrt{3}(a^3 + 2a^2b - 4ab^2 - 5b^3)\right]z + \\
 & + 3a^2b^2\left[2a^2 + 3ab + b^2 - i\sqrt{3}b(a+b)\right]\bar{z}^2 - \\
 & - ab\left(3(3a^3 + 2a^2b + b^3) + i\sqrt{3}(a^3 + 2a^2b - 4ab^2 - 5b^3)\right)\bar{z} +
 \end{aligned}$$

Полученото уравнение показва, че търсеното геометрично място е крива от четвърта степен. Освен това лесно се проверява, че уравнението се удовлетворява при $z = a$ и $z = b$. Това означава, че точките A и B принадлежат на намерената крива. С това твърдение 2 е доказано.

Доказателство на твърдение 3. За медицентъра Z на $\triangle MNC$ са изпълнени равенствата $z = \frac{m+n+c}{3} = \frac{a\omega + b\bar{\omega} + 2c}{3}$ и $\bar{z} = \frac{ac\omega + bc\bar{\omega} + 2ab}{3abc}$. От първото равенство следва $c = \frac{3z - a\omega - b\bar{\omega}}{2}$. След заместване на c във второто равенство получаваме

$$9abz\bar{z} - 3(a\omega + b\bar{\omega})z - 3ab(a\omega + b\bar{\omega})\bar{z} - \bar{\omega}(a + b\omega)^2 = 0.$$

Последното уравнение показва, че търсеното геометрично място е окръжност. С това твърдение 3 е доказано.

Доказателство на твърдение 4. От условието за перпендикулярност за уравненията на височините през върховете M и N на $\triangle MNC$ имаме съответно $(z-m)(\bar{n}-\bar{c}) + (\bar{z}-\bar{m})(n-c) = 0$ и $(z-n)(\bar{m}-\bar{c}) + (\bar{z}-\bar{n})(m-c) = 0$.

От тези равенства и (1) получаваме

$$z = \frac{\omega(a+b\omega)(a-b\bar{\omega}-2c\omega)}{a+b\bar{\omega}}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{\omega}(a\bar{\omega}+b)(bc-ac\omega-2ab\bar{\omega})}{abc(a\omega+b)}.$$

От първото равенство следва $c = \frac{-(a+b\bar{\omega})z + \omega(a+b\omega)(a-b\bar{\omega})}{2(a+b\omega)\omega^2}$. След

заместване на тази стойност на c в другото равенство получаваме

$$2ab(b\omega - a\bar{\omega})z\bar{z} + (a^2 - b^2 + i\sqrt{3}ab)z + ab(a^2 - b^2 + i\sqrt{3}ab)\bar{z} - \omega(a-b\bar{\omega})(a+b\omega)^2 = 0.$$

Последното уравнение показва, че търсеното геометрично място е окръжност. С това твърдение 4 е доказано.

Доказателство на твърдение 5. От условието за перпендикулярност за уравненията на симетралите на отсечките CM и CN имаме съответно

$$(z-a)(\bar{m}-\bar{c}) + (\bar{z}-\bar{a})(m-c) = 0 \quad \text{и} \quad (z-b)(\bar{n}-\bar{c}) + (\bar{z}-\bar{b})(n-c) = 0.$$

От тези равенства и (1) получаваме

От тези равенства и (1) получаваме

$$z = \frac{(3-i\sqrt{3})[3ab+i\sqrt{3}c(a-b)]}{6(a-b\bar{\omega})}, \quad \bar{z} = \frac{\omega(a-b-i\sqrt{3}c)}{c(a-b\bar{\omega})}.$$

От първото равенство намираме $c = \frac{[a-i\sqrt{3}(a+b)]z+2i\sqrt{3}ab}{2(a-b)}$. След заместване във второто имаме

$$(3+i\sqrt{3})(a-b\bar{\omega})z\bar{z}-6z-6ab\bar{z}+(3-i\sqrt{3})(a+b\omega)=0.$$

Последното уравнение показва, че търсеното геометрично място е окръжност. Освен това лесно се проверява, че уравнението се удовлетворява при $z=a$ и $z=b$. Това означава, че точките A и B принадлежат на намерената окръжност. С това твърдение 5 е доказано.

