

ФОРМУЛИ ЗА РАЗСТОЯНИЯТА ОТ БРОКАРИАНИТЕ И ТОЧКАТА НА МИКЕЛ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА ДО ВЪРХОВЕТЕ И ДО СРЕДИТЕ НА СТРАНИТЕ И ДИАГОНАЛИТЕ МУ

¹⁾ Веселин Ненков, ²⁾ Станислав Стефанов, Хаим Хаимов

¹⁾ Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“ – Варна

²⁾ Технически университет – София

Резюме. В настоящата публикация се извеждат формули за разстоянията от три забележителни точки в четириъгълника до върховете, средите на страните и диагоналите му. Те се прилагат за доказателството на редица неравенства, свързващи дължините на страните и диагоналите на произволен четириъгълник, за установяване колинеарността на тези забележителни точки с други точки в определени видове четириъгълници и за откриването на едно интересно свойство на центъра на тежестта на вписан в окръжност четириъгълник.

Ключови думи: четириъгълник; забележителни точки; неравенства; медицентър; Ойлерова окръжност

Брокарианите на четириъгълника и точката му на Микел са сходни помежду си забележителни точки, които се характеризират с много и разнообразни свойства (Haimov, 2001), (Haimov, 2005). Сходството помежду им, както ще видим, се потвърждава и от съществуването на идентични формули за разстоянията от тях до върховете на четириъгълника и до средите на страните и диагоналите му. При това тези формули се извеждат по един и същи начин както за брокарианите, така и за точката на Микел. Той се основава на подобие на триъгълници, свързани с тези точки със определени триъгълници с върхове измежду средите на страните и диагоналите на четириъгълника. Изведените формули ще използваме за получаването на редица неравенства, свързващи дължините на страните и диагоналите на произволен четириъгълник, за установяването колинеарността на брокарианите и точката на Микел с други точки в някои видове четириъгълници и за доказателството на едно свойство на центъра на тежестта на вписан в окръжност четириъгълник.

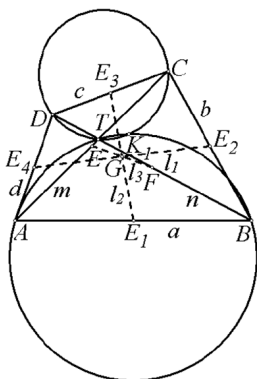
1. Разстояния, свързани с брокарианите на четириъгълник. Най-напред ще припомним определението на брокарианите в четириъгълник, дадено в (Наймов, 2001).

Определение. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и пресечната точка на диагоналите му е T . Втората обща точка K_1 на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжности се нарича брокариана, съответна на страните AB и CD (фиг. 1).

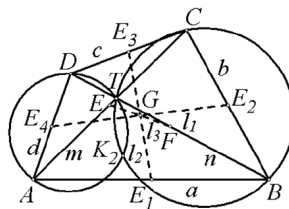
Аналогично се дефинира и брокарианата K_2 , съответна на страните AD и BC (фиг. 2). От (Наймов, 2001) е известно следното

Свойство 1. Изпълнени са следните подобия на триъгълници: $\Delta AK_1B \sim \Delta CK_1D$ и $\Delta AK_1C \sim \Delta BK_1D$ (фиг. 1).

Както ще видим, триъгълниците, участващи в свойство 1, са подобни още и с определени триъгълници, върховете на които са измежду средите на страните и диагоналите на четириъгълника. Да се условим средите на страните AB , BC , CD и DA на четириъгълника $ABCD$ да бележим съответно с E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , а средите на диагоналите му AC и BD – съответно с E и F (фиг. 1, 2). Добре известно е, а и лесно се доказва, че трите отсечки E_1E_3 , E_4E_2 и EF , които ще наричаме *средни отсечки на четириъгълника*, се пресичат в една точка G , която ги разполювава (фиг. 1, 2). Тя се нарича *център на тежестта (медицентър)* на четириъгълника. Да се условим още дължините на страните AB , BC , CD и DA на разглеждания четириъгълник да бележим съответно с a , b , c и d , дължините на диагоналите AC и BD – съответно с m и n , и дължините на отсечките E_4E_2 , E_1E_3 и EF – съответно с l_1 , l_2 и l_3 (фиг. 1, 2). Освен това ще предполагаме, че разглежданият четириъгълник $ABCD$ няма двойка успоредни страни.



Фигура 1



Фигура 2

В началото ще докажем следното

Свойство 2. Изпълнено е следното подобие на триъгълници: $\triangle ABK_1 \sim \triangle E_4E_2E_3$ (фиг. 1).

Доказателство. Брокарианата K_1 лежи на описаната около $\triangle ABT$ окръжност (по определение). Затова $\sphericalangle AK_1B = \sphericalangle ATB$ (вписани ъгли). От друга страна, понеже $E_4E_3 \parallel AC$ и $E_2E_3 \parallel BD$ (средни отсечки), имаме $\sphericalangle E_4E_3E_2 = \sphericalangle ATB$. Сравнявайки последните две равенства, получаваме $\sphericalangle AK_1B = \sphericalangle E_4E_3E_2$. Същевременно от свойство 1 имаме $\triangle AK_1C \sim \triangle BK_1D$, откъдето $\frac{AK_1}{BK_1} = \frac{AC}{BD}$. Тъй като $E_4E_3 = \frac{1}{2}AC$ и $E_2E_3 = \frac{1}{2}BD$, то $\frac{E_4E_3}{E_2E_3} = \frac{AC}{BD}$.

Като сравним последните две равенства, получаваме $\frac{AK_1}{BK_1} = \frac{E_4E_3}{E_2E_3}$. От това равенство и установеното по-рано $\sphericalangle AK_1B = \sphericalangle E_4E_3E_2$ заключаваме, че $\triangle ABK_1 \sim \triangle E_4E_2E_3$. Така доказахме желаното подобие.

С помощта на свойство 2 се получават прости формули за разстоянията от брокарианите до върховете на четириъгълника.

Свойство 3. За разстоянията от върховете на $ABCD$ до брокарианите K_1 и K_2 са изпълнени следните равенства:

$$(1) \quad \begin{aligned} AK_1 &= \frac{am}{2l_1}, BK_1 = \frac{an}{2l_1}, CK_1 = \frac{cm}{2l_1}, DK_1 = \frac{cn}{2l_1}, \\ AK_2 &= \frac{dm}{2l_2}, BK_2 = \frac{bn}{2l_2}, CK_2 = \frac{bm}{2l_2}, DK_2 = \frac{dn}{2l_2}. \end{aligned}$$

Доказателство. От свойство 2 имаме $\triangle ABK_1 \sim \triangle E_4E_2E_3$ (фиг. 1). Затова $\frac{AK_1}{E_4E_3} = \frac{AB}{E_4E_2}$, т.е. $AK_1 = \frac{AB \cdot E_4E_3}{E_4E_2}$. Като вземем предвид, че $AB = a$, $E_4E_3 = \frac{m}{2}$ и $E_4E_2 = l_1$, получаваме $AK_1 = \frac{am}{2l_1}$, което е първото от равенствата (1). Останалите равенства се доказват аналогично.

С помощта на свойство 2 се получават и формули за разстоянията от брокарианите K_1 и K_2 до средите на страните на четириъгълника $ABCD$.

Свойство 4. За разстоянията от брокарианите K_1 и K_2 до средите на страните на $ABCD$ са изпълнени следните равенства:

$$(2) \quad K_1E_1 = \frac{al_2}{2l_1}, K_1E_3 = \frac{cl_2}{2l_1}, K_2E_4 = \frac{dl_1}{2l_2}, K_2E_2 = \frac{bl_1}{2l_2}.$$

Доказателство. От свойство 2 следва, че триъгълниците ABK_1 и $E_4E_2E_3$ са подобни (фиг. 1). В тях K_1E_1 и E_3G са медиани към съответните страни AB и E_4E_2 . Затова $\frac{K_1E_1}{AB} = \frac{E_3G}{E_4E_2}$, т.е. $K_1E_1 = \frac{AB \cdot E_3G}{E_4E_2}$. Като вземем предвид, че $AB = a$, $E_3G = \frac{1}{2}E_1E_3 = \frac{l_2}{2}$ и $E_4E_2 = l_1$, получаваме $K_1E_1 = \frac{al_2}{2l_1}$, което е първото от равенствата (2). Останалите равенства се доказват аналогично.

Ще използваме още едно подобие на триъгълници, свързани с брокарианите. За доказателството му ще ни послужи следното свойство, доказано в (Наймов, 2005).

Свойство 5. Брокарианите K_1 и K_2 лежат на една окръжност (c) със средите E и F и пресечната точка T на диагоналите AC и BD , като са изпълнени равенствата

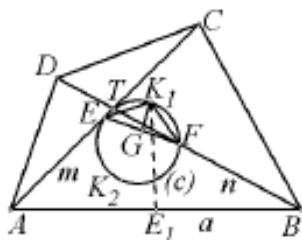
$$\frac{K_1E}{K_1F} = \frac{K_2E}{K_2F} = \frac{AC}{BD}.$$

Окръжността (c) наричаме Брокарова окръжност на четириъгълника (фиг. 3). Изпълнено е следното:

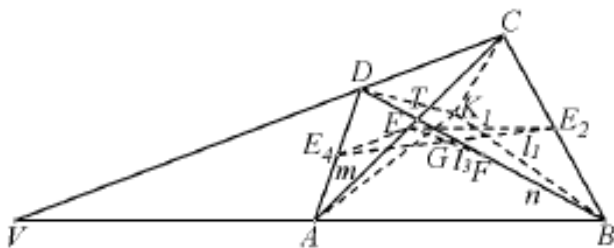
Свойство 6. Изпълнено е следното подобие на триъгълници: $\triangle EFK_1 \sim \triangle ABK_1$ (фиг. 3).

Доказателство. От свойство 5 имаме $\frac{K_1E}{K_1F} = \frac{AC}{BD}$. Като използваме формулите (1), получаваме $\frac{AK_1}{BK_1} = \frac{am}{2l_1} \cdot \frac{2l_1}{an} = \frac{m}{n} = \frac{AC}{BD}$. Сравнявайки последните две равенства, получаваме $\frac{K_1E}{K_1F} = \frac{AK_1}{BK_1}$. От друга страна,

на, $\sphericalangle AK_1B = \sphericalangle ATB$ (понеже брокарианата K_1 лежи на описаната около $\triangle ATB$ окръжност), т.е. $\sphericalangle AK_1B = \sphericalangle ATB = \sphericalangle ETF$. Същевременно $\sphericalangle EK_1F = \sphericalangle ETF$ (вписани ъгли). Сравнявайки последните две равенства, получаваме $\sphericalangle AK_1B = \sphericalangle EK_1F$. Като вземем предвид и доказаната пропорция, се убеждаваме, че $\triangle EFK_1 \sim \triangle ABK_1$.



Фигура 3



Фигура 4

С помощта на доказаното свойство се получават прости формули за разстоянията от брокарианите K_1 и K_2 до центъра на тежестта G на четириъгълника $ABCD$.

Свойство 7. Изпълнени са равенствата:

$$(3) \quad K_1G = \frac{l_2l_3}{2l_1}, \quad K_2G = \frac{l_1l_3}{2l_2}.$$

Доказателство. Според свойство 6 триъгълниците EFK_1 и ABK_1 са подобни (фиг. 3). В тях K_1G и K_1E_1 са медиани към съответните страни

EF и AB , затова $\frac{K_1G}{K_1E_1} = \frac{EF}{AB}$, т.е. $K_1G = \frac{K_1E_1 \cdot EF}{AB}$. Като вземем предвид, че $K_1E_1 = \frac{al_2}{2l_1}$, $EF = l_3$ и $AB = a$, получаваме $K_1G = \frac{al_2}{2l_1} \cdot \frac{l_3}{a} = \frac{l_2l_3}{2l_1}$.