Ако триъгълниците AMC и BNC са еднакво ориентирани, то са в сила равенствата:

$$(6) \quad m = a\bar{\omega} + c\omega, \quad n = b\bar{\omega} + c\omega, \quad \bar{m} = \frac{a\bar{\omega} + c\omega}{ac}, \quad \bar{n} = \frac{b\bar{\omega} + c\omega}{bc}.$$

Доказателство на твърдение 6. За средата на MN са изпълнени равенствата $z = \frac{a\bar{\omega} + b\bar{\omega} + 2c\omega}{2}$ и $\bar{z} = \frac{ac\omega + bc\omega + ab\bar{\omega}}{2abc}$. Първото от тези равенства води до $c = \frac{2p - (a+b)\bar{\omega}}{2\omega}$. След заместване на тази стойност на c във второто равенство получаваме уравнението

$$4abz\bar{z} - 2(a+b)\omega z - 2ab(a+b)\bar{\omega}\bar{z} + (a-b)^2 = 0.$$

Последното уравнение показва, че търсеното геометрично място е окръжност. С това твърдение 6 е доказано.

Доказателство на твърдение 7. Както при доказателството на твърдение 2 получаваме равенствата

$$\omega c^2 - (\omega z - ab\bar{\omega}\bar{z})c - ab\bar{\omega} = 0, \quad \bar{\omega}c^2 + (\omega z + ab\bar{\omega}\bar{z} - a - b)c + ab\omega = 0.$$

Умножаваме първото равенство $\bar{\omega}$, второто с $-\omega$ и събираме получените резултати. Така намираме $c = \frac{ab\bar{\omega}}{z + ab(1+\bar{\omega})\bar{z} - a - b}$. След заместване на c с получения израз в едно от горните равенства получаваме уравнението

$$(1 + \omega)z^2 + (1 + \bar{\omega})a^2b^2\bar{z}^2 + 4abz\bar{z} - \\ - (a + b)(2 + \omega)z - ab(a + b)(2 + \bar{\omega})\bar{z} + (a\omega - b\bar{\omega})(a\bar{\omega} - b\omega) = 0.$$

Полученото уравнение показва, че намереното геометрично място е крива от втора степен. Освен това лесно се проверява, че уравнението се удовлетворява при $z = a$ и $z = b$. Това означава, че точките A и B принадлежат на намерената крива. За по-подробно изследване на тази крива полагаме $a = 1$, $b = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z = x + iy$. След заместване в последното уравнение получаваме

$$(\sqrt{3} \sin \alpha + 3 \cos \alpha + 4)x^2 - 2(\sqrt{3} \cos \alpha - 3 \sin \alpha)xy - (\sqrt{3} \sin \alpha + 3 \cos \alpha - 4)y^2 - \\ - (\sqrt{3} \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 5)x + (\sqrt{3} \cos \alpha - 5 \sin \alpha + \sqrt{3})y + 1 + 2 \cos \alpha = 0.$$

Известно е, че видът на крива от втора степен с уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ зависи от инвариантите:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

За конкретната крива намираме $I_1 = 8$, $I_2 = 4$ и $I_3 = -4$. Тъй като $I_2 > 0$, $I_1 I_3 = -32 < 0$, от теорията на инвариантите следва, че получената крива е елипса. С това е доказано твърдение 7.

Доказателство на твърдение 8. За медицентъра на $\triangle MNC$ са изпълнени равенствата $z = \frac{(a+b)\bar{\omega} + c(2\omega+1)}{3}$ и $\bar{z} = \frac{c(a+b)\omega + ab(2\bar{\omega}+1)}{3abc}$. От

първото равенство следва $c = \frac{3z - a\omega - b\bar{\omega}}{2}$. След заместване на c във второто равенство получаваме

$$9abz\bar{z} - 3(a+b)\omega z - 3ab(a+b)\bar{\omega}\bar{z} + a^2 + b^2 - 5ab = 0.$$

Последното уравнение показва, че търсеното геометрично място е окръжност. С това твърдение 8 е доказано.

Доказателство на твърдение 9. Както в доказателството на твърдение 4 получаваме равенствата $z = \frac{a+b+c\omega}{\omega}$ и $\bar{z} = \frac{(a+b)c + ab\bar{\omega}}{abc\bar{\omega}}$. От първото

равенство следва $c = \frac{z\omega - a - b}{\omega}$. След заместване на тази стойност на c в другото равенство получаваме

$$ab\omega z\bar{z} + (a+b)\bar{\omega}z - ab(a+b)\bar{z} + \omega(a+b\omega)(a-b\bar{\omega}) = 0.$$

Последното уравнение показва, че търсеното геометрично място е окръжност. С това твърдение 9 е доказано.

Доказателство на твърдение 10. Както в доказателството на твърдение 5 получаваме равенствата $z = \frac{-\bar{\omega}c}{\omega}$ и $\bar{z} = \frac{-\omega}{\bar{\omega}c}$. Оттук непосредствено се вижда, че $z\bar{z} = 1$, което е уравнението на окръжността Γ . С това твърдение 10 е доказано.