$K_1G = \frac{al_2}{2l_1} \cdot \frac{l_3}{a} = \frac{l_2l_3}{2l_1}$. С това е доказано първото от равенствата (3). Аналогично се доказва и другото равенство.

Сега ще докажем подобия на триъгълници, свързани с брокарианите, с определени триъгълници с върхове измежду средите на страните и диагоналите на четириъгълника, от които следват формули за разстоянията на брокарианите до средите на диагоналите.

Свойство 8. Изпълнено е следното подобие на триъгълници: $\triangle ACK_1 \sim \triangle E_2E_4E$ (фиг. 4).

Доказателство. Означаваме пресечната точка на продълженията на страните BA и CD с V (фиг. 4). От свойство 1 имаме $\triangle ABK_1 \sim \triangle CDK_1$. Оттук $\sphericalangle K_1AB = \sphericalangle K_1CD$, т.е. $\sphericalangle K_1AB = \sphericalangle K_1CV$. Тогава четириъгълникът $AVCK_1$ е вписан в окръжност, затова $\sphericalangle AK_1C = 180^\circ - \sphericalangle AVC$. От друга страна, $E_4E \parallel DC$ и $EE_2 \parallel AB$ (средни отсечки), откъдето следва, че

$\sphericalangle E_4EE_2 = 180^\circ - \sphericalangle AVC$. Сравнявайки последните две равенства, получаваме $\sphericalangle AK_1C = \sphericalangle E_4EE_2$. Същевременно от подобие $\triangle ABK_1 \sim \triangle CDK_1$ (по свойство 1) имаме още $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{AB}{CD}$. Като вземем предвид, че $EE_2 = \frac{1}{2}AB$ и $E_4E = \frac{1}{2}CD$, получаваме $\frac{EE_2}{E_4E} = \frac{AB}{CD}$. Сравнявайки последните две равенства, получаваме $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{EE_2}{E_4E}$. Сега от полученото по-горе равенство

$\sphericalangle AK_1C = \sphericalangle E_4EE_2$ следва, че $\triangle ACK_1 \sim \triangle E_2E_4E$.

Свойство 9. Разстоянията от брокарианите до средите E и F на диагоналите AC и BD се определят по формулите:

$$(4) \quad K_1E = \frac{ml_3}{2l_1}, \quad K_1F = \frac{nl_3}{2l_1}, \quad K_2E = \frac{ml_3}{2l_2}, \quad K_2F = \frac{nl_3}{2l_2}.$$

Доказателство. Според свойство 8 триъгълниците ACK_1 и E_2E_4E са подобни (фиг. 4). В тях K_1E и EG са медиани към съответните страни AC

и E_4E_2 . Затова $\frac{K_1E}{AC} = \frac{EG}{E_4E_2}$. Като вземем предвид, че $AC = m$, $EG = \frac{l_3}{2}$

и $E_4E_2 = l_1$, получаваме $K_1E = \frac{AC \cdot EG}{E_4E_2} = \frac{ml_3}{2l_1}$, което съвпада с първото от равенствата (4). Останалите равенства (4) се доказват аналогично.

С помощта на доказаните равенства (4) се получава формула за разстоянието между самите брокариани K_1 и K_2 .

Свойство 10. Разстоянието между брокарианите K_1 и K_2 се пресмята по формулата:

$$(5) \quad K_1K_2 = \frac{mnl_3}{2l_1l_2}.$$

Доказателство. Точките K_1 и K_2 според свойство 5 лежат на една окръжност (c) с точките E и F (фиг. 3). От теоремата на Птолемея за вписания четириъгълник EK_2FK_1 имаме $K_1K_2 \cdot EF = K_1E \cdot K_2F + K_1F \cdot K_2E$. Като заместим с равенствата (4), получаваме формулата (5).

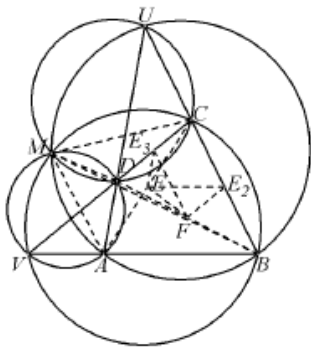
2. Разстояния, свързани с точката на Микел на четириъгълник. Сега ще разгледаме формули, аналогични на горните, но за разстоянията от точката на Микел до върховете на четириъгълника и до средите на страните му.

Нека $ABCD$ е четириъгълник, в който продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка U , а продълженията на страните AB и DC – в точка V . Доказва се, че описаните окръжности около триъгълниците ABU , CDU , ADV и BVC се пресичат в една точка M (фиг. 5). Тя се нарича *точка на Микел на четириъгълника $ABCD$* . В (Nenkov, Stefanov & Naimov, 2017) е доказано следното свойство на точката на Микел.

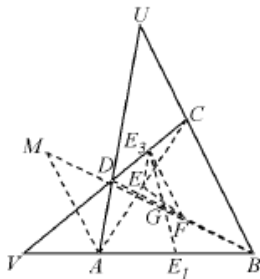
Свойство 11. Изпълнени са следните подобия на триъгълници: $\triangle ABM \sim \triangle CDM$ и $\triangle ADM \sim \triangle BCM$ (фиг. 6).

Както ще видим, триъгълниците, участващи в тези подобия, са подобни още с определени триъгълници с върхове измежду средите на страните и диагоналите на четириъгълника.

Свойство 12. Изпълнени са следните подобия на триъгълници: $\triangle ABM \sim \triangle EFE_3$ и $\triangle ADM \sim \triangle EFE_2$ (фиг. 5).



Фигура 5



Фигура 6

Доказателство. От свойство 11 имаме $\triangle ADM \sim \triangle BCM$. Оттук следва, че $\frac{AM}{BM} = \frac{AD}{BC}$ (фиг. 5). Същевременно $EE_3 = \frac{1}{2}AD$ и $FE_3 = \frac{1}{2}BC$ (средни отсечки), затова $\frac{EE_3}{FE_3} = \frac{AD}{BC}$. От последните две равенства получаваме $\frac{AM}{BM} = \frac{EE_3}{FE_3}$. От друга страна, точката на Микел M за четириъгълника $ABCD$ лежи върху описаната около $\triangle ABU$ окръжност (по определе-

ние), откъдето имаме $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AUB$. Същевременно $EE_3 \parallel AD$ и $FE_3 \parallel BC$, затова $\sphericalangle EE_3F = \sphericalangle AUB$. От последните две равенства получаваме $\sphericalangle AMB = \sphericalangle EE_3F$. Оттук и от полученото по-горе равенство $\frac{AM}{BM} = \frac{EE_3}{FE_3}$ следва, че $\triangle ABM \sim \triangle EFE_3$. Така доказахме първото от желаните подобия. Аналогично се доказва $\triangle ADM \sim \triangle EFE_2$.

С помощта на доказаните подобия се получават формули за разстоянията от точката на Микел M до върховете на четириъгълника.

Свойство 13. *За разстоянията от точката на Микел M до върховете на $ABCD$ са изпълнени следните равенства:*

$$(6) \quad MA = \frac{ad}{2l_3}, \quad MB = \frac{ab}{2l_3}, \quad MC = \frac{bc}{2l_3}, \quad MD = \frac{cd}{2l_3}.$$

Доказателство. От свойство 12 следва, че триъгълниците ADM и EFE_2 са подобни (фиг. 5). Следователно $\frac{MA}{AD} = \frac{EE_2}{EF}$. Оттук получаваме $MA = \frac{AD \cdot EE_2}{EF} = \frac{da}{2l_3}$, с което е доказано първото от равенствата (6). Останалите се доказват аналогично.

С помощта на свойство 12 се получават формули и за разстоянията от точката на Микел M до средите на страните на четириъгълника.

Свойство 14. *За разстоянията от точката на Микел до средите на страните на $ABCD$ са изпълнени следните равенства:*

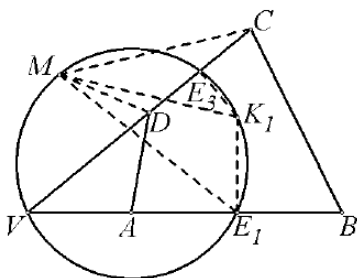
$$(7) \quad ME_1 = \frac{al_2}{2l_3}, \quad ME_2 = \frac{bl_1}{2l_3}, \quad ME_3 = \frac{cl_2}{2l_3}, \quad ME_4 = \frac{dl_1}{2l_3}.$$

Доказателство. От свойство 12 следва, че триъгълниците ABM и EFE_3 са подобни (фиг. 6). В тях ME и E_3G са медиани към съответните страни AB и EF . Следователно $\frac{ME_1}{AB} = \frac{E_3G}{EF}$. Оттук получаваме $ME_1 = \frac{AB \cdot E_3G}{EF} = \frac{al_2}{2l_3}$, с което е доказано първото от равенствата (7). Останалите равенства (7) се доказват аналогично.

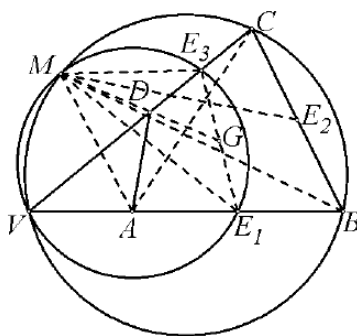
Сега ще изведем формули за разстоянията от точката на Микел M до центъра на тежестта G и до брокарианите K_1 и K_2 на четириъгълника $ABCD$. Ще ни бъде нужно следващото твърдение, доказано в (Stefanov, 2017).

Свойство 15. *Ако продълженията на страните AB и DC на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точка V , то брокарианата K_1 и точката на Микел M лежат на една окръжност със средите E_1 и E_3 на страните AB и DC и точката V (фиг. 7).*

Тази окръжност се нарича Брокарова окръжност, съответна на страните AB и CD . С помощта на това твърдение се получава следната формула за разстоянието от точката на Микел M до брокарианата K_1 .



Фигура 7



Фигура 8

Свойство 16. За разстоянието между точката на Микел M и брокарианата K_1 е изпълнена формулата:

$$(8) \quad MK_1 = \frac{acl_2}{2l_1l_3}.$$

Доказателство. Тъй като според свойство 15 точките E_1 , K_1 , E_3 и M лежат на една окръжност (Брокаровата окръжност), съответна на страните AB и CD , то от теорема на Птоломей за четириъгълника $E_1K_1E_3M$ имаме $MK_1 \cdot E_1E_3 = K_1E_1 \cdot ME_3 + K_1E_3 \cdot ME_1$ (фиг. 7). Сега след заместване с равенствата (2) и (7) получаваме (8).