4. Заключение. Анализът на получените резултати води до следните изводи.

1) Ако движещата се по правата MN точка е среда на отсечката MN , медицентър, ортоцентър или център на описаната за $\triangle MNC$ окръжност, описваното геометрично място е окръжност независимо от взаимната ориентация на равностранныите триъгълници.

2) Ако движещата се по правата MN точка е петата на перпендикуляра, спуснат от точката C към MN и равностранныите триъгълници са еднакво ориентирани, описваното геометрично място е крива от четвърта степен, минаваща през точките A и B .

3) Ако движещата се по правата MN точка е петата на перпендикуляра, спуснат от точката C към MN , и равностранныите триъгълници са еднакво ориентирани, описваното геометрично място е елипса, минаваща през точките A и B .

4) Ако движещата се по правата MN точка е петата на перпендикуляра, спуснат от точката C към MN , описваното геометрично място не може да е окръжност независимо от взаимната ориентация на равностранныите триъгълници.

REFERENCES/LITERATURA

- Gorskaya, K., D. Kopteva, D. Mikurov, E. Mudebaev, K. Mukhambetov, A. Temirkhanov, I. Hristova, R. Ivanova & L. Stefanova. (2016). Some trajectories determined by isosceles triangles. *Mathematics and informatics*, 6, 572 – 588. [Горская, К., Д. Коптева, Д. Микуров, Е. Мудебаев, К. Мухамбетов, А. Темирханов, Л. Стефанова, И. Христова, Р. Иванова. (2016). Некоторые траектории, которые оп-

- ределенные равнобедренными треугольниками, *Математика и информатика*, 6, 572 – 588, ISSN 1310-2230.]
- Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2016). First International net research project for students in the frames of MITE, *Mathematics and Infomatics*, 6, 567 – 571 (ISSN 1310-2230). [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова В. Ненков. (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках МИТЕ, *Математика и информатика*, 6, 567 – 571 (ISSN 1310-2230).]
- Shabanova, M., R. Atamuratova, M. Belorykova, V. Nenkov, M. Pavlova. (2016). The game “Geometry scrabble in cloud” an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in mathematics*, 45, 223 – 228, ISSN 1313-3330.
- Grozdev, S. V. Nenkov. (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology*, vol. VII (LXIX), No 1B. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122 – 125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247-8558).
- Grozdev, S. V. Nenkov. (2018). Sets of points, generated by a pair of isosceles triangles with a special location of their bases. *Mathematics and informatics*, 4, 378 – 395. [Гроздев, С. В. Ненков. (2018). Множества от точки, породени от двойки равнобедрени триъгълници със специално разположение на основите, *Математика и информатика*, 4, 378 – 395, ISSN 1310-2230.]
- Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radiansk school. [Балк, М., Г. Балк, А. Полухин. (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). About the orthocenter in the plane and the space. Sofia: Archimedes 2000. [Гроздев, С. В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). Three notable points on the median of a triangle. Sofia: Archimedes 2000. [Гроздев, С. В. Ненков. (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.]
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). Foundation of dynamic geometry. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

- Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska. *Geometry of Complex Numbers*. Sofia: Arhimed, 2015, ISBN 978-954-779-188-6.
- Karaibryamov, S., B. Tsareva & B. Zlatanov (2013). Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, Volume 7, Number 1, 22 – 51, ISSN 1933-2823.
- Zlatanov, B. (2013). Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point, *Annals. Computer Science Series*, 11, (1), 79 – 91.
- Zlatanov, B. (2014). An Etude on one Sharygin's Problem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3, (2), 50 – 61.

LOCI, GENERATED BY EQUILATERAL TRIANGLES WITH VERTICES LYING ON A CIRCLE

Abstract. The article is a scientific work of student under the supervision of Associate Professor Dr. Veselin Nenkov. The new results in it were awarded first prize at the International Competition “Methodology and Information Technology in Education” in 2019. The article refers to loci determined by notable points in a triangle, generated by equilateral triangles with vertices on a constant circle. The construction of the triangle is similar to the initial one from the First International “Network research project” with the participation of Bulgaria, Kazakhstan, and Russia. The main difference between those two constructions consists in the location of two pairs of vertices of the two equilateral triangles – in the initial problem they are on a constant line, but in the present one – on a circle. The loci are circles, ellipses, and curves of fourth order.

✉ **Mr. Borislav Borisov, Student**
Mr. Deyan Dimitrov, Student
Mr. Nikolay Ninov, Student
Mr. Teodor Hristov, Student
Mathematics High School – Lovech
1, Akad. Urumov St.
5500 Lovech, Bulgaria