Забележка 1. Аналогично се доказва равенството:

$$(9) \quad MK_2 = \frac{bdl_1}{2l_2l_3}.$$

Свойство 17. За разстоянието между точката на Микел M и центъра на тежестта на четириъгълника $ABCD$ е изпълнена формулата:

$$(10) \quad MG = \frac{l_1l_2}{2l_3}.$$

Доказателство. Ще докажем, че $\triangle E_1E_3M \sim \triangle BCM$ (фиг. 8). От свойство 11 имаме $\triangle ABM \sim \triangle DCM$. В тези триъгълници ME_1 и ME_3 са съответни медиани MB и MC – съответни страни. Следователно $\frac{ME_1}{ME_3} = \frac{BM}{CM}$. От друга страна,

точката M лежи на описаната около $\triangle BVC$ окръжност (по определение), затова $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BVC$. Същевременно точките E_1 , E_3 , M и V лежат на Брокеровата окръжност на $ABCD$, съответна на страните AB и CD (по свойство 15). Следователно $\sphericalangle E_1ME_3 = \sphericalangle E_1VE_3 = \sphericalangle BVC$. От последните

две равенства получаваме $\sphericalangle E_1ME_3 = \sphericalangle BMC$. Оттук и получената по-ра-

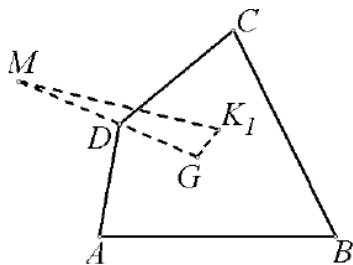
но пропорция $\frac{ME_1}{ME_3} = \frac{BM}{CM}$ следва, че $\triangle E_1E_3M \sim \triangle BCM$. В тези триъгъл-

ници MG и ME_2 са медиани към съответните страни E_1E_3 и BC . Зато-

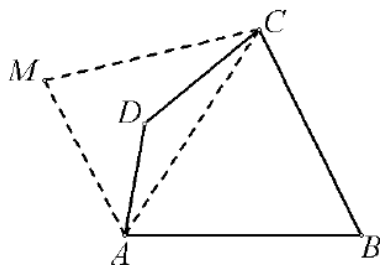
ва $\frac{MG}{E_1E_3} = \frac{ME_2}{BC}$. Като използваме (7), получаваме $MG = \frac{ME_2 \cdot E_1E_3}{BC} = \frac{l_1 l_2}{2l_3}$.

С това равенството (10) е доказано.

3. Някои неравенства в четириъгълника. С помощта на изведените формули (1) – (10) ще получим редица неравенства в произволен четириъгълник $ABCD$, свързващи дължините на страните и диагоналите му.



Фигура 9



Фигура 10

Свойство 18. Страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са свързани с неравенството:

$$(11) \quad m^2 + n^2 \leq b^2 + d^2 + 2ac.$$

Доказателство. Към тройката точки M , K_1 и G прилагаме неравенството

на триъгълника и получаваме $MG \leq MK_1 + K_1G$ (фиг. 9). От равенствата (10) и

(8) следва $\frac{l_1 l_2}{2l_3} \leq \frac{acl_2}{2l_1 l_3} + \frac{l_2 l_3}{2l_1}$ или $l_1^2 \leq ac + l_3^2$. Като вземем предвид формулата

на Ойлер за разстоянието между средите на диагоналите на четириъгълник имаме $l_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2)$ и $l_1^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + m^2 + n^2 - b^2 - d^2)$.

След заместване на тези равенства в последното неравенство получаваме (11).

Забележка 2. Лесно се доказва, че в (11) равенство имаме само за четириъгълник, в който $AB \parallel CD$.

Свойство 19. Страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са свързани с неравенствата:

$$(12) \quad m^2 + n^2 + \frac{(ad - bc)^2}{m^2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < m^2 + n^2 + \frac{(ad + bc)^2}{m^2}.$$

Доказателство. Към триъгълната точки A , C и M прилагаме неравенството на триъгълника и вземаме предвид факта, че M не може да лежи на диагонала AC (следва от определението на точката M). Така получаваме

$$|AM - CM| \leq AC < AM + CM \quad (\text{фиг. 10}). \text{ След заместване на равенствата (6)}$$

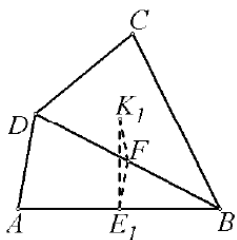
$$\text{имаме } \left| \frac{ad}{2l_3} - \frac{bc}{2l_3} \right| \leq m < \frac{ad}{2l_3} + \frac{bc}{2l_3} \text{ или } \frac{|ad - bc|}{m} \leq 2l_3 < \frac{ad + bc}{m}.$$

Сега от равенството $l_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2)$, което беше отбелязано по-горе, получаваме неравенството (12).

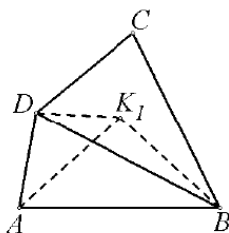
Забележка 3. Лявото от неравенства (12) представлява усилване на известното неравенство в четириъгълника $m^2 + n^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Забележка 4. Равенството в (12) се достига при условие, че $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ (виж Наймов, 2007).

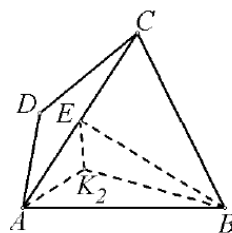
Забележка 5. Неравенства (12) остават в сила и ако в тях се извърши коя да е от замените: $m \leftrightarrow n$ и $a \leftrightarrow c$; $a \leftrightarrow m$ и $c \leftrightarrow n$; $d \leftrightarrow n$ и $b \leftrightarrow m$. Доказателствата на получените при тези замени неравенства се получават, като приложим неравенството на триъгълника съответно към тройките точки B, D и M ; A, B и K_2 ; B, C и K_1 .



Фигура 11



Фигура 12



Фигура 13

Свойство 20. Страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са свързани с неравенствата:

$$(13) \quad \begin{aligned} & \left| a\sqrt{m^2 + n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2} - d\sqrt{m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2} \right| \leq \\ & \leq n\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2} \leq \\ & \leq a\sqrt{m^2 + n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2} + d\sqrt{m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2}. \end{aligned}$$

Доказателство. Към триъгълника точки K_1 , E_1 и F прилагаме неравенството на триъгълника и получаваме $|K_1E_1 - FE_1| \leq K_1F \leq K_1E_1 + FE_1$

(фиг. 11). От равенствата (2) и (4) следва $\left| \frac{al_2}{2l_1} - \frac{d}{2} \right| \leq \frac{nl_3}{2l_1} \leq \frac{al_2}{2l_1} + \frac{d}{2}$ или

$|al_2 - dl_1| \leq nl_3 \leq al_2 + dl_1$. Като заместим с равенствата $l_1^2 = \frac{1}{4}(m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$, $l_2^2 = \frac{1}{4}(m^2 + n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2)$ и $l_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2)$, получаваме неравенствата (13).

Забележка 6. Неравенства (13) остават в сила и ако в тях се извърши една от замените: $m \leftrightarrow n$ и $b \leftrightarrow d$; $c \leftrightarrow a$ и $b \leftrightarrow d$; $m \leftrightarrow n$ и $a \leftrightarrow c$; $a \leftrightarrow b$ и $c \leftrightarrow d$. Доказателствата на получените по този начин неравенства се извършват, като неравенството на триъгълника се приложи съответно към тройките точки K_1 , E_1 и D ; K_1 , A и E_3 ; K_1 , B и E_3 ; A , K_2 и E_2 .

По подобен начин се доказват и неравенствата:

$$\begin{aligned} & \left| ac(m^2 + n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2) - bd(m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2) \right| \leq \\ & \leq mn(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2) \leq \\ & \leq ac(m^2 + n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2) + bd(m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2). \\ & \left| b\sqrt{m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2} - \sqrt{(2a^2 + 2m^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2)} \right| \leq \\ & \leq 2ad \leq \\ & \leq b\sqrt{m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2} + \sqrt{(2a^2 + 2m^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

$$\left| a^2 + \frac{\left(2cm - a\sqrt{b^2 + d^2 + m^2 + n^2 - a^2 - c^2} \right)^2}{a^2 + c^2 + m^2 + n^2 - b^2 - d^2} \right| \leq$$

$$\leq 2m^2 + 2b^2 \leq$$

$$\leq a^2 + \frac{\left(2cm + \sqrt{b^2 + d^2 + m^2 + n^2 - a^2 - c^2} \right)^2}{a^2 + c^2 + m^2 + n^2 - b^2 - d^2}.$$

Ще докажем още две неравенства в произволен четириъгълник, които се получават с помощта на неравенството на инерционния момент.

Свойство 21. *Страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са свързани с неравенството:*

$$(14) \quad a^2 + c^2 + m^2 + n^2 \leq b^2 + d^2 + \frac{3(a^2m^2 + a^2n^2 + n^2c^2)}{a^2 + d^2 + n^2}.$$

Доказателство. Прилагаме неравенството на инерционния момент към точката K_1 в $\triangle ABD$ и получаваме $AK_1^2 + BK_1^2 + DK_1^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + AD^2 + BD^2)$

(фиг. 12). След заместване с помощта на равенствата (1) получаваме:

$\frac{a^2m^2}{4l_1^2} + \frac{a^2n^2}{4l_1^2} + \frac{c^2n^2}{4l_1^2} \geq \frac{1}{3}(a^2 + d^2 + n^2)$. Оттук, като вземем предвид равенството, което свързва l_1 със страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$, получаваме (14).

Свойство 22. *Страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са свързани с неравенството:*

$$(15) \quad m^2 + n^2 + b^2 + d^2 \leq a^2 + c^2 + \frac{15d^2m^2 + 12b^2n^2 + 3m^2(a^2 + b^2 + c^2 - m^2 - n^2)}{6a^2 + 2b^2}.$$

Доказателство. Прилагаме неравенството на инерционния момент към точката K_2 в $\triangle AEB$ и получаваме $AK_2^2 + BK_2^2 + EK_2^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + AE^2 + BE^2)$

(фиг. 13). От равенствата (1), (4) и $BE = -\sqrt{2a^2 + 2b^2 - m^2}$ (като медиана

в $\triangle ABC$) следва $3\left(\frac{d^2m^2}{4l_2^2} + \frac{b^2n^2}{4l_2^2} + \frac{m^2l_3^2}{4l_2^2}\right) \geq a^2 + \frac{m^2}{4} + \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - m^2)$.

Оттук, като вземем предвид равенствата, които свързват l_2 и l_3 със страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$, получаваме (15).

По аналогичен начин се доказват и неравенствата:

$$3(d^2m^2 + b^2n^2)(m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2) + 3m^2n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2) \geq a^2(m^2 + n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2)(2m^2 + 2n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2),$$

$$12(l_1^4 + l_1^2l_2^2 + l_2^4) \geq m^2(6n^2 + 2m^2),$$

$$3(l_2^4l_3^4 + l_3^4l_1^4 + l_1^4l_2^4) \geq m^2n^2l_3^4 + a^2c^2l_2^4 + b^2d^2l_1^4$$

$$3(a^2l_2^2 + c^2l_2^2 + n^2l_3^2) \geq l_1^2(4l_2^2 + b^2 + d^2).$$

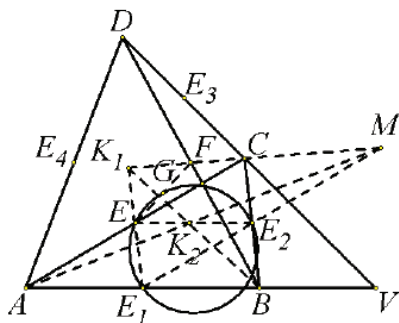
4. Колинеарни точки в някои специални четириъгълници. С помощта на формулите (1) – (10) се установява лесно и колинеарността на точки в четириъгълници с определени свойства.

Свойство 23. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, центърът на тежестта G на който лежи върху Ойлеровата окръжност на $\triangle ABC$. Следните шест тройки точки са колинеарни: (K_1, K_2, B) , (K_1, E, E_1) , (E, K_2, E_2) , (K_1, C, M) , (A, K_2, M) , (E_1, E_2, M) (фиг. 14).

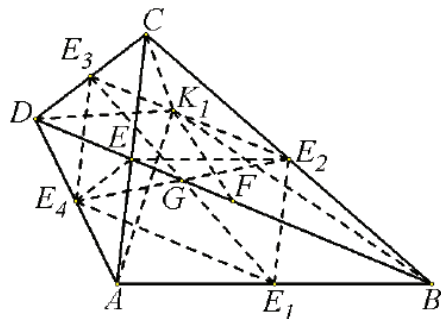
Доказателство. Първо ще докажем, че в разглеждания четириъгълник $ABCD$ е изпълнена зависимостта:

$$(16) \quad al_2 = ml_3 + bl_1.$$

Центърът на тежестта G на четириъгълника $ABCD$ по условие лежи на Ойлеровата окръжност на $\triangle ABC$ (фиг. 14). Последната е определена от точките E_1 , E_2 и E . От теоремата на Птоломей за четириъгълника EGE_2E_1 имаме: $E_1G \cdot EE_2 = E_1E_2 \cdot EG + EE_1 \cdot GE_2$. Тъй като $E_1G = \frac{l_2}{2}$, $EE_2 = \frac{a}{2}$, $E_1E_2 = \frac{m}{2}$, $EG = \frac{l_3}{2}$, $EE_1 = \frac{b}{2}$ и $GE_2 = \frac{l_1}{2}$, последното равенство преминава в (16).



Фигура 14



Фигура 15

За да докажем, че точките K_1 , K_2 и B лежат на една права, е достатъчно да докажем, че $K_1K_2 + K_2B = K_1B$. От (5) и (1) имаме $K_1K_2 = \frac{mnl_3}{2l_1l_2}$, $K_2B = \frac{bn}{2l_2}$ и $K_1B = \frac{an}{2l_1}$. Затова последното равенство е равносилно с $\frac{mnl_3}{2l_1l_2} + \frac{bn}{2l_2} = \frac{an}{2l_1}$. Оттук получаваме (16). Така доказахме колинеарността на точките K_1 , K_2 и B .

Аналогично колинеарността на точките K_1 , E и E_1 се свежда до равенството $K_1E + EE_1 = K_1E_1$, което отново води до равенство (16).

Аналогично се доказва колинеарността и на останалите тройки точки.

Свойство 24. Ако в четириъгълника $ABCD$ диагональт BD разполовява диагонала AC и $l_1^2 = nl_3$, точките E_3 , K_1 и E_2 са колинеарни.

Доказателство. От свойства 1 и 8 имаме съответно $\Delta AK_1C \sim \Delta BK_1D$ и $\Delta ACK_1 \sim \Delta E_2E_4E$ (фиг. 15). Следователно $\Delta BK_1D \sim \Delta E_2EE_4$. Понеже K_1F и EG са съответни медиани в тези триъгълници, а K_1D и EE_4 – съответни страни, то $\Delta DFK_1 \sim \Delta E_4GE$, откъдето

$$(*) \quad \sphericalangle DFK_1 = \sphericalangle E_4GE.$$

Средата E на диагонала AC лежи на диагонала BD (по условие) и G е средата на отсечката EF . Тъй като F е средата на диагонала BD , то и G лежи на BD . От друга страна, $E_1E_4 \parallel BD$ (средна отсечка) и затова $E_1E_4 \parallel GE$. Оттук $\sphericalangle E_4GE = \sphericalangle GE_4E_1$. От последното равенство и $(*)$ следва $\sphericalangle DFK_1 = \sphericalangle E_4GE = \sphericalangle GE_4E_1$, т.е.

$$(**) \quad \sphericalangle DFK_1 = \sphericalangle GE_4E_1.$$

Доказателство. Означаваме пресечната точка на правите TK_1 и AD с P (фиг. 16). За да докажем, че точките K_1 , T и E_4 са колинеарни, е достатъчно да докажем, че $P \equiv E_4$. Първо ще докажем, че $\Delta AK_1D \sim \Delta BK_1A$.

С помощта на формули (1) получаваме $\frac{DK_1}{AK_1} = \frac{nc}{2l_1} \cdot \frac{2l_1}{ma} = \frac{nc}{ma}$. Но по условие $\frac{c}{a} = \frac{m^2}{n^2}$, затова $\frac{DK_1}{AK_1} = \frac{m}{n}$. Същевременно с помощта на (1) по-

лучаваме $\frac{AK_1}{BK_1} = \frac{ma}{l_1} \cdot \frac{2l_1}{na} = \frac{m}{n}$. Като сравним десните части на полу-

чените равенства, установяваме пропорцията $\frac{DK_1}{AK_1} = \frac{AK_1}{BK_1}$. От друга

страна, K_1 е втората обща точка на описаните окръжности c_1 и c_2 съответно за ΔABT и ΔCDT (по дефиниция), затова четириъгълниците AK_1TB и DK_1TC са вписани. Оттук имаме $\sphericalangle AK_1P = \sphericalangle ABT$ и $\sphericalangle DK_1P = \sphericalangle DCT$. Тогава $\sphericalangle AK_1D = \sphericalangle AK_1P + \sphericalangle DK_1P = \sphericalangle ABT + \sphericalangle DCT$. Но по условие $\sphericalangle ABT + \sphericalangle DCT = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCA = \sphericalangle ATB$, следователно $\sphericalangle AK_1D = \sphericalangle ABT + \sphericalangle DCT = \sphericalangle ATB$. Като вземем предвид, че $\sphericalangle ATB = \sphericalangle BK_1A$ (вписани ъгли), получаваме $\sphericalangle AK_1D = \sphericalangle BK_1A$. Оттук и

доказаната пропорция $\frac{DK_1}{AK_1} = \frac{AK_1}{BK_1}$ следва $\Delta AK_1D \sim \Delta BK_1A$. От това подо-

бие имаме $\sphericalangle DAK_1 = \sphericalangle ABK_1$. По теоремата за вписан и периферен ъгъл от последното равенство следва, че правата AD се допира до описаната около ΔABK_1 окръжност c_1 . Тогава $PA^2 = PK_1 \cdot PT$ (от свойството на секущите и допирателната). От $\Delta AK_1D \sim \Delta BK_1A$ имаме още, че $\sphericalangle ADK_1 = \sphericalangle BAK_1$. Освен това $\sphericalangle BAK_1 = \sphericalangle DTK_1$ (от вписания четириъгълник $ABTK_1$). Следователно $\sphericalangle ADK_1 = \sphericalangle DTK_1$. Оттук можем да заключим, че правата AD се допира и до описаната около ΔDK_1T окръжност c_2 . Така получаваме $PD^2 = PK_1 \cdot PT$. Като сравним това равенство с полученото по-горе $PA^2 = PK_1 \cdot PT$, получаваме $PA = PD$. Следователно P е средата на AD , т.е. $P \equiv E_4$. С това е доказано, че точките K_1 , T и E_4 са колинеарни.

Накрая ще докажем едно интересно свойство на центъра на тежестта на вписания в окръжност четириъгълник. Ще използваме следното свойство на брокарианите и точката на Микел, доказано в (Наймов, 2001).

Свойство 26. Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O и продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка U ,

а продълженията на страните AB и DC – в точка V , то $\Delta K_1 K_2 M$ е ортоцентричният триъгълник за ΔUOV (фиг. 17).

От това свойство, в частност, следва, че описаната около $\Delta K_1 K_2 M$ окръжност е Ойлеровата окръжност за ΔUOV .

Свойство 27. Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O и продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка U , а продълженията на страните AB и DC – в точка V , то центърът на тежестта G за $ABCD$ лежи върху Ойлеровата окръжност на ΔUOV (фиг. 17).

Доказателство. За да докажем, че точката G лежи върху Ойлеровата окръжност на ΔUOV , т.е. на описаната около $\Delta K_1 K_2 M$ окръжност, то според обобщената теорема на Птоломей е достатъчно да докажем равенството:

$$(17) \quad GM \cdot K_1 K_2 = GK_1 \cdot MK_2 + GK_2 \cdot MK_1.$$

От свойства (3), (5), (8) и (10) следва, че (17) е еквивалентно с $\frac{l_1 l_2}{2l_3} \cdot \frac{mnl_3}{2l_1 l_2} = \frac{l_2 l_3}{2l_1} \cdot \frac{bdl_1}{2l_2 l_3} + \frac{l_1 l_3}{2l_2} \cdot \frac{acl_2}{2l_1 l_3}$. Последното е равносилно с равенство то $mn = bd + ac$. Но това равенство е изпълнено, защото четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Следователно е изпълнено и равенство (17). Така доказахме, че центърът на тежестта G на $ABCD$ лежи върху Ойлеровата окръжност на ΔUOV .

ЛИТЕРАТУРА

- Хаимов, Х. (2001). Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 17 – 23.
- Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълник, *Математика*, 5, 15 – 21.
- Ненков, В., Ст. Стефанов & Х. Хаимов (2017). Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 93.
- Хаимов, Х (2007). Едно неравенство в четириъгълника, *Математика*, 6, 10 – 11.
- Стефанов, С. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 3, 252 – 261.
- Ненков, В. & С. Стефанов. (2018). Екстремални свойства на две забележителни точки в изпъкнал четириъгълник, *Годишник на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“*, Шумен, 27 – 36, ISSN 1311-834X.

- Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.
- Karaibryamov, S., B. Tsareva & B. Zlatanov (2013). Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 7, Number 1*, 22 – 51, ISSN 1933-2823.
- Zlatanov, B. (2013). Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point, *Annals. Computer Science Series*, 11, (1), 79 – 91.
- Zlatanov, B. (2014). An Etude on one Sharygin's Problem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3, (2), 50 – 61.
- Георгиева, М., С. Гроздев (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток-Запад. ISBN 987-619-152-869-1

REFERENCES

- Haimov, H. (2001). Brocardians – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6, 17 – 23.
- Haimov, H. (2005). Brocardians of the quadrilateral, *Mathematics*, 5, 15 – 21.
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of quadrilateral, Miquel point, Inverse isogonality, *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 93.
- Stefanov, S. (2017). Second pseudo center of quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 3, 261 – 270.
- Nenkov, V. & S. Stefanov. (2018). Extremal properties of two notable points in a convex quadrilateral, *Year Book of Shumen University, Shumen*, 27 – 36, ISSN 1311-834X.
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundation of dynamic geometry*. Moscow: ASOU.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.
- Karaibryamov, S., B. Tsareva & B. Zlatanov (2013). Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 7, Number 1*, 22 – 51, ISSN 1933-2823.
- Zlatanov, B. (2013). Some Properties of Reflection of Quadrangle about Point, *Annals. Computer Science Series*, 11, (1), 79 – 91.
- Zlatanov, B. (2014). An Etude on one Sharygin's Problem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3, (2), 50 – 61.
- Georgieva, M. & S. Grozdev. (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.), Sofia: Iztok-Zapad, ISBN 987-619-152-869-1, 327 pages.

**FORMULAE FOR THE DISTANCES FROM
THE BROCARDIANS AND THE MIQUEL POINT
IN A QUADRILATERAL TO ITS VERTICES
AND THE MIDPOINTS OF ITS SIDES AND DIAGONALS**

Abstract. Formulae are derived and presented for the distances to the vertices and the midpoints of the sides and diagonals of a quadrilateral from three of its notable points. They are used to prove some inequalities in the quadrilateral, connecting the lengths of its sides and diagonals. An interesting property of the centroid of a quadrilateral inscribed in a circle has been found too.

Keywords: quadrilateral; notable points; inequalities; centroid; Euler circle

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
“Nikola Vaptsarov” Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

✉ **Mr. Stanislav Stefanov, PhD student**
Technical University – Sofia
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Mr. Haim Haimov, Researcher**
16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna, Bulgaria
E-mail: